# Chapitre 1 - suite Espaces Vectoriels

**Remarque** : soit $E$ un e.v de dimension $n$ ($\dim E = n$)

1) $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base $\Leftrightarrow$ $B$ libre $\Leftrightarrow$ $B$ génératrice de $E$

2) Si $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ telque $p > n$ alors $B$ est liée (مرتبطة)
si de plus $B$ est génératrice (مولدة), on peut extraire (استخراج)
une famille $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ base pour $E$.

**Exemple :**

**1)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit la famille $B = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (2,1)\}$
Selon la remarque 1), comme $\text{Card}(B) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$
alors pour montrer que $B$ est une base il suffit
de montrer qu'elle est soit libre, soit génératrice ?
on, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,1) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0} \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \end{array}$$

et donc $\lambda_1 = 0$ d'où $B$ est libre, d'où $B$ est une base.

**2)** $E = \mathbb{R}^3$ ; $B = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (0,1,-1)\}$
$B$ une base $\Leftrightarrow$ $B$ libre
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(0,1,-1) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \text{---(1)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{---(2)} \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 & \text{---(3)} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

donc $B$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3) Soit le s.e.v $F = \{(x+y,\ x-z,\ -y-z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Trouver une base de F (càd une famille génératrice libre)

Comme $F \subset \mathbb{R}^3$ alors $\dim F \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Soit $X = (x+y,\ x-z,\ -y-z) \in F \Leftrightarrow X = (x, x, 0) + (y, 0, -y) + (0, -z, -z)$

$\Rightarrow X = x\underbrace{(1,1,0)}_{v_1} + y\underbrace{(1,0,-1)}_{v_2} + z\underbrace{(0,-1,-1)}_{v_3}$.

ainsi, la famille $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de F.

Si B est libre alors B sera une base ?

B est elle - libre ?

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (*)

$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 - \lambda_3,\ -\lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{array} / \lambda_1 \in \mathbb{R}$.

غير حرة

donc $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille liée (non libre)

donc d'après la remarque 2), on peut extraire une famille une base de F ? on doit chercher deux vecteurs de B qui sont libres, s'il n'existe pas deux vecteurs de B libres alors on prend un vecteur non nul de B et ce dernier sera une base de F.

de (*) on a : $\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_2 + \lambda_1 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

donc $v_3 = -v_1 + v_2$, alors on choisit $B_1 = \{v_1, v_2\}$.

et on étudie si $B_1$ est libre ?

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow B_1$ est libre donc $B_1$ est une base de F.

# Chapitre 1 - Suite -

## Théoreme 1.1

Soit $E$ un e.v de dimension $n$. ($\dim E = n$).
$F$ un s.e.v de $E$ alors :

1/ $\dim F \leq n = \dim E$.

2/ $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

**Exemple :**

$F = \{(x+y+z,\ y+z,\ z) / x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$\forall X = (x+y+z,\ y+z,\ z) \in F \Rightarrow X = (x,0,0) + (y,y,0) + (z,z,z)$

$\Rightarrow X = x\underbrace{(1,0,0)}_{v_1} + y\underbrace{(1,1,0)}_{v_2} + z\underbrace{(1,1,1)}_{v_3}$

La famille $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ et donc une famille génératrice
on peut montrer facillement qu'elle est libre
donc $B$ forme une base de $F$ et donc $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
d'après 2/ du Théorème précédent $F = \mathbb{R}^3$.

## Théorème 1.2. -

Soit $E$ un e.v telque $\dim E = n$.
$F_1, F_2$ deux s.e.v de $E$ alors :

$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow B_1 \cup B_2 \text{ est une base de } E$$

tel que $B_1$ une base de $F_1$, $B_2$ une base de $F_2$.

**Exemple :** $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\}$, $B_1 = \{(1,0,0)\}$
$F_2 = \{(0, 2y, -z) / y, z \in \mathbb{R}\}$, $B_2 = \{(0,2,0), (0,0,-1)\}$

$\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ car $B = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,2,0),\ v_3 = (0,0,-1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.