Chapitre 2 - Applications linéaires

التطبيقات الخطية.

2.1 Applications linéaires

Def 2.1: Soient E, F deux E.V sur un Corps K.
Une application $f: E \longrightarrow F$ est dite linéaire (تطبيق خطي
Si, 1) $\forall x, y \in E$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$: $f(\lambda . x) = \lambda . f(x)$.

On note l'ensemble des App. linéaires de E dans F par $\mathcal{L}(E,F)$

Exemples 1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une A.L Car :
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x-y+z\ ,\ y-z)$$

1) $\forall X=(x,y,z), Y=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$:
$$f(X+Y) = f(x+x', y+y', z+z') = (x+x'-(y+y')+z+z', y+y'-(z+z'))$$
$$= (x-y+z+x'-y'+z', y-z+y'-z') \quad — (1)$$
$$f(X)+f(Y) = (x-y+z, y-z) + (x'-y'+z', y'-z')$$
$$= (x-y+z+x'-y'+z', y-z+y'-z') \quad — (2)$$
de (1) et (2) : $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$$f(\lambda X) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - \lambda y + \lambda z\ ,\ \lambda y - \lambda z) \quad —(1)$$
$$\lambda . f(X) = \lambda . (x-y+z\ ,\ y-z) = (\lambda x - \lambda y + \lambda z\ ,\ \lambda y - \lambda z) \quad —(2)$$
de (1), (2) : $f(\lambda . X) = \lambda . f(X)$.

2) $f: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est une A.L Car :
$$P(x) \longmapsto f(P(x)) = P'(x) \text{ (la derivée de } P(x))$$
المشتق

1) $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$: $f(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = f(P) + f(Q)$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}[X]$: $f(\lambda . P) = (\lambda . P)' = \lambda . P' = \lambda . f(P)$.

Chapitre 2 - Suite - A.L

Proposition 2.1 : Si $f : E \longrightarrow F$ une A.L alors,

1) $f(0_E) = 0_F$

2) $\forall x \in E : \quad f(-x) = -f(x)$.

3) $f : E \longrightarrow F$ A.L $\Leftrightarrow \left(\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in E ; \; f(\lambda x + \mu . y) = \lambda . f(x) + \mu . f(y) \right)$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une A.L car :

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; \forall X = (x, y), Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda X + \mu . Y) = f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$
$$= [\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y')]$$
$$= (\lambda x + \lambda y + \mu x' + \mu y', 2\lambda x - 3\lambda y + 2\mu x' - 3\mu y') \quad —(1)$$

$$\lambda . f(X) + \mu . f(Y) = \lambda(x + y, 2x - 3y) + \mu(x' + y', 2x' - 3y')$$
$$= (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x - 3\lambda y) + (\mu x' + \mu y', 2\mu x' - 3\mu y')$$
$$= (\lambda x + \lambda y + \mu x' + \mu y', 2\lambda x - 3\lambda y + 2\mu x' - 3\mu y') \quad —(2)$$

de (1) et (2), $f(\lambda . X + \mu . Y) = \lambda . f(X) + \mu . f(Y)$.

2.2 Noyau et Image d'une A.L

(نواة و صورة تطبيق خطي)

Def 2.2 : $f : E \longrightarrow F$ une A.L.

1) L'image de f est l'ensemble noté $\mathrm{Im} f$ telque

$$\mathrm{Im} f = f(E) = \{ y \in F : \exists x \in E : y = f(x) \} = \{ f(x) / x \in E \}$$

2) Le noyau de f est l'ensemble noté $\mathrm{Ker} f$ définie par :

$$\mathrm{Ker} f = \{ x \in E : f(x) = 0_F \}.$$

Chapitre 2 - A.L - Suite

Proposition 2.2 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) Le noyau $\ker f$ est un s.e.v de E.
2) L'image $\mathrm{Im} f$ est un s.e.v de F.

Preuve: Exercice.

Proposition 2.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

1) f est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.
2) f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$.

Exemples 1// $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+2y, x-y)$$

- $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$

$f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (x+2y, x-y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 & -(1) \\ x-y = 0 & -(2) \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0$, on remplace dans (2)

on trouve $x = 0 \Rightarrow \ker f = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

donc f est injective

- $\mathrm{Im} f = \{f(x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x+2y, x-y) / x,y \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Im} f = \{x(1,1) + y(2,1) / x,y \in \mathbb{R}\} = \langle v_1 = (1,1), v_2 = (2,$

$B = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$, $\dim \mathrm{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}$

d'où $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ est surjective

2) Chapitre 2 - A.L - Suite

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, -x+y, 2x)$

$\mathrm{Im} f = \{ f(x,y) \,/\, x,y \in \mathbb{R} \} = \{ (x+y, -x+y, 2x) \,/\, x,y \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x(1,-1,2) + y(1,1,0) \,/\, x,y \in \mathbb{R} \}$

$= \langle v_1 = (1,-1,2),\ v_2 = (1,1,0) \rangle$

$B = \{ v_1, v_2 \}$ forme une base de $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^3$

donc f n'est pas surjective

$\mathrm{Ker} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y, -x+y, 2x) = (0,0,0) \}$

$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \\ 2x=0 \end{cases} \right\} = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

donc f est injective.

3)

$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \longmapsto f(P) = P' \quad / \ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$\mathrm{Ker} f = \{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : P' = 0 \}$

$= \{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : a_1 + 2a_2 X = 0 \}$

$= \{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : a_1 = 0,\ a_2 = 0 \}$

$= \{ P = a_0 \,/\, a_0 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \neq \{0\}$

f n'est pas injective

$\mathrm{Im} f = \{ f(P) \,/\, P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \}$

$= \{ a_1 + 2a_2 X \,/\, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$, on pose $a_1 = b_0$, $2a_2 = b_1$

$= \{ b_0 + b_1 X \,/\, b_0, b_1 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_1[X] \neq \mathbb{R}_2[X]$

f n'est pas surjective

Chapitre 2 - A.L - suite

Proposition 2.4 ; E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v de dimension fini, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E

1) Si f injective et B libre $\Rightarrow f(B)$ libre

2) Si f surjective et B famille génératrice de E alors $f(B)$ famille génératrice de F

3) Si f bijective, B base de $E \Leftrightarrow f(B)$ base de F

Exemple : 1// Dans l'exemple 2// précedant $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ est une famille libre (car c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

alors $f(B) = \{f(e_1) = (1,-1,2),\ f(e_2) = (1,1,0)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2// Dans l'exemple 1// précedant.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+2y,\ x-y)$$

f est bijective

l'image de la base canonique $B = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$

$f(B) = \{f(e_1) = (1,1),\ f(e_2) = (2,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.1 (Théorème de la dimension)

E, F 2 K-e.v de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors ;

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Chapitre 2 A.L - suite

Remarque : $\dim(\operatorname{Im} f)$ est par définition le rang de f noté $rg(f)$. (رتبة f)

Corollaire 2.1, E, F 2 K-e.v de dimension finie $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$, alors
f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective

Exemples 1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+y, y+z)$

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x+y=0 & -(1) \\ y+z=0 & -(2) \end{cases}\right\} = \left\{(x,y,z) \mid \begin{matrix} x=-y \\ z=-y \end{matrix}\right\}$$
$$= \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle v_1 = (-1, 1, -1) \rangle \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1$, f n'est pas injective

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$.

$\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et f surjective

2) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
$P = ax^2+bx+c \longmapsto f(P) = (a, b, c)$

$$\operatorname{Ker} f = \{P = ax^2+bx+c \mid f(P) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{P = ax^2+bx+c \mid (a,b,c) = (0,0,0)\}$$
$$= \{P = ax^2+bx+c \mid a=b=c=0\} = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}.$$

donc f est injective, et comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3 = 3$
alors f est bijective.

Remarque : Le Corollaire 2.1 est faux en dimension infinie. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est surjective
$P \longmapsto f(P) = P'$

mais n'est pas injective car
$\operatorname{Ker} f = \{P \in \mathbb{R}[X] : P' = 0\} = \mathbb{R} \neq \{0\}$.