Chapitre 2 - A.L - suite -

2.3 Matrice d'une A.L

Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E

$B'_F = \{e'_1, \dots, e'_p\}$ une base de F

et $f : E \longrightarrow F$ une A.L tq

$$f(e_1) = a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \dots + a_{p1} e'_p$$
$$f(e_2) = a_{12} e'_1 + a_{22} e'_2 + \dots + a_{p2} e'_p$$
$$\vdots$$
$$f(e_n) = a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \dots + a_{pn} e'_p$$

tq a_{ij} / $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2.3 Matrice d'une A.L.

Def 2.3 on appelle Matrice de f dans les bases B_E, B'_F noté $M(f)_{B_E, B'_F}$ Le tableau rectangulaire des nombres ($\in K$) suivant :

$$M = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} \end{array} \qquad (2.1)$$

les nombres (a_{ij}) sont dit Coéfficients de M ; les lignes horizontales rangés (lignes i), les lignes verticales Colonnes (j)

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2.3 Matrice d'une A.L suite

la matrice M est dite de type (p, n)

Remarque : si $E = F$ $(n = p)$ et $B_E = B'_F = \{e_1, \dots, e_n\}$ alors la matrice de f est noté $\underset{B}{M}(f)$

Exemples

1// $f = Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto Id_{\mathbb{R}^3}(x,y,z) = (x,y,z)$$

Soit $B_c = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base Canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$f(e_1) = e_1 = 1.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3$$

$$f(e_2) = e_2 = 0.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3$$

$$f(e_3) = e_3 = 0.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$$

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2.3 Matrice d'une A.L

alors la matrice de $I_{d_{\mathbb{R}^3}}$ dans la base Canonique B_C est

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

dite Matrice Identité noté I_3.

2// $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (2x - y, -y + 3z)$

$B_{\mathbb{R}^3} = B_C = \{e_1, e_2, e_3\}$

$B'_{\mathbb{R}^2} = \{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\} = B'_C$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,0) = 2f_1 = 2 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,-1) = -f_1 - f_2$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,3) = f_2 = 0 \cdot f_1 + 3 \cdot f$

Donc la Matrice de f dans les bases $B_{\mathbb{R}^3}$ et $B'_{\mathbb{R}^2}$ est,

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2.3 Matrice d'une A.L Suite

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ de type } (2,3)$$

3// $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ المشتق

$P \longmapsto f(P) = P'$ (P' derivée de P)

$$B_{\mathbb{R}_2[X]} = \{ P_1 = 1,\ P_2 = 1 + X,\ P_3 = X + X^2 \}$$

$$B'_{\mathbb{R}_1[X]} = B'_c = \{ Q_1 = 1,\ Q_2 = X \}$$

$$f(P_1) = P_1' = 0 = 0.1 + 0.X = 0.Q_1 + 0.Q_2$$

$$f(P_2) = P_2' = 1 = 1.1 + 0.X = 1.Q_1 + 0.Q_2$$

$$f(P_3) = P_3' = 1 + 2X = 1.Q_1 + 2.Q_2$$

donc $M(f)_{B_{\mathbb{R}_2[X]}, B_{\mathbb{R}_1[X]}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

M est de type $(2,3)$

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2.3 Matrice d'une A.L Suite

Def 2.4 Soit E un K-e.v, $\dim E = n$, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, $x \in E$ tq : $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ / $x_i \in K$

la matrice de x dans la base B_E noté $M_{B_E}(x)$ est $X_{B_E} = M_{B_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Exemples 1) $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, -2, 3)$ alors la matrice de x dans la base canonique est

$$X_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (2x - y, x + 3y)$

Soit $v = (1, 2)$

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

2.5 Matrice de ~~la~~ passage suite

Calculer $\underset{B_c}{M}(v)$ et $\underset{B_c}{M}(f(v))$?

$$V_{B_c} = \underset{B_c}{M}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v) = f(-1,2) = (-4,5)$$

$$W_{B_c} = \underset{B_c}{M}(f(v)) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2.5 Matrice de passage

Soit E un K-e.V de $\dim E = n$

$B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B'_E = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E tq :

$$\begin{cases} e'_1 = P_{11} e_1 + P_{21} e_2 + \dots + P_{n1} e_n \\ e'_2 = P_{12} e_1 + P_{22} e_2 + \dots + P_{n2} e_n \\ \vdots \\ e'_n = P_{1n} e_1 + P_{2n} e_2 + \dots + P_{nn} e_n \end{cases}$$

alors la matrice de passage de la base B_E à la base B'_E noté $P = Pass(B_E, B_{E'})$ est :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque : $Pass(B \to B') = \underset{B', B}{M}(Id_E)$

2.5 Matrice de passage (suite)

Exemple 1) $E = \mathbb{R}^2$, $B_c = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$

et $B' = \{e'_1 = (2,1),\ e'_2 = (3,-2)\}$

$P = Pass(B_c \longrightarrow B')$?

on a $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 \\ e'_2 = 3e_1 - 2e_2 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2) $E = \mathbb{R}^2$, $B = \{f_1 = (1,-1),\ f_2 = (1,1)\}$

$B' = \{f'_1 = (3,-1),\ f'_2 = (3,1)\}$

$P = Pass(B \longrightarrow B')$?

Il faut trouver les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tq

$$\begin{cases} f'_1 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \\ f'_2 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2) = (3,-1) \\ (\beta_1 + \beta_2, -\beta_1 + \beta_2) = (3,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 3 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

REDMI NOTE 8