Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel -

Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Année Universitaire 2022/2023**

Département d'Informatique

Série 2 : Applications linéaires

Exercice 1:

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires

1) $f : IR^2 \to IR^3, (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$.

2) $f : IR^2 \to IR^3, (x,y) \mapsto (x-2y, 1, x+z)$.

3) $f : IR^2 \to IR, (x,y) \mapsto x^2+y^2$.

4) $f : IR[X] \to IR^2, P \mapsto (P(0), P'(1))$.

5) $f : IR[X] \to IR[X], P \mapsto P^2$.

Exercice 2 : Soit E, F deux K-espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$:

1- Montrer que le noyau Ker$f$ est un S.E.V de E.

2- Montrer que l'image Imf est un S.E.V de F.

Exercice 3 : (Devoir) On considère l'application linéaire f de IR^3 dans IR^4 définie par :

$f(x,y,z)=(x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$.

1. Déterminer une base de Im(f).
2. Déterminer une base de ker(f).
3. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 4: On considère l'application $f : IR^3 \to IR^3$ définie par $f(x,y,z)=(-3x-y+z, 8x+3y-2z, -4x-y+2z)$.

1. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.
2. L'application f est-elle injective?
3. Donner le rang de f. L'application f est-elle surjective?
4. Déterminer une base de Im(f).

Exercice 5: Soit E= $IR^3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par : $u(P)=P+(1-X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de Im(u).
3. Déterminer une base de ker(u).
4. Montrer que ker(u) et Im(u) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 6: (Devoir)

1. Pour $0 \leq k \leq n$, on note $B_k(X)=X^k(1-X)^{n-k}$.

   Démontrer que la famille $(B_0,\ldots,B_n)$ forme une base de $IR_n[X]$.

2. On définit ϕ sur $IR_n[X]$ par : $\phi(P)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k P(k/n) B_k$
3. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $IR_n[X]$.

Responsable du module : M. Chelgham