

Chapitre IV: Écoulement des puissances

IV.1- Introduction

Les études de flux de puissance sont d'une grande importance dans la planification et la conception de l'expansion future des systèmes d'alimentation, ainsi que dans la détermination du meilleur fonctionnement des systèmes existants. La principale information obtenue à partir d'une étude de flux de puissance est la magnitude et l'angle de phase de la tension à chaque nœud et la puissance active et réactive circulant dans chaque ligne.

Cependant, l'impression de la solution à partir de programmes informatiques utilisés par les sociétés de distribution d'électricité fournit beaucoup d'informations de valeur supplémentaires.

IV.2- Description d'un système électrique

Afin de décrire la structure géométrique d'un réseau, il suffit de remplacer les composants du réseau par de simples segmentations sans voir leur propre caractéristique. Parmi les différents modèles mathématiques qui décrivent ce réseau, nous citerons le modèle dit "modèle des potentiels noraux". Ce modèle est très utilisé aux problèmes de répartition économique d'énergie électrique.

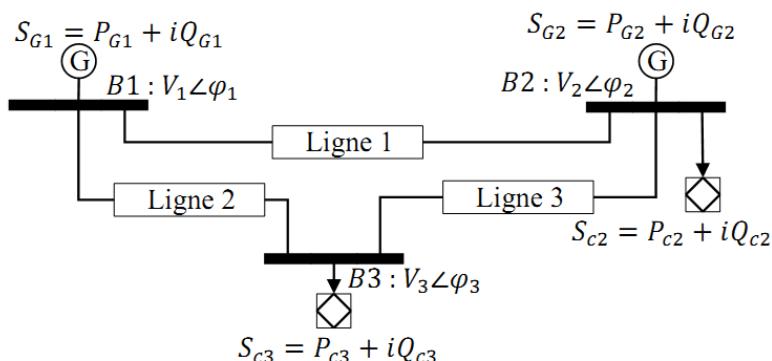


Figure IV-1 : Structure géométrique d'un réseau à trois nœuds

Il faut distinguer :

- Les nœuds producteurs (associés aux centrales) où la puissance active et le module de la tension sont connus.
- Les nœuds consommateurs (associés aux charges) où les puissances actives et réactives sont connues.
- Le nœud balancier (associé à une centrale généralement la plus puissante) où le module de la tension et la phase de celle-ci sont connus. Généralement on fixe la phase $\varphi = 0$ et les phases des tensions des autres nœuds sont calculées par rapport au nœud balancier.

À retenir

Type	Données	Inconnues
Nœud producteur	P et V	Q et φ
Nœud consommateur	P et Q	V et φ
Nœud balancier	V et φ	P et Q

IV.3- Théorie de graphe

Un réseau de transport, comme tout réseau, peut être représenté sous forme de graphe. Un graphe $G(n, e)$ est la donnée du couple (n, e) où « n » le nombre de noeuds et "e" est le nombre d'arc.

❶ Un graphe G d'ordre n connexe comporte au moins $n - 1$ arcs.

- Un chemin " P " est simple si chaque arc du chemin est emprunté une seule fois (Exemple : $P = \{0,1,2,4\}$)
- Un cycle " C " est un chemin simple finissant à son point de départ (boucle). (Exemple : $C = \{0,1,2,3,0\}$)
- Connexité : un graphe est connexe s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets (pas de chemin ou point isolés).
- Graphe acyclique : Un graphe acyclique G à n sommets possède au plus « $n-1$ » arêtes.
- Arbre : Un arbre est un graphe connexe sans cycle.
 - Un arbre à B branche où " $b = n - 1$ ".
 - " $l = e - b = e - n + 1$ "
- Boucle de Base : Une boucle qui est formée par la fermeture d'une seule liaison est appelée boucle de base.

Exemple n° IV.1

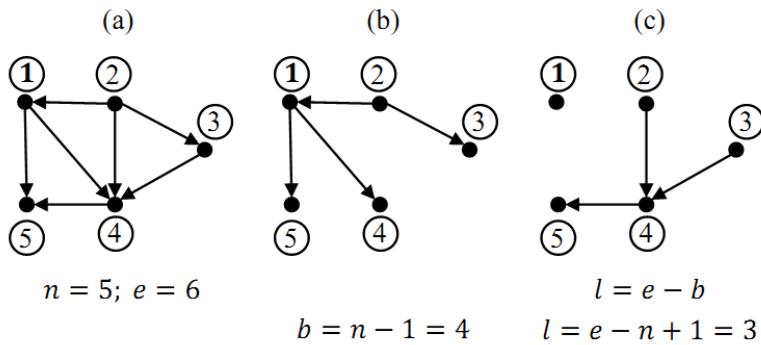


Figure IV-2 : Présentation par théorie des graphes d'un réseau
 (a) Graphe; (b) Arbre (Tree) ; (c) Co-Ardre (Co-Tree)

L'addition de chaque lien dans l'arbre fermera une nouvelle boucle.

Les coupes de base sont ceux qui contiennent une seule branche. Le nombre de coupures de base est égal au nombre de branches. Une matrice d'admittance peut être formée à partir des ensembles coupés.

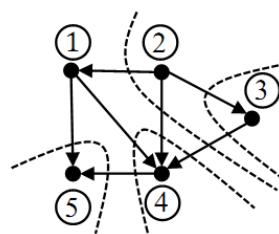


Figure IV-3 : Présentation des boucles de base

IV.3.A- Matrice d'incidence

Il existe plusieurs matrices d'incidence qui sont importantes dans le développement des différentes matrices de réseaux telles que la matrice d'impédance de bus, la matrice d'admittance de branche etc...

Ces différentes matrices d'incidence sont fondamentalement dérivées de la connectivité ou de l'incidence d'un élément sur un noeud. La matrice d'incidence A aura la dimension $(e \times n)$.

IV.3.A.1- Matrice d'incidence nodale {Branch - Path Incidence Matrix}

Le réseau contient une référence, en fait, n'importe quel nœud du graphe connecté peut être sélectionné comme nœud de référence. La matrice obtenue en supprimant la colonne correspondant au nœud de référence est appelée matrice d'incidence de nœud.

IV.3.A.2- Matrice d'incidence de boucle de base {Basic Cut-Set Incidence Matrix}

La matrice d'incidence de boucle de base B montre l'incidence des éléments du graphe connecté sur les boucles de base.

IV.3.A.3- Matrice Incidence des mailles fondamentales {Basic Loop Incidence Matrix}

Elle comporte autant de lignes qu'il y a de segments dans le graphe (e) et autant de colonnes qu'il y a de liens dans l'arbre (m). On obtient cette matrice ($e \times m$), une fois l'arbre choisi, en ajoutant un à un les liens dans le graphe. Une maille fondamentale (une colonne de la matrice C) est ainsi formée. L'orientation de la maille est celle du lien qui la définit. La matrice des mailles Fondamentales permet aussi d'exprimer une généralisation de la loi de Kirchhoff des tensions.

IV.3.B- Matrice d'admittance et d'impédance

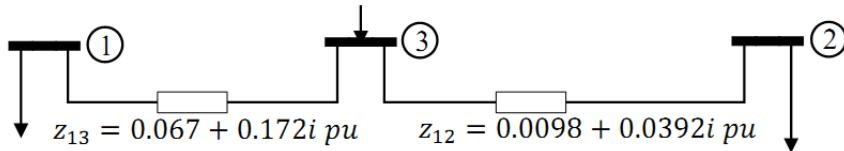
La matrice d'admittance de bus peut être trouvée par approche graphique :

$$Y_{Bus} = A^t \times y \times A \quad (\text{IV-1})$$

Où : A : est la matrice d'incidence de nœud ; y : est la matrice primitive d'admittance.

Exemple n° IV.2

Soit le réseau montré sur la figure :

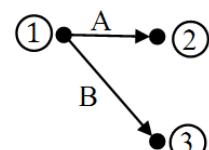


Déterminer avec la technique de la théorie des graphes la matrice d'admittance.

Solution

$$G = (3,2); n = \{1,2,3\}; e = \{(1,2), (1,3)\}$$

n	"1"	"2"	"3"
e			
$A = 1 - 2$	1	-1	0
$B = 1 - 3$	1	0	-1



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'admittance

$$y = \begin{bmatrix} y_{12} & 0 \\ 0 & y_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 24i & 0 \\ 0 & 2 - 5i \end{bmatrix}$$

Donc la matrice d'admittance de bus

$$Y_{bus} = A^t \times y \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 - 24i & 0 \\ 0 & 2 - 5i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} 6 - 24i & 2 - 5i \\ -6 + 24i & 0 \\ 0 & -2 + 5i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 29i & -6 + 24i & -2 + 5i \\ -6 + 24i & 6 - 24i & 0 \\ -2 + 5i & 0 & 2 - 5i \end{bmatrix}$$

IV.3.C- Lignes mutuellement couplées

IV.3.C.1- Réseau de quatre nœuds

Il s'agit de deux lignes mutuellement couplées qui font partie d'un réseau mais qui ne sont pas couplées inductivement.

Supposons deux lignes mutuellement couplées avec une admittance y_m .

$$\begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} & y_m \\ y_m & y_{34} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} & y_m \\ y_m & y_{34} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 - V_2 \\ V_3 - V_4 \end{bmatrix}$$

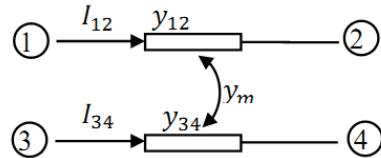


Figure IV-4 : Réseau de quatre nœuds

On a :

$$\begin{bmatrix} V_1 - V_2 \\ V_3 - V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

De même :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{34} \end{bmatrix} = A^t \times \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{34} \end{bmatrix}$$

On remplace à l'équation

$$(A^t)^{-1} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} & y_m \\ y_m & y_{34} \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = A^t \times \begin{bmatrix} y_{12} & y_m \\ y_m & y_{34} \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

D'où la matrice d'admittance

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} y_{12} & -y_{12} & y_m & -y_m \\ -y_{12} & y_{12} & -y_m & y_m \\ y_m & -y_m & y_{34} & -y_{34} \\ -y_m & y_m & -y_{34} & y_{34} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

IV.3.C.2- Réseau à trois nœuds

$$\begin{cases} I_2 = y_{12}V_{21} + y_mV_{31} \\ I_3 = y_{13}V_{31} + y_mV_{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_2 = y_{12}(V_2 - V_1) + y_m(V_3 - V_1) \\ I_3 = y_{13}(V_3 - V_1) + y_m(V_2 - V_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_2 = -(y_{12} + y_m)V_1 + y_{12}V_2 + y_mV_3 \\ I_3 = -(y_{13} + y_m)V_1 + y_mV_2 + y_{13}V_3 \end{cases}$$

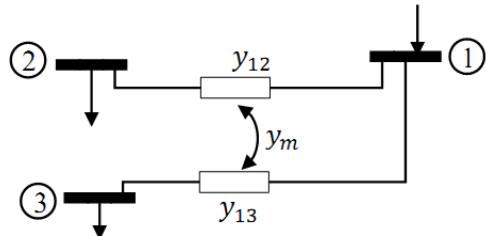


Figure IV-5 : Réseau à trois nœuds

On a : $I_1 = -I_2 - I_3$

$$\begin{cases} I_1 = (y_{12} + y_{13} + 2y_m)V_1 - (y_{12} + y_m)V_2 - (y_{13} + y_m)V_3 \\ I_2 = -(y_{12} + y_m)V_1 + y_{12}V_2 + y_mV_3 \\ I_3 = -(y_{13} + y_m)V_1 + y_mV_2 + y_{13}V_3 \end{cases}$$

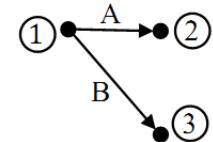
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + 2y_m & -y_{12} - y_m & -y_{13} - y_m \\ -y_{12} - y_m & y_{12} & y_m \\ -y_{13} - y_m & y_m & y_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + 2y_m & -y_{12} - y_m & -y_{13} - y_m \\ -y_{12} - y_m & y_{12} & y_m \\ -y_{13} - y_m & y_m & y_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3})$$

IV.3.C.3- Résolution avec théorie des graphes

$$G = (3,2); n = \{1,2,3\}; e = \{(1,2), (1,3)\}$$

n	"1"	"2"	"3"
e			
$A = 1 - 2$	1	-1	0
$B = 1 - 3$	1	0	-1



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} y_{12} & y_m \\ y_m & y_{13} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice d'admittance de bus

$$\begin{aligned} Y_{bus} &= A^t \times y \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{12} & y_m \\ y_m & y_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{12} + y_m & y_{13} + y_m \\ -y_{12} & -y_m \\ -y_m & -y_{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ Y_{bus} &= \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} + 2y_m & -y_{12} - y_m & -y_{13} - y_m \\ -y_{12} - y_m & y_{12} & y_m \\ -y_{13} - y_m & y_m & y_{13} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-4})$$

IV.4- Algorithme de la matrice d'admittance

Pour la résolution d'un problème de répartition de charges, il est plus commode de travailler avec les admittances plutôt qu'avec les impédances.

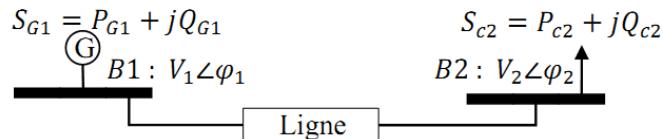


Figure IV-6 : Cas d'un réseau à deux nœuds

IV.4.A- Réseau à deux nœuds

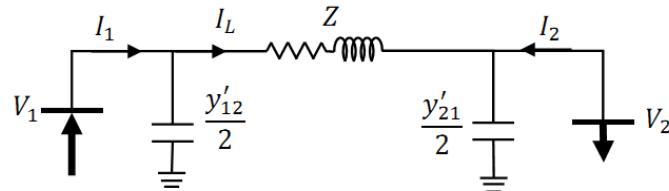


Figure IV-7 : Modèle en π d'une ligne électrique

Définissons les écoulements courants dans le circuit :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{y'_{12}}{2} \times V_1 + y_{12} \times (V_1 - V_2) \\ I_2 = \frac{y'_{21}}{2} \times V_2 + y_{21} \times (V_2 - V_1) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{y'_{12}}{2} + y_{12} \right) \times V_1 - y_{12} \times V_2 \\ I_2 = -y_{21} \times V_1 + \left(\frac{y'_{21}}{2} + Y_{21} \right) \times V_2 \end{cases} \quad (\text{IV-5})$$

$$\text{On pose: } Y_{11} = \frac{y'_{12}}{2} + y_{12}; \quad Y_{12} = -y_{12}; \quad Y_{21} = -y_{21}; \quad Y_{22} = \frac{y'_{21}}{2} + y_{21}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

IV.4.B- Réseau à n nœuds

Dans un réseau comprenant n nœuds, les équations reliant les tensions aux nœud E et les courants injectés aux nœuds forment donc un système linéaire d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \Rightarrow I = Y \cdot V$$

I: Le courant injecté en un nœud.
Y: Matrice d'admittance aux nœuds.
V: La tension phase/terre.

La matrice d'admittance d'un réseau peut être calculer :

$$\begin{cases} Y_{km} = -y_{km} & ; k \neq m \text{ l'admittance mutuelle} \\ Y_{kk} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n y_{km} + \sum_{m=1}^n \frac{y'_{km}}{2} & ; k = m \text{ l'admittance propre} \end{cases} \quad (\text{IV-6})$$

IV.5- Détermination directe de la matrice d'impédance

Nous allons maintenant utiliser les méthodes la technique d'addition progressive des nœuds et des branches au nœud de référence.

IV.5.A- Ajout d'un nouveau nœud à un nœud existant via une impédance

C'est le cas lorsqu'un nœud, qui n'a pas fait partie du réseau d'origine, est ajouté à un nœud existant via une ligne de transmission d'impédance Z_a . On notera à partir de cette figure que le courant I_p issu du nœud p va modifier la tension du bus k. Nous aurons alors :

$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \cdots + Z_{ik}(I_k + I_p) + \cdots + Z_{in}I_n$$

De plus, la tension du nœud p est donnée par :

$$V_p = Z_a I_p + V_k$$

On remplace V_k on aura :

$$V_p = Z_{k1}I_1 + Z_{k2}I_2 + \cdots + Z_{kk}(I_k + I_p) + \cdots + Z_{in}I_n + Z_a I_p$$

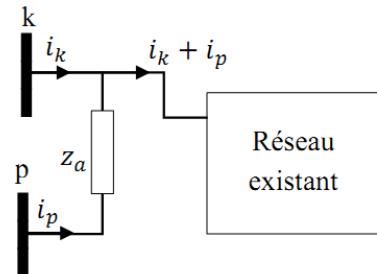


Figure IV-8 : A. Ajout d'un nouveau nœud

Nous pouvons alors écrire les relations :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1k} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & Z_{kk} + Z_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_b \end{bmatrix} \quad (\text{IV-7})$$

IV.5.B- Ajout d'une impédance entre deux nœuds existants

Supposons que l'on ajoute une impédance Z_b entre deux nœuds existants k et j comme le montre la figure.

En conséquence, la tension du nœud i sera :

$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \dots + Z_{ij}(I_j + I_b) + Z_{ik}(I_k - I_b) + \dots + Z_{in}I_n$$

D'où :

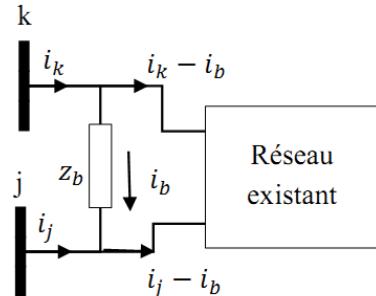


Figure IV-9 : Ajout d'une impédance

$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \dots + Z_{ij}I_j + Z_{ik}I_k + \dots + Z_{in}I_n + (Z_{ij} - Z_{ik})I_b \quad (\text{IV-8})$$

$$\begin{cases} V_j = Z_{j1}I_1 + Z_{j2}I_2 + \dots + Z_{jj}I_j + Z_{jk}I_k + \dots + Z_{jn}I_n + (Z_{jj} - Z_{jk})I_b \\ V_k = Z_{k1}I_1 + Z_{k2}I_2 + \dots + Z_{kj}I_j + Z_{kk}I_k + \dots + Z_{kn}I_n + (Z_{kj} - Z_{kk})I_b \end{cases}$$

Nous allons maintenant devoir éliminer I_b des équations ci-dessus. Pour ce faire, nous notons que :

$$V_k - V_j = z_b I_b \Rightarrow 0 = z_b I_b - V_k + V_j \quad (\text{IV-9})$$

On remplace les tension V_k et V_j on aura :

$$0 = z_b I_b + (Z_{j1} - Z_{k1})I_1 + \dots + (Z_{jn} - Z_{kn})I_n + (Z_{jj} + Z_{kk} - Z_{jk} - Z_{kj})I_b \quad (\text{IV-10})$$

Nous pouvons alors écrire les relations :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1j} - Z_{1k} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2j} - Z_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{j1} - Z_{k1} & Z_{j2} - Z_{2k} & \dots & Z_b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_b \end{bmatrix} \quad (\text{IV-11})$$

Avec : $Z_b = z_b + Z_{jj} + Z_{kk} - Z_{jk} - Z_{kj}$ (IV-12)

Après cette étape il faut procéder à l'élimination de la dernière ligne et colonne avec la technique de Kron's.

Réduction de Kron's

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} \quad (\text{IV-13})$$

IV.6- Thevenin impédance

Pour établir des relations entre les éléments de la matrice Z_{bus} et l'équivalent de Thevenin, considérons l'exemple d'un réseau à deux nœuds.

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{11}} + \frac{1}{z_{12}} & -\frac{1}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{1}{z_{22}} + \frac{1}{z_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11} + z_{12}}{z_{11} \cdot z_{12}} & -\frac{1}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{22} + z_{12}}{z_{22} \cdot z_{12}} \end{bmatrix}$$

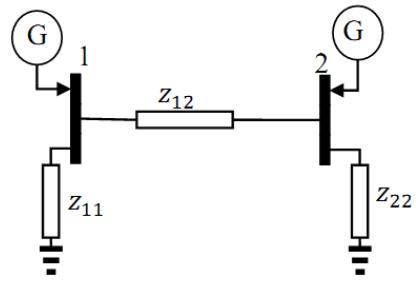


Figure IV-10 : Réseau deux nœuds

Le déterminant

$$|Y_{bus}| = \frac{1}{z_{11}} \cdot \frac{1}{z_{22}} + \frac{1}{z_{11}} \cdot \frac{1}{z_{12}} + \frac{1}{z_{12}} \cdot \frac{1}{z_{22}} = \frac{z_{11} + z_{12} + z_{22}}{z_{11} \cdot z_{12} \cdot z_{22}}$$

La matrice d'impédance

$$Z_{bus} = \frac{1}{|Y_{bus}|} \begin{bmatrix} \frac{z_{22} + z_{12}}{z_{22} \cdot z_{12}} & -\frac{1}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11} + z_{12}}{z_{11} \cdot z_{12}} \end{bmatrix}$$

$$Z_{bus} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}(z_{22} + z_{12})}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} & \frac{z_{11} \cdot z_{22}}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} \\ \frac{z_{11} \cdot z_{22}}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} & \frac{z_{22}(z_{11} + z_{12})}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-14})$$

Considérons maintenant le système de la figure. L'impédance de Thevenin de regarder dans le système au nœud 1 est la combinaison parallèle de Z_{11} et de $Z_{12} + Z_{22}$, c.-à-d.

$$Z_{th-1} = \frac{z_{11}(z_{22} + z_{12})}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} = Z_{11} \quad (\text{IV-15})$$

De même, l'impédance de Thevenin obtenue en examinant le système au niveau du nœud b est la combinaison parallèle de Z_{22} et $Z_{11} + Z_{12}$, c'est-à-dire,

$$Z_{th-2} = \frac{z_{22}(z_{11} + z_{12})}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} = Z_{22} \quad (\text{IV-16})$$

D'où les impédances de point de conduite des deux nœuds sont leurs impédances de Thevenin.

Considérons maintenant l'impédance de Thevenin en regardant le système entre les nœuds 1 et 2, il est évident que cette impédance de Thevenin est la combinaison parallèle de Z_{12} et $Z_{11} + Z_{22}$, c'est-à-dire,

$$Z_{th-12} = \frac{z_{12}(z_{11} + z_{22})}{z_{11} + z_{12} + z_{22}} \quad (\text{IV-17})$$

On peut écrire

$$Z_{th-12} = \frac{z_{11}(z_{22} + z_{12}) + z_{22}(z_{11} + z_{12}) - 2z_{11}z_{22}}{z_{11} + z_{12} + z_{22}}$$

$$Z_{th-12} = Z_{11} + Z_{22} - 2Z_{12} \quad (\text{IV-18})$$

IV.7- Méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode dérivant de la méthode itérative de Gauss utilisant la matrice admittance consiste à supposer initialement les tensions pour tous les nœuds excepté le nœud balancier où la tension est spécifiée et maintenue constante.

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2 + \dots + Y_{1n} \cdot V_n \\ I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2 + \dots + Y_{2n} \cdot V_n \\ \dots \\ I_n = Y_{n1} \cdot V_1 + Y_{n2} \cdot V_2 + \dots + Y_{nn} \cdot V_n \end{cases} \quad (\text{IV-19})$$

D'où :

$$\begin{cases} V_1 = (I_1 + Y_{12} \cdot V_2 + \dots + Y_{1n} \cdot V_n) / Y_{11} \\ V_2 = (I_2 + Y_{21} \cdot V_1 + \dots + Y_{2n} \cdot V_n) / Y_{22} \\ \dots \\ V_n = (I_n + Y_{n1} \cdot V_1 + \dots + Y_{nn} \cdot V_n) / Y_{nn} \end{cases} \quad (\text{IV-20})$$

La solution du système d'équation avec la méthode itérative de Gauss :

$$\begin{cases} V_1^{(t+1)} = \frac{I_1^{(t)} + Y_{12} \cdot V_2^{(t)} + \dots + Y_{1n} \cdot V_n^{(t)}}{Y_{11}} \\ V_2^{(t+1)} = \frac{I_2^{(t)} + Y_{21} \cdot V_1^{(t)} + \dots + Y_{2n} \cdot V_n^{(t)}}{Y_{22}} \\ \dots \\ V_n^{(t+1)} = \frac{I_n^{(t)} + Y_{n1} \cdot V_1^{(t)} + \dots + Y_{nn} \cdot V_n^{(t)}}{Y_{nn}} \end{cases}$$

$$V_k^{(t+1)} = \left(I_k^{(t)} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N Y_{km} V_m^{(t)} \right) / Y_{kk} \quad (\text{IV-21})$$

Avec « t+1 » est le nombre d'itération.

La puissance apparente au nœud « k » s'exprime comme suit : $S_k = V_k I_k^* \Rightarrow I_k = \frac{S_k}{V_k^*}$

Cette dernière équation est la base du calcul itératif.

$$V_k^{(t+1)} = \left(\frac{P_k - iQ_k}{V_k^{*(t)}} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} V_m^{(t)} \right) / Y_{kk} \quad (\text{IV-22})$$

Cette équation, ne concerne pas les nœuds de production où les données sont P et $|V|$;

$$P_k + iQ_k = V_k \times I_k^* = V_k \times \left(Y_{kk} \times V_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} \times V_m \right)^* \quad (\text{IV-23})$$

Donc :

$$P_k - iQ_k = V_k^* \times \left(Y_{kk} \times V_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} \times V_k \right) \quad (\text{IV-24})$$

Pour un nœud de production, La puissance réactive Q doit être calculée d'après l'équation :

$$Q_k^{(t+1)} = -\text{Imag} \left[V_k^{*(t)} \times \left(Y_{kk} \times V_k^{(t)} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n Y_{km} \cdot V_m^{(t)} \right) \right] \quad (\text{IV-25})$$

Facteur d'accélération

Si le ΔV entre les itérations n'est pas assez petit, il est multiplié par un facteur numérique α pour augmenter sa valeur ; α est appelé facteur d'accélération. $0 < \alpha < 2$

Une valeur de $\alpha < 1$ est appelée constante de décélération.

IV.8- Méthode de Newton Raphson

Soit le réseau présenté à la figure :



Figure IV-12 : Capacité ligne triphasé (n Cph)

La puissance apparente au nœud « k » s'exprime comme suit :

$$S_k = V_k \times I_k^* = V_k \times \left(\sum_{m=1}^n Y_{km} \times V_m \right)^* \quad (\text{IV-26})$$

$P_k = \text{real}\{S_k\}$ et $Q_k = \text{imag}\{S_k\}$

Le potentiel au nœud peut s'écrire de la manière suivante :

$$V_k = e_k + i f_k = E_k \angle \varphi_k \quad (\text{IV-27})$$

L'admittance de la branche « km » sera exprimée comme suit :

$$Y_{km} = G_{km} + iB_{km} = |Y_{km}| \angle \varphi_{km} \quad (\text{IV-28})$$

IV.8.A- Méthode de Newton Raphson avec les cordonnées rectangulaires

$$\begin{aligned} S_k &= (e_k + i f_k) \times \left(\sum_{m=1}^n (G_{km} + iB_{km}) \times (e_m + i f_m) \right)^* \\ S_k &= (e_k + i f_k) \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m) - i(G_{km} \times f_m + B_{km} \times e_m) \\ P_k &= e_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m) + f_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times f_m + B_{km} \times e_m) \end{aligned} \quad (\text{IV-29})$$

$$Q_k = e_k \times \sum_{m=1}^n (-G_{km} \times f_m - B_{km} \times e_m) + f_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m) \quad (\text{IV-30})$$

L'erreur des nouvelles valeurs itératives avec les valeurs initiales sont calculées par :

$$\Delta P_k^{(t)} = P_k^{(t+1)} - P_k^{(t)} \quad (\text{IV-31})$$

$$\Delta Q_k^{(t)} = Q_k^{(t+1)} - Q_k^{(t)} \quad (\text{IV-32})$$

Avec les tensions de correction

$$\Delta e_k^{(t)} = e_k^{(t+1)} - e_k^{(t)} \quad (\text{IV-33})$$

$$\Delta f_k^{(t)} = f_k^{(t+1)} - f_k^{(t)} \quad (\text{IV-34})$$

Pour un nœud de production, l'équation de la puissance réactive est remplacée par une équation de tension.

$$|V_k|^2 = e_k^2 + f_k^2 \quad (\text{IV-35})$$

$$(\Delta V_k^{(t)})^2 = (V_k^{(t+1)})^2 - (V_k^{(t)})^2 \quad (\text{IV-36})$$

Indice « t » itération

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta P_1/\delta e_1 & \delta P_1/\delta f_1 & \delta P_1/\delta e_2 & \delta P_1/\delta f_2 & \dots & \dots & \delta P_1/\delta e_n & \delta P_1/\delta f_n \\ \delta Q_1/\delta e_1 & \delta Q_1/\delta f_1 & \delta Q_1/\delta e_2 & \delta Q_1/\delta f_2 & \dots & \dots & \delta Q_1/\delta e_n & \delta Q_1/\delta f_n \\ \delta P_2/\delta e_1 & \delta P_2/\delta f_1 & \delta P_2/\delta e_2 & \delta P_2/\delta f_2 & \dots & \dots & \delta P_2/\delta e_n & \delta P_2/\delta f_n \\ \delta Q_2/\delta e_1 & \delta Q_2/\delta f_1 & \delta Q_2/\delta e_2 & \delta Q_2/\delta f_2 & \dots & \dots & \delta Q_2/\delta e_n & \delta Q_2/\delta f_n \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \delta P_n/\delta e_1 & \delta P_n/\delta f_1 & \delta P_n/\delta e_2 & \delta P_n/\delta f_2 & \dots & \dots & \delta P_n/\delta e_n & \delta P_n/\delta f_n \\ \delta Q_n/\delta e_1 & \delta Q_n/\delta f_1 & \delta Q_n/\delta e_2 & \delta Q_n/\delta f_2 & \dots & \dots & \delta Q_n/\delta e_n & \delta Q_n/\delta f_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta f_1 \\ \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta e_n \\ \Delta f_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \dots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \dots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta P_1/\delta e_1 & \delta P_1/\delta e_2 & \dots & \delta P_1/\delta e_n & | & \delta P_1/\delta f_1 & \delta P_1/\delta f_2 & \dots & \delta P_1/\delta f_n \\ \delta P_2/\delta e_1 & \delta P_2/\delta e_2 & \dots & \delta P_2/\delta e_n & | & \delta P_2/\delta f_1 & \delta P_2/\delta f_2 & \dots & \delta P_2/\delta f_n \\ \delta P_3/\delta e_1 & \delta P_3/\delta e_2 & \dots & \delta P_3/\delta e_n & | & \delta P_3/\delta f_1 & \delta P_3/\delta f_2 & \dots & \delta P_3/\delta f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta P_n/\delta e_1 & \delta P_n/\delta e_2 & \dots & \delta P_n/\delta e_n & | & \delta P_n/\delta f_1 & \delta P_n/\delta f_2 & \dots & \delta P_n/\delta f_n \\ \delta Q_1/\delta e_1 & \delta Q_1/\delta e_2 & \dots & \delta Q_1/\delta e_n & | & \delta Q_1/\delta f_1 & \delta Q_1/\delta f_2 & \dots & \delta Q_1/\delta f_n \\ \delta Q_2/\delta e_1 & \delta Q_2/\delta e_2 & \dots & \delta Q_2/\delta e_n & | & \delta Q_2/\delta f_1 & \delta Q_2/\delta f_2 & \dots & \delta Q_2/\delta f_n \\ \delta Q_3/\delta e_1 & \delta Q_3/\delta e_2 & \dots & \delta Q_3/\delta e_n & | & \delta Q_3/\delta f_1 & \delta Q_3/\delta f_2 & \dots & \delta Q_3/\delta f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta Q_n/\delta e_1 & \delta Q_n/\delta e_2 & \dots & \delta Q_n/\delta e_n & | & \delta Q_n/\delta f_1 & \delta Q_n/\delta f_2 & \dots & \delta Q_n/\delta f_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \dots \\ \Delta e_n \\ \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \\ \dots \\ \Delta f_n \end{bmatrix}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_k \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_A & J_B \\ - & - \\ J_C & J_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta e_k \\ \Delta f_k \end{bmatrix} \quad (\text{IV-37})$$

[J] : Matrice Jacobien.

- Les éléments diagonaux

▪ Nœud de charge

$$JA = \frac{\delta P_k}{\delta e_k} = \frac{\delta [e_k \sum_{m=1}^n (G_{km} \cdot e_m - B_{km} \cdot f_m) + f_k \sum_{m=1}^n (G_{km} \cdot f_m + B_{km} \cdot e_m)]}{\delta e_k}$$

$$= \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m) + G_{kk} e_k + B_{kk} f_k$$

$$JB = \frac{\delta P_k}{\delta f_k} = \frac{\delta [e_k \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m) + f_k \sum_{m=1}^n (G_{km} f_m + B_{km} e_m)]}{\delta f_k}$$

$$= -B_{kk} e_k + G_{kk} f_k + \sum_{m=1}^n (G_{km} f_m + B_{km} e_m)$$

$$JC = \frac{\delta Q_k}{\delta e_k} = \frac{e_k \sum_{m=1}^n (-G_{km} f_m - B_{km} e_m) + f_k \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m)}{\delta e_k}$$

$$= -B_{kk} e_k + G_{kk} f_k + \sum_{m=1}^n (-G_{km} f_m - B_{km} e_m)$$

$$JD = \frac{\delta Q_k}{\delta f_k} = \frac{e_k \times \sum_{m=1}^n (-G_{km} f_m - B_{km} e_m) + f_k \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m)}{\delta f_k}$$

$$= -G_{kk} e_k - B_{kk} f_k + \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m)$$

- Pour les nœuds de productions

$$JC = \frac{\delta V_k^2}{\delta e_k} = \frac{\delta(e_k^2 + f_k^2)}{\delta e_k} = 2 \times e_k \quad ; \quad JD = \frac{\delta V_k^2}{\delta f_k} = \frac{\delta(e_k^2 + f_k^2)}{\delta f_k} = 2 \times f_k$$

- Les éléments non diagonaux

- Nœud de charge

$$JA = \frac{\delta P_k}{\delta e_l} = \frac{\delta [e_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m) + f_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times f_m + B_{km} \times e_m)]}{\delta e_l}$$

$$= G_{kl} \times e_k + B_{kl} \times f_k$$

$$JB = \frac{\delta P_k}{\delta f_l} = \frac{\delta [e_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m) + f_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times f_m + B_{km} \times e_m)]}{\delta f_l}$$

$$= -B_{kl} \times e_k + G_{kl} \times f_k$$

$$JC = \frac{\delta Q_k}{\delta e_l} = \frac{e_k \times \sum_{m=1}^n (-G_{km} \times f_m - B_{km} \times e_m) + f_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m)}{\delta e_l}$$

$$= -B_{kl} \times e_k + G_{kl} \times f_k$$

$$JD = \frac{\delta Q_k}{\delta f_l} = \frac{e_k \times \sum_{m=1}^n (-G_{km} \times f_m - B_{km} \times e_m) + f_k \times \sum_{m=1}^n (G_{km} \times e_m - B_{km} \times f_m)}{\delta f_l}$$

$$= -G_{kl} \times e_k - B_{kl} \times f_k$$

- Pour les nœuds de productions

$$JC = \frac{\delta V_k^2}{\delta e_l} = 0 \quad ; \quad JD = \frac{\delta V_k^2}{\delta f_l} = 0$$

À retenir

Les bases de calcul de la méthode de Newton Raphson sont :

Nœud de production :	$\Delta P; \Delta V$
Nœud de Nœud de Charge :	$\Delta P; \Delta Q$

IV.8.B- Méthode de Newton Raphson avec les cordonnees polaires

L'équation de puissance est la même que celle d'équation (IV-26), qui est reproduite ci-dessous :

$$S_k = V_k \times \left(\sum_{m=1}^n Y_{km} \times V_m \right)^* = |V_k| \angle \theta_k \times \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \angle (-\alpha_{km}) \times |V_m| \angle (-\theta_m)$$

D'où $P_k = |V_k| \times \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \times |V_m| \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})$ (IV-38)

$$Q_k = |V_k| \times \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \times |V_m| \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})$$
 (IV-39)

De la même façon de calcule d'erreur avec les coordonnées rectangulaires

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \dots \\ \Delta P_n \\ \hline \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \dots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta P_1/\delta\theta_1 & \delta P_1/\delta\theta_2 & \dots & \delta P_1/\delta\theta_n & \delta P_1/\delta V_1 & \delta P_1/\delta V_2 & \dots & \delta P_1/\delta V_n \\ \delta P_2/\delta\theta_1 & \delta P_2/\delta\theta_2 & \dots & \delta P_2/\delta\theta_n & \delta P_2/\delta V_1 & \delta P_2/\delta V_2 & \dots & \delta P_2/\delta V_n \\ \delta P_3/\delta\theta_1 & \delta P_3/\delta\theta_2 & \dots & \delta P_3/\delta\theta_n & \delta P_3/\delta V_1 & \delta P_3/\delta V_2 & \dots & \delta P_3/\delta V_n \\ \dots & \dots \\ \delta P_n/\delta\theta_1 & \delta P_n/\delta\theta_2 & \dots & \delta P_n/\delta\theta_n & \delta P_n/\delta V_1 & \delta P_n/\delta V_2 & \dots & \delta P_n/\delta V_n \\ \hline \delta Q_1/\delta\theta_1 & \delta Q_1/\delta\theta_2 & \dots & \delta Q_1/\delta\theta_n & \delta Q_1/\delta V_1 & \delta Q_1/\delta V_2 & \dots & \delta Q_1/\delta V_n \\ \delta Q_2/\delta\theta_1 & \delta Q_2/\delta\theta_2 & \dots & \delta Q_2/\delta\theta_n & \delta Q_2/\delta V_1 & \delta Q_2/\delta V_2 & \dots & \delta Q_2/\delta V_n \\ \delta Q_3/\delta\theta_1 & \delta Q_3/\delta\theta_2 & \dots & \delta Q_3/\delta\theta_n & \delta Q_3/\delta V_1 & \delta Q_3/\delta V_2 & \dots & \delta Q_3/\delta V_n \\ \dots & \dots \\ \delta Q_n/\delta\theta_1 & \delta Q_n/\delta\theta_2 & \dots & \delta Q_n/\delta\theta_n & \delta Q_n/\delta V_1 & \delta Q_n/\delta V_2 & \dots & \delta Q_n/\delta V_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \dots \\ \Delta\theta_n \\ \hline \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \dots \\ \Delta V_n \end{bmatrix}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_k \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ - & - \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \quad (\text{IV-40})$$

- Les éléments diagonaux

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\delta P_k}{\delta\theta_k} = \frac{\delta[|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta\theta_k} \\ &= -|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km}) + |V_k|^2 |Y_{kk}| \cdot \sin(-\alpha_{kk}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{\delta P_k}{\delta V_k} = \frac{\delta[|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta V_k} \\ &= |Y_{kk}| \cdot |V_k| \cdot \cos(-\alpha_{kk}) + \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{\delta Q_k}{\delta\theta_k} = \frac{\delta[|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta\theta_k} \\ &= |V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km}) - |V_k|^2 |Y_{kk}| \cdot \cos(-\alpha_{kk}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{\delta Q_k}{\delta V_k} = \frac{\delta[|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta V_k} \\ &= |Y_{kk}| \cdot |V_k| \cdot \sin(-\alpha_{kk}) + \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km}) \end{aligned}$$

- Les éléments non diagonaux

$$J_l = \frac{\delta P_k}{\delta\theta_l} = \frac{\delta[|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta\theta_l} = |V_k| \cdot |Y_{kl}| \cdot |V_l| \cdot \sin(\theta_k - \theta_l - \alpha_{kl})$$

$$J_2 = \frac{\delta P_k}{\delta V_l} = \frac{\delta[|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \cos(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta V_l} = |V_k| \cdot |Y_{kl}| \cdot \cos(\theta_k - \theta_l - \alpha_{kl})$$

$$J_3 = \frac{\delta Q_k}{\delta \theta_l} = \frac{\delta [|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_{km})]}{\delta \theta_l} = -|V_k| \cdot |Y_{kl}| \cdot |V_l| \cdot \cos(\theta_k - \theta_l - \alpha_{kl})$$

$$J_4 = \frac{\delta Q_k}{\delta V_l} = \frac{\delta [|V_k| \cdot \sum_{m=1}^n |Y_{km}| \cdot |V_m| \cdot \sin(\theta_k - \theta_m - \alpha_k)]}{\delta V_l} = |V_k| \cdot |Y_{kl}| \cdot \sin(\theta_k - \theta_l - \alpha_{kl})$$

À retenir

Les bases de calcul de la méthode de Newton Raphson avec les cordonnees polaires sont :

Nœud de production :	$\Delta\theta$
Nœud de Nœud de Charge :	$\Delta\theta; \Delta V$

Source bibliographique : Cours A. Abdeslam: "Modélisation et simulation des réseaux électriques".