Chapitre 3 : Matrices et Déterminants

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires. Dans ce chapitre, K désigne un corps. On peut penser à Q, R ou C.

3.1 Matrices

1.1. Définitions

Définition 1.

- Une *matrice* A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Elle est dite de *taille* $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les *coefficients* de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{i,j}\right).$$

Exemple.

1) A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, matrice de taille ou type 3×2.
2) A= (-3) matrice de type 1×1.

Définition 2.

- Deux matrices sont ***égales*** lorsqu'elles ont la même taille et les même coefficients.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est noté $M_{n,p}$(K).

1.2 Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $n = p$ (nombre de lignes= nombre de colonnes), la matrice est dite ***matrice carrée d'ordre n***. On note M_n(K) au lieu de $M_{n,n}$(K).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \ddots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forment la ***diagonale principale*** de la matrice.

- La trace de A notée Tr(A)= $a_{11}+a_{12}+\dots+a_{1p}$ (la somme des éléments de la diagonale).

- *A est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.*

- *A est dite matice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$, (resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous(resp au dessus) de la diagonale sont nuls).*

- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée ***matrice ligne***. On la note $A = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1p})$.

- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée ***matrice colonne***. On la note

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

- La matrice (de taille $n{\times}p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la ***matrice nulle*** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

1.3 Addition de matrices

Définition 3 (Somme de deux matrices)**.**

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n{\times}p$ Leur ***somme*** $C = A + B$ est la matrice de taille $n{\times}p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple 2.

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.
2) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ alors A+B n'est pas définie.

Définition 4 (Produit d'une matrice par un scalaire)**.**

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathrm{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathrm{K}$, est la matrice notée αA dont les coefficients sont les $\boldsymbol{\alpha\, a_{ij}}$.

Exemple 3.

1) Pour $A \in M_{n,p}(\mathrm{K})$: $1.A=A$, $0.A=0_{n\times p}$

2) $A=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $-2A=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$.

3) La matrice $(-1)A$ est l'*opposée* de A et est la matrice notée $-A$.

Proposition 1. $(M_{n,p}(\mathrm{K}),+,.)$ est un K-espace vectoriel, car :
Pour toutes matrices A, B et C de $M_{n,p}(\mathrm{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ on a :

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B.$
5. $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A.$
6. $(\alpha\beta).A = \alpha.(\beta A).$
7. $1.A=A.$

1.4 Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre delignes de B.

Définition 5 (Produit de deux matrices)**.**

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n\times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p\times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n\times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemple 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors AB=$\begin{pmatrix} 1-2+3 & 2+2+3 \\ 2-3+4 & 4+3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$.

Remarques

1. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 6.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A\neq 0$ et $B\neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Propriétés du produit de matrices

Le produit des matrices vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.

1. $A(BC) = (AB)C$: *associativité du produit,*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(B + C)A = BA + CA$: *distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. $A.0 = 0$ *et* $0.A = 0$.

La matrice identité

La matrice carrée suivante note I_n ou simplement I, s'appelle la ***matrice identité d'ordre n***:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élémentneutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 3.

1- *Si A est une matrice $n \times p$, alors :* $\boldsymbol{I_n \, . A = A}$ *et* $\boldsymbol{A \, . I_p = A}$.

2- *Si A est une matrice carrée de taille n×n, alors :* $\boldsymbol{A. \, I_n = I_n \, .A = A}$.

c.à.d. I_n est l'élément neutre par la loi de multiplication (produit) des matrices carrées.

1.6 La transposée d'une matrice carrée

La transposée de la matrice A est une matrice notée A^t définie par

$$A^t = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n},$$

autrement dit A^t c'est la matrice de type (p, n) obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a : $(A^t)^t = A$.

Exemple

$$(1) \;\; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.7 Inverse d'une matrice carrée

Soit A $\in M_n$ (K) (une matrice carrée d'ordre n). A est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$\mathbf{AB=I_n} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{BA=I_n}.$$

B est dite l'inverse de A et noté A^{-1}.

Exemple 11.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve a=1, b=$-\frac{2}{3}$, c=0, d=$\frac{1}{3}$ et donc $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1- *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*

2- *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :*

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

3- *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et*

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

2. Déterminants

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *une matrice dans* $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$*, on appelle déterminant de A le nombre réel donné par :* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$*. On le note* $det(A)$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

Exemple :

A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ alors det(A)=15+2=17.

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

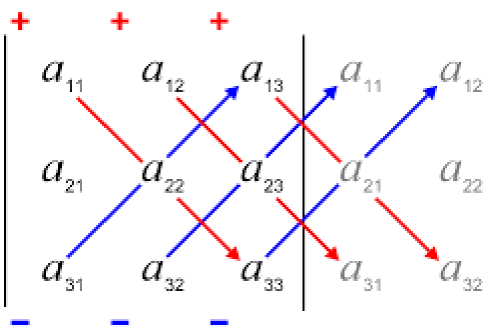
De même, on définit le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

Selon la première ligne par :

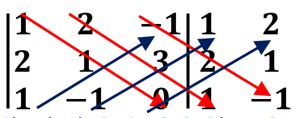
det(A)=$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{12}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{13}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{vmatrix}$.

Ou pratiquement en utilise la règle de **Sarrus** comme suite



Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, dete(A)= **1** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}$**-2**$\begin{vmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} - \boldsymbol{1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \end{vmatrix}$ **=3-(-6)-(-3)=12**



det(A)=(1.1.0+2.3.1+(-1).2.(-1))-(1.1.(-1)+(-1).3.1+0.2.2) = 8 – (-4)=12

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule selon la **troisième colonne** (contienne 2 zéros),

det(A)=-3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$=-3.(-3)= 9.

2.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

En général, si A=(a_{ij}) une matrice carrée d'ordre *n*, à coefficients réels alors le calcul (développement) du déterminant de A suivant la ligne *i* (Respectivement la colonne *j*) est donné par :

det(A)=$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}}\,(-\mathbf{1})^{i+j}\mathbf{det}(\boldsymbol{A_{i,j}})$ (Respectivement **det(A)=**$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{i,j}}\,(-\mathbf{1})^{i+j}\mathbf{det}(\boldsymbol{A_{i,j}})$) ou $A_{i,j}$ est la matrice obtenue de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Le terme $(-1)^{i+j}\det\left(A_{i,j}\right)$ est dit **cofacteur**, et $\det(A_{i,j})$ le **mineur** de $a_{i,j}$.

Remarques:

1- On peut developper (calculer) det(A) selon n'importe qu'elle ligne ou colonne de A, il vaut mieux choisir la ligne ou la colonne contenant le plus de **zéros**.
2- Si A=(a_{ij}) est une matrice triangulaire (ou diagonale) d'ordre *n*, alors : **det(A) =** $\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{ii}}$**.**
3- det(*A*)= det(^{t}A).
4- det(A) s'annule dans les cas suivants : une ligne nulle, deux ligne liées (en particulier égales), les lignes liées.
5- Même chose pour les colonnes.
6- A, B deux matrices carrées de même ordre alors : det(AB)=det(A).det(B) et **det (A^{-1}) =** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(A)}$.

Exemples.

1- det(A)=det$\begin{pmatrix} 13 & -42 & 50 \\ -85 & 57 & 11 \\ 13 & -42 & 50 \end{pmatrix}$=0, car L_1=L_3 .
2- det(A)=det$\begin{pmatrix} 13 & -42 & 0 \\ -85 & 57 & 0 \\ 13 & -42 & 0 \end{pmatrix}$=0, car C_3=0.
3- det(A)=det$\begin{pmatrix} 13 & -42 & 50 \\ -85 & 57 & 11 \\ 850 & -570 & -110 \end{pmatrix}$=0, car L_3=-10L_2
4- det(A)=det$\begin{pmatrix} 20 & -42 & 50 \\ 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$=20.10.50=10000.

2.3 <u>Calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant le déterminant</u>

1- <u>Inverse d'une matrice d'ordre 2</u>

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 9.
Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Exemple

A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, det(A)=17, alors la matrice inverse de A est :

$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{-1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$.

2- <u>Inverse d'une Matrice d'ordre 3.</u>

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle cofacteur d'indice i et j de A le scalaire

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}.$$

Avec A_{ij} est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i t la colonne j.
La matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice C^t est appellée la comatrice de A.

Theorem 2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t.$$

Où C^t est la comatrice de A.

Exemple : Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant det(A)=2.

la matrice est C=$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, la co-matrice de A est

C^t=$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et donc la matrice inverse de A est :

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

2.4 Rang d'une matrice.

Soit $A \in M_{n,p}(K)$, on appelle rang de A et on note *rg(A)*, le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) de A linéairement indépendantes.

C'est aussi l'ordre de la **plus grande** matrice carrée B **extraite** de A, tel que **det(B) non nul**.

- rg(A) ≤ n et rg(A) ≤ p donc ***rg(A)* ≤.min(n,p)**
- rg(A)=0 ⇔ A=0.

Remarque. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée alors $rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Exemples.

1- A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, rg(A)=3, car les lignes sont L.I. ou encore car det(A)=2 non nul.

2- A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, rg(A)≠3, car les 3 lignes sont liées (car deux de ces lignes L_1 et L_3 sont liées) et comme L_1 et L_2 sont libres alors $rg(A)$=2.

2.5 Application associée à une matrice.

Soit $A \in M_{n,p}(K)$, alors il existe une unique application linéaire de $f : K^p \to K^n$ tel que

$M_{B,B'}(f)$=A, ou B et B' sont respectivement les bases canoniques de K^p et K^n. On a pour tout

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p : f(x_1, x_2, \dots, x_p) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Exemple. A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(K)$, alors l'application associée à A est :

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : f(x_1, x_2, x_3) = A.(x_1, x_2, x_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

On peut écrire : $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_3, x_2, x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3)$.

2.6 Matrice des vecteurs.

Definition

Soit $V_1, V_2, \dots, V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on appelle déterminant des vecteurs $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ et on le note $det(V_1, V_2, \dots, V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$.

Exemple.

Soit $V_1 = (1,1,0), V_2 = (0,-1,1), V_3 = (0,0,1)$, alors

$$det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Proposition

Soit $V_1, V_2, \dots, V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow det(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$

Remarque. $v_1, v_2, \dots, v_n$ linéairement indépendants ⇔ $v_1, v_2, \dots, v_n$ forment une base de R^n

⇔ $det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$.

Exemples.

1- Dans l'exemple précédant les vecteurs v_1, v_2, v_3, forment une base de R^3 car $det(v_1, v_2, v_3) = -1 \neq 0$.

2- $v_1=(1,2,-1)$, $v_2=(2,4,-2)$,$v_3=(1,3,-4)$ sont liées (car $det(v_1, v_2, v_3)=0$ (puisque $v_2 = 2v_1$)) donc ne forment pas une base de R^3.

2.7 Les transformations élémentaires sur les lignes

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Remarque. Le déterminant d'une matrice carrée A, ne change pas si on applique la transformation 2 sur cette matrice.

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice *A* consiste à faire des **transformations élémentaires (T.E)** sur les lignes de la matrice *A* jusqu'à la transformer en la matrice **identité** I_n. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I_n.

$$\mathbf{A \,|\, I_n + T.E = I_n \,|\, A^{-1}}$$

Exemple 10

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$$