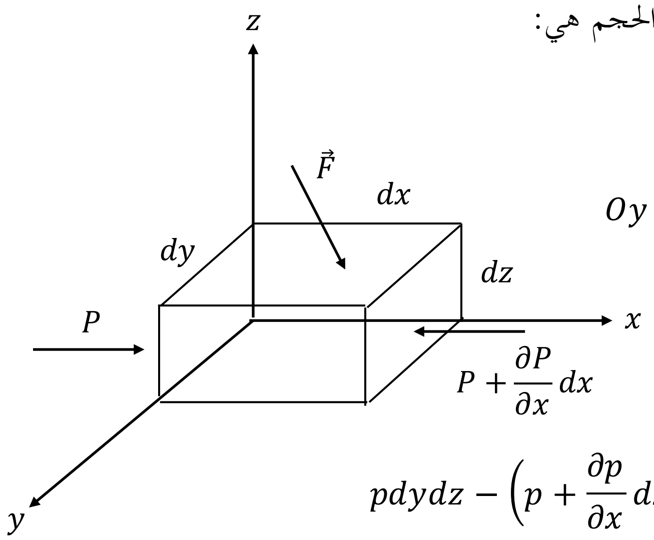
الفصل الثاني: سكون الموائـــع

سكون الموائع (Statique des fluides): سكون الموائع هو العلم الذي يدرس شروط توازن المائع في حالة سكون بدلالة القوى المؤثرة عليه. و بما أنّ اللّزوجة لا تظهر إلاّ إذا كانت هناك حركة لجزيئات المائع، فإنّ دراسة سكون الموائع اللزجة (أو الحقيقية) تنطبق مع سكون الموائع المثالية.

المعادلات الأساسية لسكون الموائع:

Equations fondamentales de la statique des fluides

ليكن حجم عنصري من مائع (كتلته الحجمية ρ) على شكل متوازي سطوح أبعاده dx، dy و dz في حالة سكون بالنسبة لمعلم $R(O,x,y,z)$. القوى المؤثرة على هذا الحجم هي:



- القوى الحجمية $\vec{F}$: ثقالية، مغناطيسية، كهربائية ......
- القوى السطحية: الضغط

لتكن (F_x, F_y, F_z) مركبات القوة المحصلة $\vec{F}$ وفق المحاور Ox ، Oy و Oz على التوالي. $\vec{F}$ القوة في وحدة الكتلة.

الحجم العنصري في حالة توازن، و عليه يكون:

- وفق المحور Ox:

$$pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz + F_x(\rho dxdydz) = 0$$

بعد التبسيط نجد:

$$\boxed{F_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}$$

بنفس طريقة البرهان وفق المحورين Oy و Oz نجد المعادلتين:

$$\boxed{F_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad et \qquad F_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}$$

و منه تكون المعادلات هي :

$$\boxed{\begin{array}{l} F_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \\ F_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad\qquad (1) \\ \\ F_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{array}}$$

يمكن كتابة هذه المعادلات بطريقة شعاعية، و هذا بضرب طرفي كل معادلة بأشعة الوحدة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ و الجمع لنجد:

$$F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\imath} + F_j\vec{\imath} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{\imath})$$

القانون الأساسي لتوازن الموائع (Relation fondamentale de la statique des fluides):

بضرب المعادلات (1) على التوالي بـ dx، dy و dz و الجمع نجد:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dP : \ l'équation\ diferentielle\ totale\ de\ la\ fonction\ P$$

و هي المعادلة التفاضلية الكلية للدالة p.

$$\Rightarrow \boxed{F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{1}{\rho}dP} \ \ldots.(2)$$

3. القانون الأساسي لتوازن مائع غير انضغاطي في حقل الجاذبية

(Statique d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur)

في هذه الحالة تكون قوى الجاذبية هي الوحيدة المؤثرة على المائع، بمعنى: $F_x = 0$ ، $F_y = 0$ و $F_z = -g$، و منه تصبح المعادلة (2) كما يلي:

$$-gdz = \frac{1}{\rho}dP \ \Rightarrow \ \boxed{dp = -\rho gdz} \ \ldots.(3)$$

و هو القانون الأساسي لتوازن الموائع في صيغته التفاضلية.

من أجل مائع غير انضغاطي $(\rho = Cte)$ تصبح المعادلة (3):

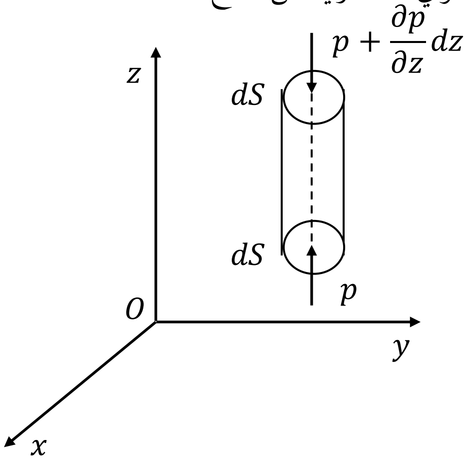
$$dp = -\rho gdz \Rightarrow \int dP = \int -\rho gdz$$

$$P = -\rho gz + Cte \Rightarrow \boxed{P + \rho gz = Cte} \ \ldots..(4)$$

تمثل هذه المعادلة القانون الأساسي لتوازن الموائع.

القانون الأساسي لتوازن مائع غير انضغاطي:

يمكن استنتاج معادلة القانون الأساسي لتوازن الموائع بدراسة توازن حجم اسطواني عنصري من مائع مساحة مقطعه dS و ارتفاعه $.dz$



القوى المؤثرة على الحجم العنصري هي:

- تقل الحجم العنصري $\vec{p}$ ذو الكتلة dm و القيمة $.p = dm.g = \rho g dS g$
- $\overrightarrow{F_1}$ و $\overrightarrow{F_2}$ القوى الضاغطة عند M_1 و M_2 .

الحجم الاسطواني في حالة توازن:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \vec{0}$$

بالإسقاط على المحور Oz نجد:

$$pdS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) dS - (\rho dV)g = 0$$

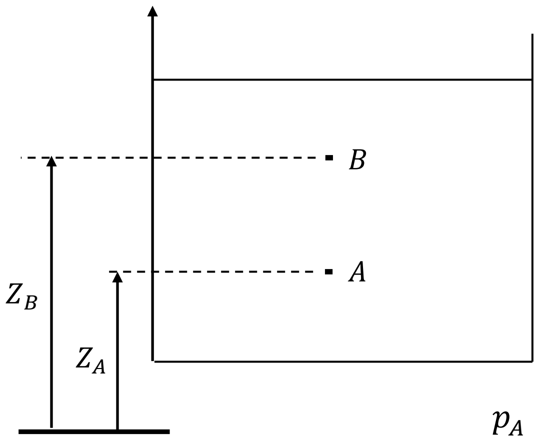
$$pdS - pdS - \frac{\partial p}{\partial z} dS.dz - \rho g.dS.dz = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0$$

$$-\frac{dp}{dz} = \rho g \Rightarrow \boxed{dp = -\rho g dz} \dots.(3)$$

نتائج القانون الأساسي لتوازن الموائع

1) حساب الضغط في نقطة من مائع



بمكاملة المعادلة (3) بين النقطتين A و B نجد:

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = -\rho g \int_{Z_A}^{Z_B} dz$$

$$p_B - p_A = -\rho g(Z_B - Z_A)$$

$$p_A - p_B = \rho g h \Rightarrow \boxed{p_A = \rho g h + p_B}$$

ط2) $p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B \Rightarrow p_A = p_B + \rho g(z_B - z_A)$

$$donc: \boxed{p_A = p_B + \rho g h}$$

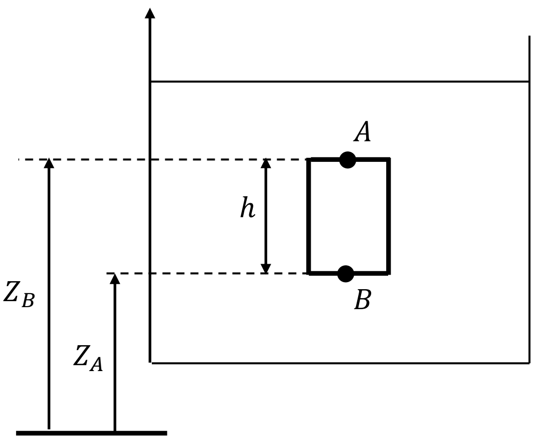
نتيجة 1: يمكن حساب الضغط في نقطة A، إذا عُرف الضغط في نقطة أخرى B و كذلك الارتفاع h بينهما حيث:

$$\boxed{p_A = \rho g h + p_B}$$

ملاحظة : لدينا: $p_A = p_B + \rho g h \Rightarrow \boxed{p_A - p_B = \rho g h}$، إذن:

فرق الضغط $p_A - p_B$ بين نقطتين A و B داخل مائع لا يتعلق إلا بالارتفاع الشاقولي بين النقطتين، و هو يساوي ثقل (وزن) عمود المائع، الذي قاعدته وحدة المساحة و ارتفاعه البعد الشاقولي h بين النقطتين.

« La différence de pression $(p_A - p_B)$ entre deux points quelconques A et B pris à l'intérieur du fluide ne dépend que de la distance verticale entre les deux points. Elle égale au poids d'une colonne de fluide ayant comme base l'unité de surface et comme hauteur la différence de niveau entre les deux points. »



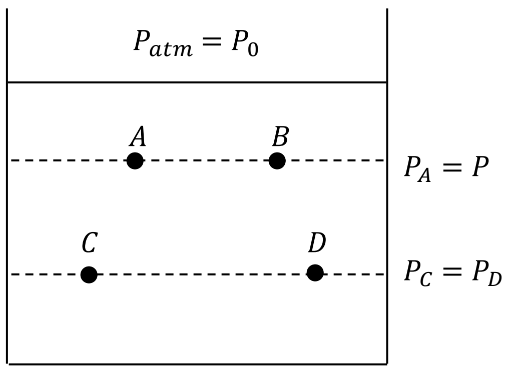
2) **السطوح المتساوية الضغط** (Les Surfaces Isobares) :

السطوح المتساوية الضغط في مائع متجانس، غير انضغاطي هي سطوح (مستويات) أفقية.

Les surfaces d'égales pressions (isobares) dans un fluide homogène incompressible, sont des plans horizontaux.

البرهان:

$$quand \quad p = Cte \Rightarrow dp = -\rho g dz = 0$$
$$\Rightarrow z = Cte$$



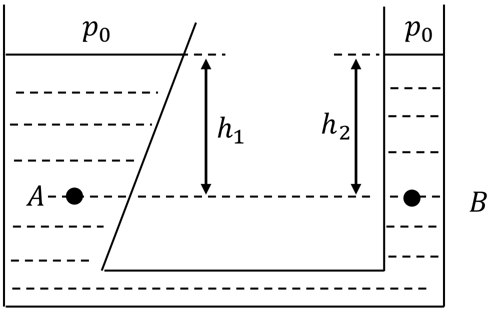
ملاحظة: السطح الحر للسائل هو مستوي أفقي، حيث الضغط يساوي الضغط الخارجي $p = p_{atm} = p_0$.

3. مبدأ الأوعية المتصلة (Principe des vases communicants) :

#إذا كان لدينا إنائين (وعائين) متصلين ببعضهما يحتويان على نفس السائل، في حالة التوازن (السكون) فإن السطحين الحرين يقعان في نفس المستوي الأفقي.# (لأنهما يخضعان لنفس الضغط الخارجي p_{atm})

Si deux vases de forme quelconque communiquent entre eux, contiennent un même liquide au repos, les surfaces libres sont dans un même plan horizontal, puisqu'elles sont soumises à la même pression atmosphérique p_0.

البرهان: نبرهن أنّ $h_1 = h_2$.



نأخذ نقطتين A و B تقعان في نفس المستوى الأفقي

$$p_A = p_B$$

$$p_A = \rho g h_1 + p_0$$

$$p_B = \rho g h_2 + p_0$$

$$p_A = p_B \Rightarrow \rho g h_1 + p_0 = \rho g h_2 + p_0$$
$$h_1 = h_2$$

نتيجة: السطحين الحرين يقعان في نفس المستوي الأفقي.

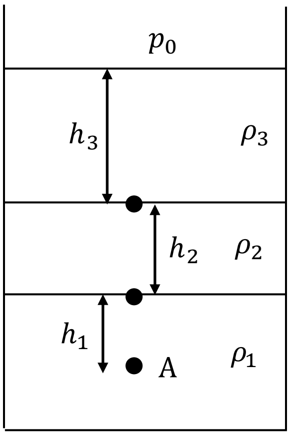
4. يتناقص الضغط p بزيادة الارتفاع z (المقدارين من إشارتين مختلفتين) $dp = -\rho g dz$.

5. السطح الفاصل بين سائلين مختلفين في الكثافة هو مستوي أفقي.

Si nous avons deux fluides différents, de densités différentes, non miscibles, la surface de séparation est un plan horizontal. Ceci est nécessaire

ملاحظة:

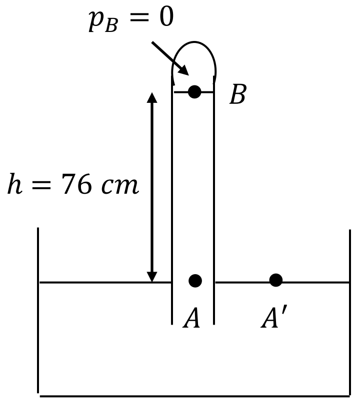
في حالة إناء يحتوي على سوائل مختلفة الكثافة (ρ_1، ρ_2، ρ_3، ......) (أنظر الحالة الموضحة في الشكل)، في هذه الحالة يكون:



$$\boxed{p_A = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 + p_0}$$

قياس الضغط الجوي بالبارومتر الزئبقي (Mesure de la pression au baromètre à mercure) :

البارومتر الزئبقي هو جهاز يسمح بقياس الضغط الجوي. يتكون من أنبوب طوله حوالي $80\ cm$ .....



نلاحظ أنّ الزئبق ينخفض في الأنبوب حتى ارتفاع يوافق الضغط الجوي الخارجي.

الضغط عند النقطة A من الزئبق هو نفسه الضغط الجوي الخارجي $P_{atm} = P_0$.

$$p_{A'} = p_{atm} = p_A$$

$$p_A = p_B + \rho_{Hg} g h = \rho_{Hg} g h$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{atm} = \rho_{Hg} g h}$$

حيث $\rho_{Hg} = 13590\ kg/m^3$، $g = 9.81\ m/s^2$ و $h = 0.76\ m$ (انطلاقا من التجارب) و منه نجد:

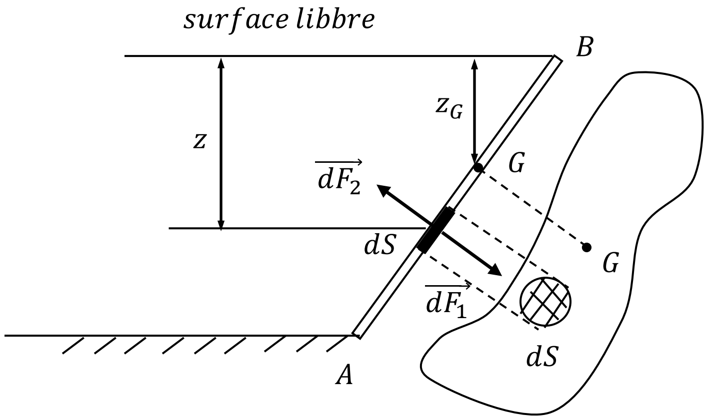
$$\boxed{p_{atm} = 1.013 \times 10^5\ Pa}$$

ملاحظة: (من الممكن) يمكن استبدال الزئبق بسائل آخر، غير أن الزئبق يُعطينا الارتفاع الأقل في درجة حرارة المخبر (Température ambiante). في حالة الماء مثلا، نتحصل على ارتفاع h' أكبر:

$$\rho_{Hg} g h = \rho_e g h' \Rightarrow h' = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_e}.h = \frac{13590}{1000} \times 0.76 = 10.31\ m$$

القوى الضاغطة على سطح مستوي (Les de pression sur une surface plane):

الهدف: تحديد القوة الضاغطة المطبقة من طرف السائل على سطح مستوي $S_{AB} = S$.



ليكن جزء عنصري dS من السطح المستوي S_{AB}، يقع على عمق z من السطح الحر للسائل.

القوى المؤثرة على dS هي: dF_1 الناتجة عن ضغط السائل و dF_2 الناتجة عن الضغط الجوي الخارجي.

$$dF_1 = (\rho g z + p_0) dS$$

$$dF_2 = p_0 dS$$

و تكون القوة المحصلة:

$$dF = dF_1 - dF_2 = (\rho g z + p_0) dS - p_0 dS$$

$$\Rightarrow dF = \rho g z dS$$

$$\Rightarrow F = \int_{S_{AB}} dF = \int_{S_{AB}} \rho g z dS$$

$$donc: \boxed{F = \rho g \int_{S_{AB}} z dS}$$

حساب التكامل $\int_{S_{AB}} zdS$ مماثل للتكامل الذي يسمح بتحديد موضع مركز الجاذبية لسطح مستوي، إذن:

$$\int_{(S)} zdS = z_{\boldsymbol{G}}.S$$

حيث z_G عمق مركز الجاذبية للسطح S، و منه يكون:

$$\boxed{F = \rho g S z_G}$$

القوة المطبقة من طرف سائل في حالة سكون على عنصر dS من السطح تكون عمودية على dS، موجهة من داخل السائل نحوالسطح، و شدتها $dF = p.dS$، حيث p ضغط السائل في مركز العنصر dS.

$$d\vec{F} = pdS.\vec{n}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = \int pdS.\vec{n}}$$

p الضغط النسبي أو الفعّال.