الفصل الثالث: حركية الموائع و ممتد التشوه

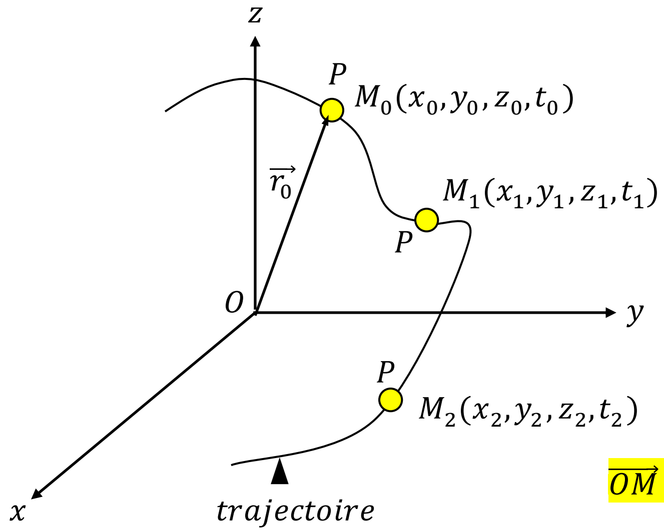
حركية الموائع تتعلق بدراسة حركة الموائع بدون الأخذ بعين الاعتبار للقوى (المسببة) التي أدت للحركة.

وصف $Lagrange$ و $Euler$ لحركة مائع:

la description Lagrangienne et Eulérienne du mouvement de fluide

توجد طريقتين لوصف حركة المائع، بالنسبة لمرجع (R) ثابت مبدأه O.

أ) وصف $Lagrange$ للحركة:



ليكن عنصر مائع P $(particule\ de\ fluide)$ متموضع عند $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عند اللحظة t_0.

في وصف $Lagrange$ نتبع حركة عنصر المائع الذي يكون عند الموضع $M_1(x_1,y_1,z_1)$ في اللحظة t_1 و في $M_2(x_2,y_2,z_2)$ في اللحظة t_2.

و عليه يمكن وصف الحركة بالمعادلة:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r_P}(t)$$

و منه يمكن تعريف السرعة اللحظية لعنصر المائع P في لحظة ما:

$$\overrightarrow{v_P}(t) = \frac{d\overrightarrow{r_p}}{dt}$$

و التسارع اللحظي بالعبارة:

$$\overrightarrow{a_P}(t) = \frac{d\overrightarrow{v_p}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{r_P}}{dt^2}$$

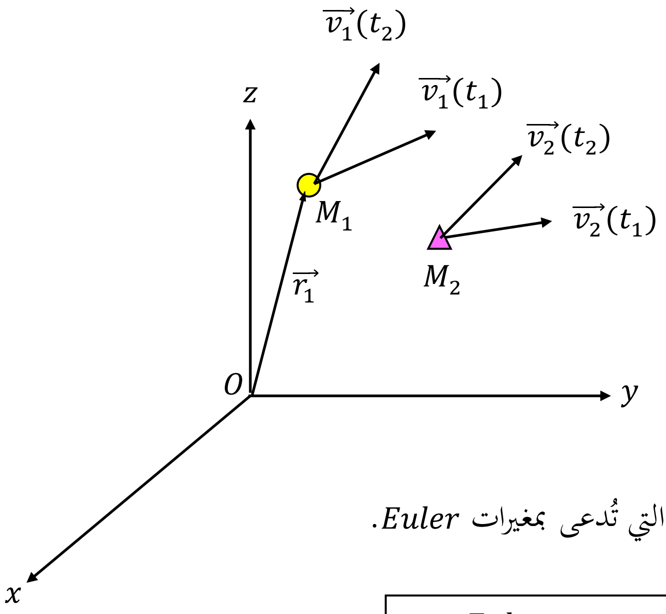
المتغيرات (x_0,y_0,z_0) و t تمثل متغيرات $Lagrange$.

المسار $(trajectoirte)$: يُعرف مسار عنصر المائع P على أنّه مجموعة المواضع التي يشغلها المتحرك خلال الزمن t. يمكن تحديد مسار عنصر المائع بمعرفة القانون $\overrightarrow{r_P}(t)$ و الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

تنويه: عمليا وصف $Lagrange$ لم يُستخدم أبدا في ميكانيك الموائع، لأنّه يتطلب معرفة القانون $\overrightarrow{r_P}(t)$ لكل عنصر مائع.

ب) وصف $Euler$ للحركة:



في وصف $Euler$ نتموضع في نقطة ملاحظة M $(point\ d'observation)$ ثابتة في المعلم R،المحددة بالشعاع $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. تكون السرعة الموضعية $\vec{v}(M,t)$ للمائع في M عند اللحظة t بدلالة المتغيرات $\vec{r}$ و t.

مجموع السرعات الموضعية $\vec{v}(M,t)$، أو حقل السرعة، يسمح بوصف حركة المائع.

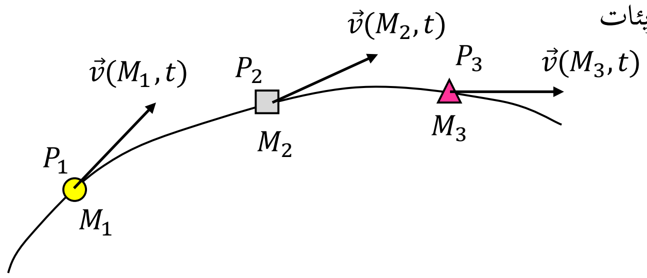
المتغيرات التي تسمح بوصف هذه الجملة هي المركبات الثلاثة للفضاء (تحدد الملاحظ)، و لحظة المشاهدة (x,y,z,t)، و التي تُدعى بمغيرات $Euler$.

	وصف $Lagrange$	وصف $Euler$
المتغيرات	(x_0,y_0,z_0,t)	(x,y,z,t)
المجاهيل	(x,y,z)	(u,v,w)

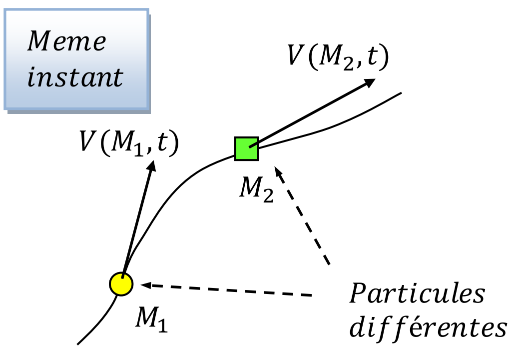
خط التيار $(Ligne\ de\ courant)$:

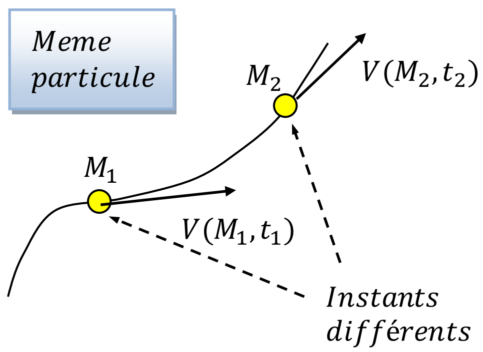
#خط التيار هو المنحنى المماسي في كل نقطة من نقاطه لشعاع السرعة في لحظة t (جزيئات المائع مختلفة و زمن ثابت).#

على الشكل مثلنا خط التيار المماسي لأشعة السرعة لجزيئات المائع P_1، P_2 و P_3 التي تتواجد في نفس اللحظة t في المواضع M_1، M_2 و M_3 على التوالي.



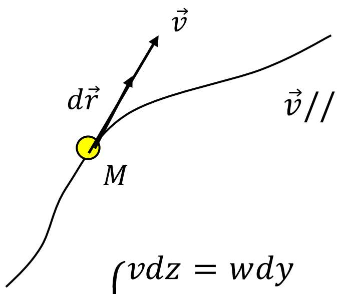
خط التيار و المسار :





المعادلات التفاضلية لخطوط التيار

إنّ شعاع السرعة $\vec{v}(u,v,w)$ مترابط خطيا مع شعاع الانتقال العنصري $d\vec{r}(dx,dy,dz)$ عند النقطة M من خط التيار، و منه:



$$\vec{v}//d\vec{r} \Rightarrow \vec{v}\wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & & \vec{k} \\ u & v & w \\ dx & & dz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

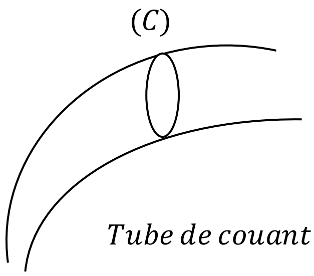
$$\Rightarrow \begin{cases} vdz = wdy \\ udz = wdx \\ udy = vdz \end{cases} \quad donc: \boxed{\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}}$$

و هي المعادلات التفاضلية لخطوط التيار في لحظة t ثابتة.

أنبوب التيار $(tube\ de\ courant)$:

مجموع خطوط التيار التي ترتكز على محيط مغلق (C) تشكل أنبوب تيار.

تنويه: إذا كانت مساحة مقطع الأنبوب صغيرة جدا، فإنّه يُدعى بخيط التيار $(filet\ de\ courant)$.



تسارع جزئية مائع:

لتكن جزيئة مائع التي نَتبع حركتها حيث تكون في الموضع $\vec{r_0}$ في اللحظة t_0 و في الموضع $\vec{r}$ في اللحظة t. و ليكن G مقدار فيزيائي (السرعة، الضغط، الكتلة الحجمية .....) المرافق (المرتبط) لعنصر المائع. نريد حساب مشتقة G بالنسبة للزمن. يُعرف تفاضل $G(x,y,z,t)$ كما يلي:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + u\frac{\partial G}{\partial x} + v\frac{\partial G}{\partial y} + w\frac{\partial G}{\partial z}$$

تسارع عنصر المائع الذي يمر بالنقطة $M(x,y,z)$ ، في اللحظة t هو الشعاع $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ الذي مركباته (a_x,a_y,a_z) حيث:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

تصنيف الانسيابات:

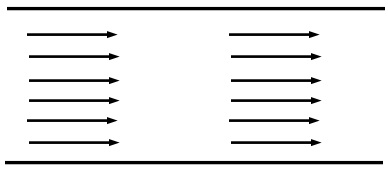
الانسياب المستقر ($\acute{e}coulement\ permanent\ ou\ stationnaire$):

نقول عن الانسياب أنّه دائم (أو مستقر) عندما تكون كل المقادير المميزة لحركة المائع (السرعة، الضغط، الكتلة الحجمية، درجة الحرارة ...) غير متغيرة مع الزمن.

$$\acute{e}coulement\ permanent \Leftrightarrow \frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0$$

الانسياب المنتظم ($\acute{e}coulement\ uniforme$):

نقول عن الانسياب أنّه منتظم إذا كان حقل السرعات في M لا يتعلق بموضع M في المائع: #سرعة جزيئات المائع هي نفسها في كل نقطة من الانسياب (نفس الاتجاه و الشدة).#



الانسياب اللادوراني ($\acute{e}coulement\ irrotationnel$):

نقول عن انسياب مائع أنّه لا دوراني إذا كان شعاع الدوران $\vec{\Omega}$ معدوم في كل نقاط المائع:

$$\forall\ M,\ \ \vec{\Omega}(M,t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0} \quad soit\ \ \overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0}$$

الانسياب الدوراني ($\acute{e}coulement\ rotationnel$):

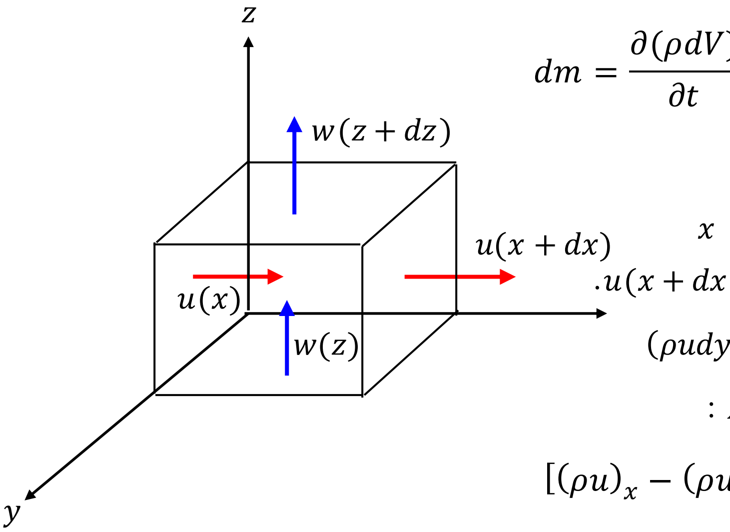
نقول عن انسياب مائع أنّه دوراني إذا كان إذا كان شعاع الدوران $\vec{\Omega}$ معدوم في نقاط ما من المائع:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{v} \neq \vec{0} \quad soit\ \ \overrightarrow{rot}\vec{v} \neq \vec{0}$$

معادلة الاستمرارية $(équation\ de\ continuité)$:

معادلة الاستمرارية تعبر عن مبدأ انحفاظ الكتلة.

ليكن عنصر حجمي ثابت من المائع: $dV = dxdydz$، كتلته ρdV. تغير هذه الكتلة خلال زمن dt هو:



$$dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t}dt = \frac{\partial \rho}{\partial t}dVdt$$

هذا التغير يجب أن يساوي مجموع كتل المائع التي تدخل و تخرج من الوجوه 6 للعنصر الحجمي dV.

وفق المحور X، المائع يدخل بالسرعة u_x و يخرج بالسرعة $u(x+dx)$.

و عليه تكون الكتلة الداخلة خلال زمن dt هي $(\rho udydzdt)_x$

و الخارجة $(\rho udydzdt)_{x+dx}$. و تكون الحصيلة وفق X :

$$[(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}]dydzdt$$

النشر من الدرجة الأولى نجد:

$$(\rho u)_{x+dx} = (\rho u)_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx$$

و منه يبقى:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx(dydzdt) = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dVdt$$

بنفس الطريقة وفق المحورين Y و Z نجد:

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dVdt \quad et \quad -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dVdt$$

و عليه تكون الحصيلة الكلية:

$$dm = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dVdt = \frac{\partial \rho}{\partial t}dVdt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) \ ou\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho\vec{v})$$

$$donc: \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0}$$

حالات خاصة:

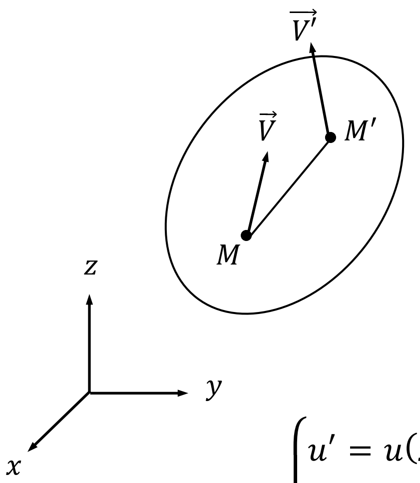
1) في حالة انسياب مستقر $(\partial/\partial t = 0)$ و منه تصبح معادلة الاستمرارية: $div(\rho\vec{v}) = 0$

2) من أجل مائع غير انضغاطي $(\rho(M,t) = Cte)$ تصبح معادلة الاستمرارية:

$$\boxed{div\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

تحليل حركة عنصر حجمي لمائع: ممتد التشوه

تتميز الموائع بخاصية أنها وسط مستمر قابل للتشوه، بمعنى أنّه خلال حركة كل عنصر حجمي من المائع فإنّه يخضع لتغيرات في الموضع، الاتجاه و الشكل و التي نريد تحديدها.



ليكن في اللحظة t عنصر حجمي من المائع يحيط بالنقطة $M(x,y,z)$ و $M'(x+h,y+k,z+l)$ نقطة مجاورة من نفس العنصر الحجمي.

لتكن $\vec{V}(u,v,w)$ السرعة عند M و $\vec{V'}(u',v',w')$ السرعة عند M'. البعد $\overrightarrow{MM'}$ صغير جدا ($infiniment\ petite$)، يمكن أن نكتب من أجل كل مركبة لـ $\vec{V'}$:

$$\begin{cases} u' = u(x+h,y+k,z+l) = u + h\dfrac{\partial u}{\partial x} + k\dfrac{\partial u}{\partial y} + l\dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] v' = v(x+h,y+k,z+l) = v + h\dfrac{\partial v}{\partial x} + k\dfrac{\partial v}{\partial y} + l\dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] w' = w(x+h,y+k,z+l) = w + h\dfrac{\partial w}{\partial x} + k\dfrac{\partial w}{\partial y} + l\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

و التي يمكن تحويلها للشكل التالي:

$$\begin{cases} u' = u + \dfrac{1}{2}\left[l\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - k\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + h\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{1}{2}l\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\[2ex] v' = v + \dfrac{1}{2}\left[h\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - l\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + k\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{1}{2}h\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{1}{2}l\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\[2ex] w' = w + \dfrac{1}{2}\left[k\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) - h\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + l\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{2}h\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \end{cases}$$

نضع:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\[2ex] q = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\[2ex] r = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases} \qquad soit:\ p_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

و هي مركبات الشعاع: $\vec{\Omega} = 1/2\overrightarrow{rot}\vec{v}$ (شعاع الاضطراب أو شعاع الدوران).

ونضع أيضا الكميات:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad soit\colon \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_x}\right)$$

مركبات الشعاع $\vec{V'}$ تكتب على الشكل التالي:

$$\begin{cases} u' = u + (ql - rk) + \varepsilon_{xx}h + \varepsilon_{xy}k + \varepsilon_{xz}l \\ v' = v + (rh - pl) + \varepsilon_{yx}h + \varepsilon_{yy}k + \varepsilon_{yz}l \\ w' = w + (pk - qh) + \varepsilon_{zx}h + \varepsilon_{zy}k + \varepsilon_{zz}l \end{cases}$$

أو بعبارة شعاعية:

$$\vec{V'}(M') = \vec{V}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} + \vec{D}$$

إذن السرعة $\vec{V'}$ عند النقطة M' هي نتيجة التركيب الهندسي ($composition\ géométrique$) لثلاثة سرعات:

أ) السرعة $\vec{V}$ عند M التي مركباتها: u، v، w، و هي توافق **انتقال** بالجملة ($translation\ en\ bloc$) للعنصر الحجمي.

ب) السرعة $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$ مركباتها:

$$\begin{cases} ql - rk \\ rh - pl \\ pk - qh \end{cases}$$

و هي توافق دوران بالجملة $(rotation\ en\ bloc)$ للعنصر الحجمي حول M، بالسرعة الزاوية $\vec{\Omega}$.

- الشعاع $\vec{\Omega} = 1/2\overrightarrow{rot}\vec{V}$ هو شعاع الاضطراب.

ج) السرعة $\overrightarrow{\ }$ ، مركباتها:

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{xx}h + \varepsilon_{xy}k + \varepsilon_{xz}l \\ D_y = \varepsilon_{yx}h + \varepsilon_{yy}k + \varepsilon_{yz}l \\ D_z = \varepsilon_{zx}h + \varepsilon_{zy}k + \varepsilon_{zz}l \end{cases}$$

يُدعى $\vec{D}$ بسرعة التشوه $(vitesse\ de\ déformation)$ و المقادير ε_{ij} بنسب التشوه $(les\ taux\ de\ déformations\ )$ للعنصر الحجمي.

- $\varepsilon_{ij}(i \neq j)$ نسب التشوه الخطي $(les\ taux\ de\ déformation\ linéaire)$.

- $\varepsilon_{ij}(i = j)$ نسب التشوه الزاوي $(les\ taux\ de\ déformation\ angulaire)$.

إذا كان $\bar{\bar{\varepsilon}}$ ممتد نسب التشوه:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

يمكن أن نكتب:

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\overrightarrow{MM'}$$

ε_{xx} نسبة التشوه وفق المحور x، و هكذا ......

ε_{xy} نسبة القص $(taux\ de\ cisaillement\ suivalt\ le\ plan\ (xy))$ وفق المستوي (xy).