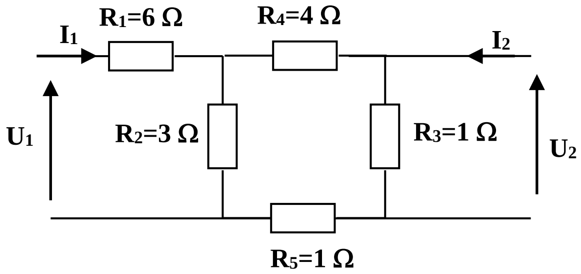
TD N° 3 : Quadripôles passifs - Filtres

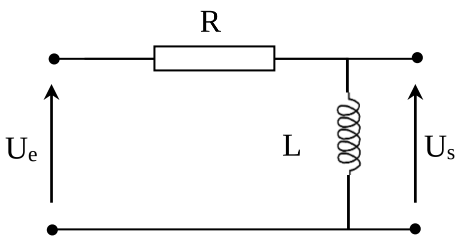
Exercice 1

❖ Déterminer les paramètres **Z** du réseau suivant ?



Exercice 2

❖ Soit le filtre correspondant à la figure ci-contre :



1- Calculer sa fonction de transfert $H(\omega)=\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$.

2- Donner les expressions de l'amplitude $G(\omega)$ et de la phase $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert.

3- Déterminer la fréquence de coupure de ce filtre ω_C à -3dB.

4- Donner les expressions du gain G_{dB} et de la phase φ en fonction de ω *et* ω_C.

5- Représenter les asymptotes des deux graphes $G_{dB} = f(x)$ *et* $\varphi = g(x)$, avec : $x = \frac{\omega}{\omega_C}$.

6- Tracer le diagramme de Bode en en utilisant le tableau suivant :

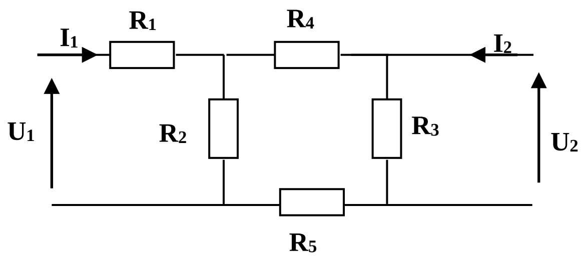
x	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100	10^3
G_{dB}						
φ						

Solution de la série de TD N° 3

« Quadripôles passifs – Filtres »

Exercice 1

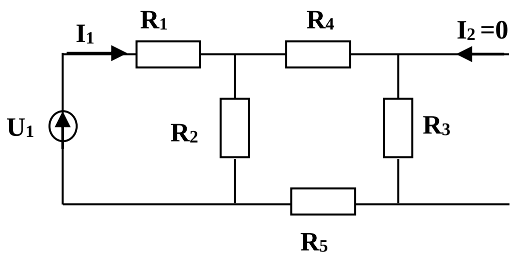
❖ Déterminer les paramètres **Z** du réseau suivant :



➢ On a les équations du quadripôle :

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}\ I_1 + Z_{12}\ I_2 \\ U_2 = Z_{21}\ I_1 + Z_{22}\ I_2 \end{cases}$$

➢ On ouvre les bornes de la sortie : $I_2 = 0$ (sortie en circuit ouvert)



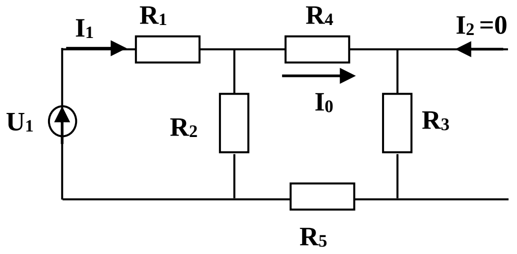
- $Z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_{eq} = R_{eq}$

$R_{eq} = R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4 + R_5)$

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + \frac{R_2\ (R_3 + R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = Z_{11}}$$

AN :

$$R_{eq} = 6 + \frac{3\ (1+4+1)}{3+1+4+1} = 8\ \Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{11} = R_{eq} = 8\Omega}$$



- $Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$

On a : $U_2 = R_3\ I_0$

En utilisant le pont diviseur de courant, on obtient la valeur de I_0 :

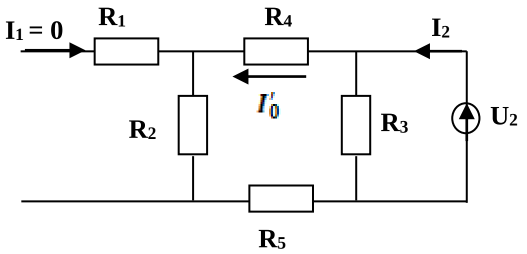
$$I_0 = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}\ I_1$$

Donc :

$$U_2 = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}\ I_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}}$$

AN : $Z_{21} = \frac{1\times 3}{3+1+4+1} = \frac{1}{3}\Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{21} = \frac{1}{3}\Omega}$

- Maintenant, pour calculer les deux autres paramètres il faut ouvrir les bornes d'entrée $I_1=0$ (entrée en circuit ouvert) :



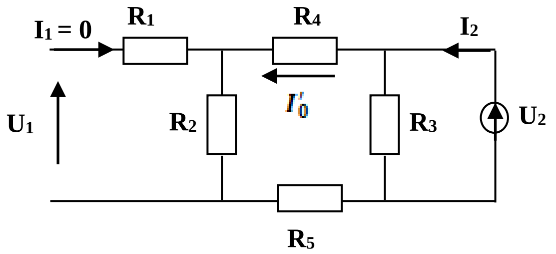
- $Z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$

$Z_{22} = R'_{eq} = R_3 \parallel (R_2 + R_4 + R_5)$

$$\boxed{Z_{22} = \frac{R_3\,(R_2 + R_4 + R_5)}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}}$$

AN :

$Z_{22} = \frac{1\,(3+4+1)}{1+3+4+1} = \frac{8}{9}\ \Omega \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{11} = \frac{8}{9}\Omega}$



- $Z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$

On a : $U_1 = R_2\, I'_0$

En utilisant le pont diviseur de courant, on obtient : $I'_0 = \frac{R_3}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}\, I_2$

Donc :

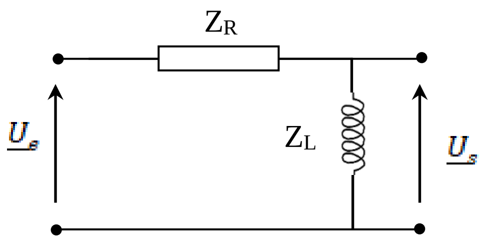
$U_1 = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}\, I_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{12} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}}$

Application Numérique : $Z_{12} = \frac{3\times 1}{1+3+4+1} = \frac{1}{3}\Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{21} = \frac{1}{3}\Omega = Z_{12}}$

Exercice 3 (Série TD 3)

1. Fonction de transfert

$$\underline{U}_s = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L}\underline{U}_e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{U}_e = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{L\omega}}\underline{U}_e$$



(Pont diviseur de tension)

$$\Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{L\omega}}$$

2. Amplitude $G(\omega)$ et phase $\varphi\ (\omega)$:

Soit :

$$\boxed{G\ (\omega) = |\underline{H}| = \left|\frac{1}{1 - j\dfrac{R}{L\omega}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}}$$

et

$$\varphi\ (\omega) = \arg\left(\underline{H}\right) = \arg\left(\frac{1}{1 - j\dfrac{R}{L\omega}}\right) = \arg\left(1\right) - \arg\left(1 - j\frac{R}{L\omega}\right) = arctg\left(\frac{0}{1}\right) - arctg\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

$$= arctg\ (0) - \arctan\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

$$\varphi\ (\omega) \quad = arctg\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

3. Pulsation de coupure ω_C

- on a : $G_{(\omega_C)} = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ $\qquad G_{max} = ?$

$G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}}$ donc : $G \nearrow \ \Rightarrow \left(\frac{R}{L\omega}\right) \searrow 0 \ \Rightarrow \omega \nearrow \ \Rightarrow \omega \longrightarrow \infty$ (filtre passe-haut)

$$G\ (\omega \to \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{L\infty}\right)^2}} = 1 = G_{\max}$$

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L\omega_c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + \left(\frac{R}{L\omega_c}\right)^2$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\omega_c = R/L}$ fréquence de coupure

La bande passante :

$$G(\omega_c) \leq G(\omega) \leq G_{\max}$$
$$\Rightarrow \quad \omega_c \quad \leq \quad \omega \quad \leq \quad \infty$$

La bande passante est l'intervalle : $\omega \in [\omega_c \, , \quad \infty [$

4. <u>Expression du gain G_{dB} et de la phase φ en fonction de ω et ω_c :</u>

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{L\omega}} = \frac{1}{1 - j\dfrac{\omega_c}{\omega}} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

- Le gain G_{dB} :

$$G_{dB} = 20\log G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c/\omega)^2}}\right) = -10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$$

- La phase : $\varphi = arctg(\dfrac{\omega_c}{\omega})$

5. <u>Diagramme de Bode</u>

On fait intervenir la pulsation réduite $x = \omega/\omega_C$:

$$\boxed{\begin{cases} G_{dB} = -10\log\left(1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) = -10\log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -10\log\left(1 + x^{-2}\right) \\ \varphi = arctg(\dfrac{1}{x}) \end{cases}}$$

- **<u>Asymptotes de la réponse en gain :</u>**

$x \to 0^+ \Rightarrow G_{dB} \cong -\log x^{-2} = +20\log x$ (asymptote oblique, de pente 20dB par décade)

$x \to \infty \Rightarrow G_{dB} \cong -10\log 1 = 0$ (asymptote horizontale)

- Aux très basses fréquences, le gain G_{dB} est une droite de pente +20dB/décade**.**
- Aux très hautes fréquences, le gain est confondu avec l'axe **ox**.

- **<u>Asymptote de la réponse en phase</u>** :

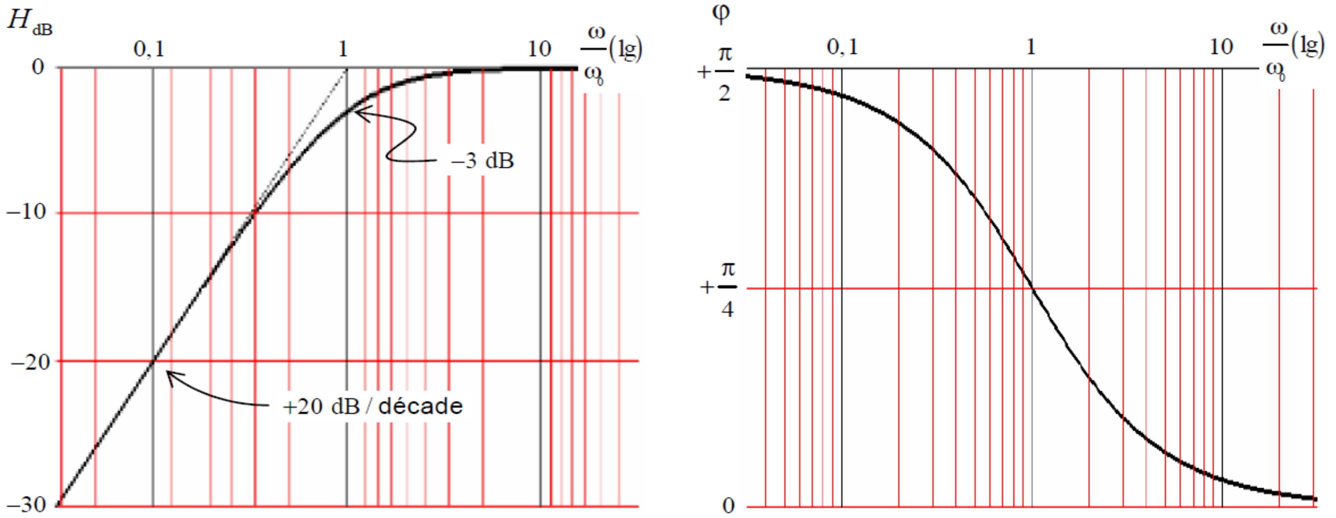
$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \to \frac{\pi}{2}$$
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi \to 0$$

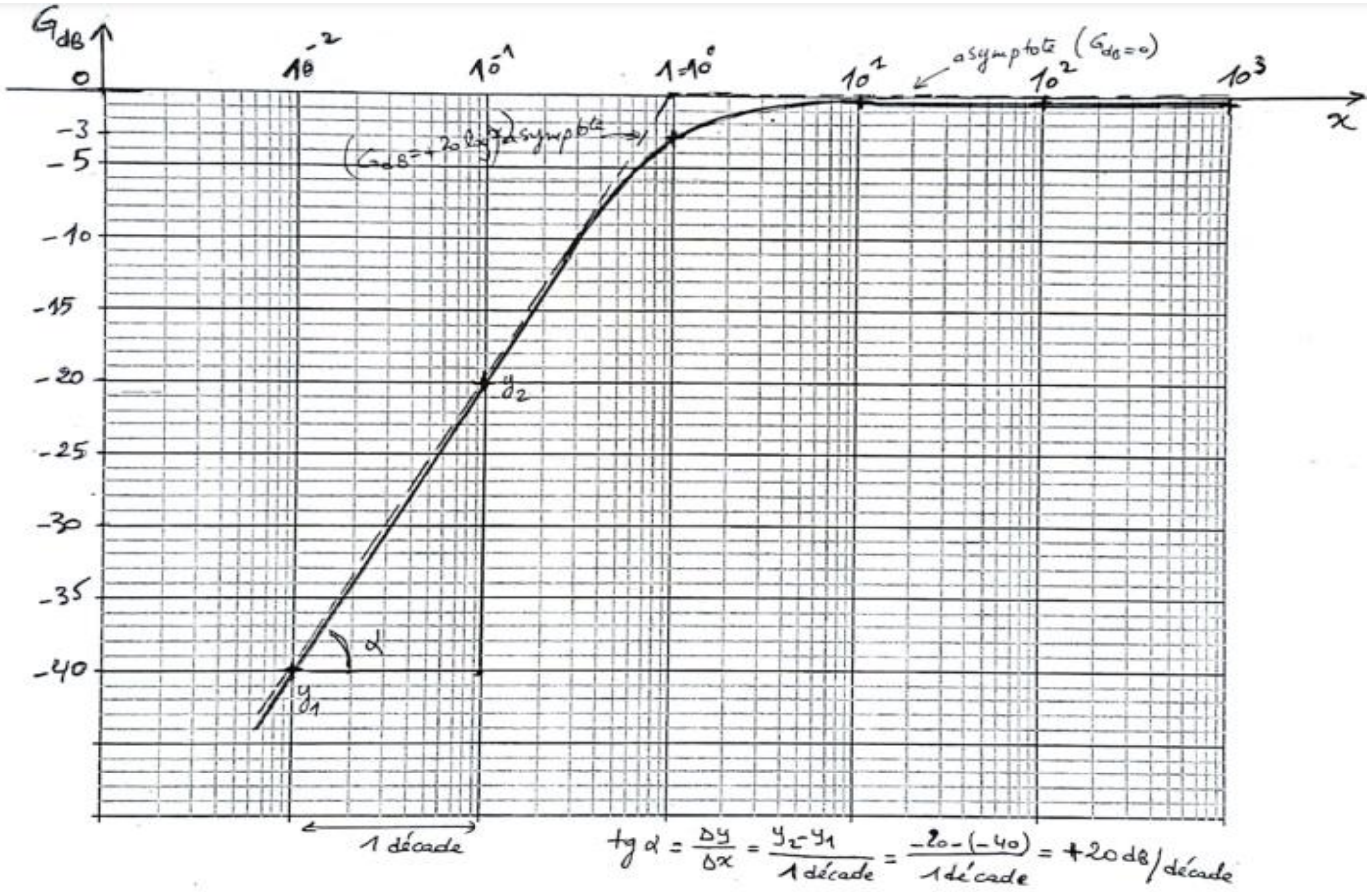
- La phase admet pour asymptote $\varphi = \pi/2$ en basse fréquence et $\varphi = 0$ en hautes fréquences.
- Sachant que $G_{dB}(\omega_c) = -3dB$ et $\varphi(\omega_c) = +\pi/4$
- pour $x = 1\,(\omega = \omega_C)$, on peut représenter le diagramme de Bode comme suit :

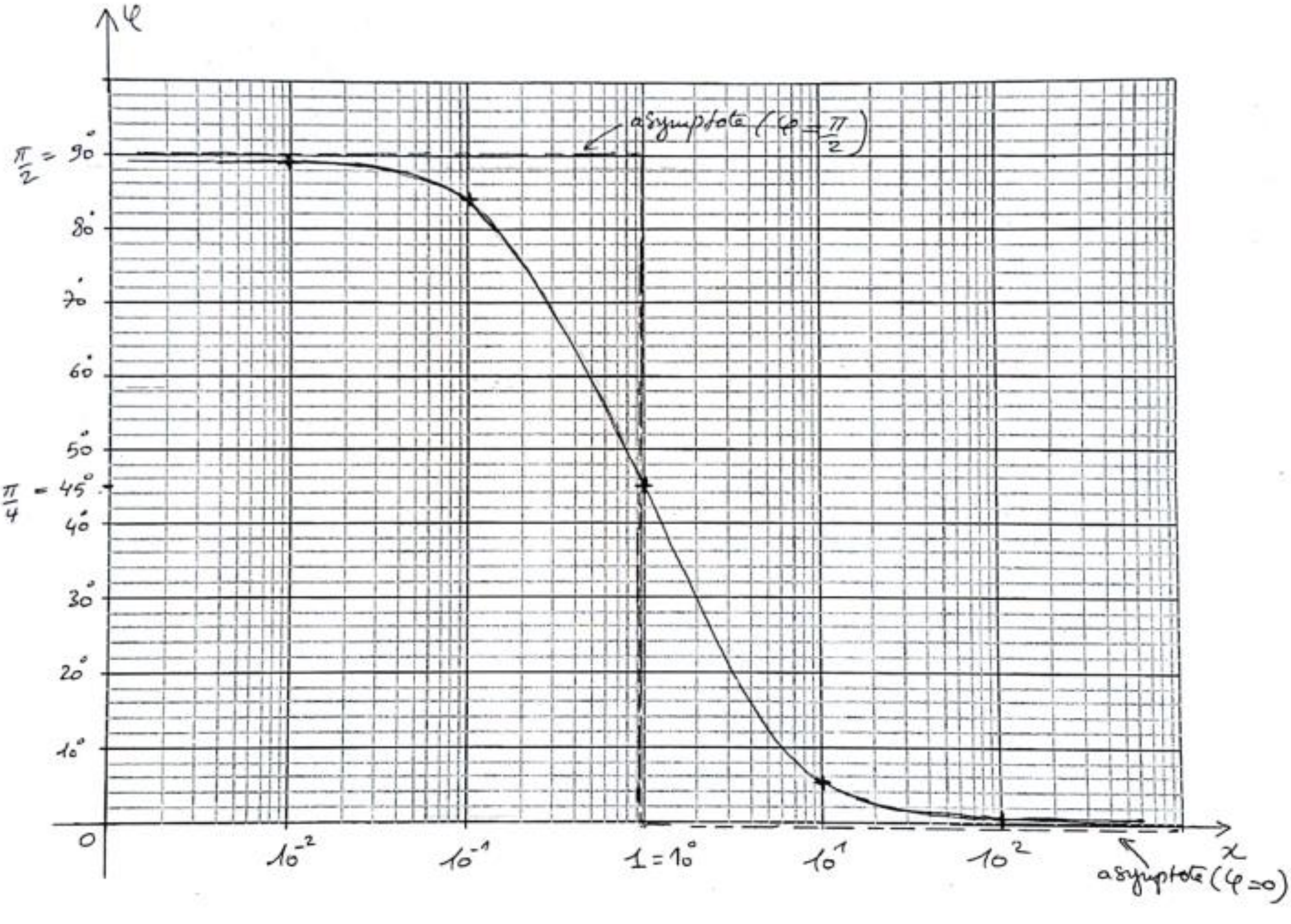
$$\begin{cases} G_{dB} = -10\log\left(1 + x^{-2}\right) \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$$

x	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100
G_{dB}	- 40	- 20	- 3	- 0.04	- 0.00043
φ	89.43°	84.29°	45.02°	5.71°	0.57°
	1.561 rd	1.471 rd	0.785 rd	0.099 rd	0.0099 rd

Le diagramme de Bode :




G_{dB}
asymptote ($G_{dB}=0$)
($G_{dB}=+20\log x$) asymptote
y_2
y_1
α
x
1 décade
$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{1\,\text{décade}} = \frac{-20-(-40)}{1\,\text{décade}} = +20\,\text{dB/décade}$


φ
asymptote ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)
$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\frac{\pi}{4} = 45°$
x
$1 = 10^0$
asymptote ($\varphi = 0$)