

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik BENYAHIA- Jijel  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département d'Architecture



Polycopié

## **Cours de Physique**

Destiné aux étudiants de 1<sup>ière</sup> année Architecture

**Proposé par**

**Dr : Smakdji Nafila**

**Année universitaire  
2022/2023**

## AVANT PROPOS

Ce cours a pour objectif, d'une part, de familiariser les futurs architectes avec les phénomènes physiques environnants, et d'autre part, de les initier aux différentes techniques de calculs utilisées lors de la conception de nouveaux édifices. L'application de ces techniques est très vaste. Elle englobe des problèmes qui vont de la stabilité des édifices aux questions relatives au confort. Conforme au programme officiel du LMD, ce polycopié de cours de physique s'adresse aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur en Architecture dont le contenu est structuré en sept chapitres, illustrés par quelques applications afin d'aider l'étudiant à assimiler le cours. Le premier chapitre introduit des notions élémentaires sur les processus physiques qui peuvent être décrits par des relations entre les entités mathématiques appelées « équations ». Les grandeurs physiques servent à la description d'états et de processus, ces grandeurs doivent être mesurables et donc, observables par l'être humain. Sur la base d'unité, l'observation d'une grandeur physique peut être quantifiée. Le système d'unité est l'ensemble de quelques grandeurs physiques à partir des quelles, on peut quantifier toutes les autres grandeurs physiques mesurables. Les grandeurs fondamentales d'un système d'unité sont choisies de manière à ce que des unités dérivées d'autres quantités physiques puissent en être déduites.

Dans Le but de savoir les actions des efforts entre les diverses pièces d'une construction et étudier leur équilibre, le deuxième chapitre comprend la partie de la statique graphique où les problèmes de statique des corps sont résolus par la méthode graphique telle que la construction du polygone funiculaire de la résultante des différentes forces qui agissent sur le corps. La partie de la statique analytique est abordée dans le troisième chapitre afin d'étudier l'équilibre de translation et de rotation des corps solides.

Afin d'analyser les différentes situations et phénomènes physiques à partir des lois et principes fondamentaux reliés à la mécanique, le calcul du travail d'une force et de l'énergie du point matériel dans des situations simples est abordé dans le quatrième chapitre.

Les phénomènes des vibrations et ondes présentent un rôle pertinent, ils concernent tous les domaines de la physique et de l'ingénierie ; mécanique, électricité, optique, acoustique. La connaissance de toutes les notions de bases telles que fréquence, période, phase restreintes aux oscillations de faible amplitude pour un degré de liberté sont abordées dans le cinquième chapitre.

Le sixième chapitre est réservé à la mécanique des fluides pour définir les principales propriétés des fluides parfaits gazeux et liquides et connaître la base de l'hydraulique, l'hydrostatique et l'hydrodynamique.

Le septième chapitre est consacré aux notions générales sur les gaz parfaits et les différents types d'énergie échangées, ce cours traite aussi le premier et le deuxième principe de la thermodynamique.

## **Notions générales**

La physique est une science naturelle. Dont le but est l'étude et la formulation mathématique des lois des phénomènes. Elle s'occupe principalement de la matière inanimée. Quand un problème technique ou une tâche pratique de construction est posé, nous devons d'abord les transformer en un problème dans lequel seules des grandeurs physiques apparaissent, par la suite le problème peut être traité au moyen des lois physiques. La solution du problème physique doit finalement être interprétée et des conclusions pratiques doivent être tirées des résultats. Apprendre la physique consiste donc à pouvoir retrouver derrière un problème les lois qui s'y trouvent. Toutes les lois physiques de la nature et de la matière peuvent se formuler sous forme d'équations mathématiques entre grandeurs physiques. Les grandeurs doivent être mesurables et exprimées par des unités de mesure. Toutes les unités sont déduites de quelques unités de base.

La compréhension des phénomènes physiques qui nous entourent repose d'abord sur les principes de la mécanique qui détermine les lois gouvernant les mouvements de translation, de rotation et d'oscillation des corps. La mécanique, est composée de la statique de la cinématique et de la dynamique. Cette dernière établit le lien entre les mouvements des corps et les actions mécaniques qui s'exercent sur eux. La statique est un cas particulier de la dynamique, puisqu'elle étudie les conditions nécessaires pour que les corps restent en équilibre. La cinématique étudie le mouvement des corps sans faire intervenir les actions qui les ont mis en mouvement. En connaissant les positions et les vitesses initiales d'un corps ainsi que toutes les forces agissant sur lui même, les lois de Newton permettent de résoudre le problème afin de prévoir son évolution au cours du temps. Parfois le principe fondamental de la dynamique ne suffit pas ou n'est pas approprié pour parvenir au bout de la résolution où la présentation des outils énergétiques demeure indispensable en faisant appel au principe du travail et de l'énergie comme une nouvelle méthode d'analyse, autre que la seconde loi de Newton, pour décrire le mouvement d'un corps soumis à l'action d'une ou plusieurs forces. En architecture, afin qu'un édifice tienne debout, l'architecte doit connaître les propriétés des matériaux employés et maîtriser les structures (constructions, bâtiment, pont..).

La Mécanique a pour but d'expliquer les phénomènes régissant le dimensionnement des structures. Elle permet d'appréhender la rupture ou la déformation de la construction. La statique est la science de base de la Mécanique des Structures. La Mécanique des Structures est elle même la science de base du calcul de béton armé, charpente métallique, béton précontraint, bois ...Une structure reçoit des charges, elle est donc sollicitée, sous ces charges des déformations et fissures se produisent au sein du matériau. Il est donc primordial d'étudier ses déformations, pour des raisons évidentes de sécurité des structures.

Les fluides sont des substances qui n'ont pas de formes, comme l'eau ou l'air et s'adaptent au récipient qui les contient La mécanique des fluides est une branche de la physique qui étudie les lois physiques régissant l'écoulement des liquides et des gaz et aide à reconnaître les effets de ces écoulements. L'étude de la statique (fluides au repos) et de la

dynamique (fluides en mouvement) des fluides trouve de nombreuses applications dans la vie courante, telles que : les écoulements atmosphériques; le comportement d'ouvrages au vent, les écoulements externes autour des véhicules ou des avions et la circulation d'air dans les systèmes de climatisation et de chauffage.

La thermodynamique permet de connaître la signification des expressions : température, chaleur, enthalpie, entropie, et leurs unités de mesure. Elle correspond à une branche de la physique qui étudie le comportement thermique des corps, tels que les mouvements de chaleur. Plus générale, la thermodynamique s'intéresse à l'étude de l'énergie en particulier l'énergie interne et de ses transformations. La thermodynamique a plusieurs applications scientifiques et techniques, elle intervient :

Dans les machines à vapeur fonctionnant avec le changement de la chaleur en travail mécanique.

Dans l'industrie pour transformer les matières premières en produits finis par exemple pour obtenir de nouveaux matériaux aux propriétés chimiques et physiques bien définies.

Dans la conception architecturale, notamment dans l'architecture bioclimatique et l'énergie solaire passive, les transferts thermiques entre l'extérieur et l'intérieur de la maison sont pris en compte.

Dans les centrales thermiques où les processus thermodynamiques permettent de convertir la chaleur en électricité.

## TABLE DES MATIERES

### Chapitre 1 Unités de mesure, Système International

|  |   |
|--|---|
| 1. Unités de mesure.....                             | 1 |
| 1.1. Introduction.....                               | 1 |
| 1.2. Métrologie.....                                 | 1 |
| 1.3. Unité de mesure.....                            | 1 |
| 1.4. Etalon.....                                     | 1 |
| 1.5. Grandeur physique.....                          | 2 |
| 2. Système international (SI) .....                  | 2 |
| 2.1. Définitions des unités fondamentales du SI..... | 2 |
| 2.2. Unités de base.....                             | 4 |
| 2.3. Unités dérivées.....                            | 4 |
| 2.4. Dimension d'une grandeur physique.....          | 4 |
| 2.5. Equation aux dimensions.....                    | 5 |
| 2.6. Analyse dimensionnelle.....                     | 5 |
| 2.7. Conventions d'écriture des unités.....          | 6 |

### Chapitre 2 Les forces (statique)

|   |    |
|---|----|
| 1. Définition.....  | 9  |
| 2. Effets d'une force.....  | 9  |
| 3. Représentation mathématique de la force.....                                       | 9  |
| 4. Composition de forces.....   | 10 |
| 4.1. Résultante de deux forces concourantes.....                                      | 10 |
| 4.2. Résultante de deux forces perpendiculaires.....                                  | 11 |
| 4.3. Résultante de deux forces de même sens.....                                      | 11 |
| 4.4. Résultante de deux forces opposées.....  | 11 |
| 4.5. Résultante de plusieurs forces concourantes.....                                 | 12 |
| 5. Décomposition géométrique d'une force.....   | 13 |
| 5.1. Décomposition suivant deux directions.....                                       | 13 |
| 5.2. Décomposition suivant trois directions.....                                      | 14 |
| 6. Statique graphique (polygone des forces et polygone funiculaire).....              | 15 |
| 6.1. Construction du dynamique (polygone des forces) et du funiculaire.....           | 15 |
| 6.2. Etapes à suivre.....   | 15 |
| 6.3. Détermination graphique de la résultante d'un système de forces coplanaires..... | 16 |

### Chapitre3 La statique des solides

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 1. Définitions.....            | 19 |
| 1.1. Statique.....             | 19 |
| 1.2. Référentiel galiléen..... | 19 |
| 1.3. Corps en équilibre.....   | 19 |
| 2. Moment d'une force.....     | 22 |
| 2.1. Définition.....           | 22 |

|   |    |
|---|----|
| 2.2. Bras de levier.....                          | 22 |
| 2.3. Signe d'un moment de rotation.....           | 22 |
| 2.4. Equilibre d'un solide en rotation.....       | 22 |
| 3. Trois principes de newton.....                 | 25 |
| 3.1. Premier principe.....                        | 25 |
| 3.2. Deuxième principe.....                       | 26 |
| 3.3. Troisième principe.....                      | 26 |
| 4. Nature des forces.....                         | 27 |
| 4.1. Force de gravitation.....                    | 27 |
| 4.2. Force de pesanteur.....                      | 28 |
| 4.3. Force du poids.....                          | 28 |
| 4.4. Forces de contact ou réactions d'appuis..... | 28 |
| 4.5. Forces de frottement.....                    | 28 |
| 5. Appuis.....                                    | 29 |
| 5.1. Appuis simples.....                          | 29 |
| 5.2. Appuis articulés.....                        | 30 |
| 6. Encastrements.....                             | 30 |
| 7. Méthode de résolution analytique.....          | 30 |
| 8. Etapes de résolution.....                      | 31 |

## **Chapitre 4 Travail et énergie**

|   |    |
|---|----|
| 1. Travail d'une force.....                                 | 33 |
| 1.1.Travail élémentaire.....                                | 33 |
| 1.2. Travail total.....                                     | 33 |
| 2. Forces conservatives et énergie potentielle.....         | 34 |
| 2.1. Travail de la force d'attraction gravitationnelle..... | 34 |
| 2.2. Propriétés.....  | 35 |
| 2.3. Energie potentielle gravitationnelle.....              | 35 |
| 2. Energie cinétique.....                                   | 36 |
| 3.1. Théorème de l'énergie cinétique.....                   | 36 |
| 3.2. Cas des forces conservatives.....                      | 37 |
| 4. Energie mécanique.....                                   | 37 |
| 4.1. Cas des forces non conservatives.....                  | 37 |
| 5. Travail d'une force : cas particulier.....               | 38 |
| 6. Poulie.....  | 39 |
| 6.1. Poulie fixe.....                                       | 39 |
| 6.2. Poulie mobile.....                                     | 39 |
| 6.3. Palan.....   | 40 |
| 7. Plan incliné.....  | 40 |
| 7.1. Force de déplacement.....                              | 42 |
| 7.2. Distance du déplacement.....                           | 42 |

## **Chapitre 5 Vibration et onde**

|   |    |
|---|----|
| 1.Introduction aux équations de Lagrange..... | 45 |
| 1.1. Exemple et étapes de résolution.....     | 45 |
| 2. Description d'un système oscillant.....    | 46 |

|  |    |
|--|----|
| 3. Mouvement d'un oscillateur harmonique.....                  | 46 |
| 3.1. Amplitude.....  | 46 |
| 3.2. Période.....  | 46 |
| 3.3. Fréquence.....  | 47 |
| 3.4. Pulsation.....  | 47 |
| 4. Vibration.....  | 47 |
| 4.1. Équation de Lagrange.....                                 | 48 |
| 4.2. Degré de liberté.....                                     | 48 |
| 5. Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté..... | 49 |
| 5.1. Oscillateur linéaire.....                                 | 49 |
| 5.2. Oscillations libres amorties à un degré de liberté.....   | 50 |
| 5.3. Analogie électromécanique.....                            | 52 |
| 5.4. Raideur équivalente.....                                  | 53 |

## **Chapitre 6 Mécanique des fluides**

|  |    |
|--|----|
| Introduction.....  | 55 |
| I. Hydrostatique.....  | 55 |
| I.1. Définition du fluide.....                                 | 55 |
| I.2. Principales grandeurs caractéristiques des fluides.....   | 55 |
| I.3. Principe fondamental de la statique.....                  | 59 |
| I.4. Théorème de Pascal.....                                   | 62 |
| I.5. Poussée d'Archimède.....                                  | 65 |
| II. Dynamique des fluides.....                                 | 70 |
| II.1. Introduction.....  | 70 |
| II.2. Fluides en mouvement.....                                | 70 |
| II.3. Théorème de Bernoulli.....                               | 73 |
| II.3.1. Conditions d'application du théorème de Bernoulli..... | 74 |
| II.4. Pertes de charge.....                                    | 77 |

## **Chapitre 7 Thermodynamique**

|   |    |
|---|----|
| Introduction.....                             | 87 |
| 1. Définition du système.....                 | 87 |
| 1.1. Système ouvert.....                      | 87 |
| 1.2. Système fermé.....                       | 88 |
| 1.3. Système isolé.....                       | 88 |
| 1.4. Etat d'un système.....                   | 88 |
| 1.5. Fonction d'état.....                     | 89 |
| 1.6. Etat d'équilibre d'un système.....       | 89 |
| 1.7. Transferts échangés par le système.....  | 89 |
| 2. Transformation.....                        | 89 |
| 2.1. Différents types de transformations..... | 89 |
| 2.2. Transformation physique.....             | 90 |
| 2. Gaz parfait.....                           | 91 |
| 3.1. Équation d'état.....                     | 91 |
| 3.2. Masse volumique.....                     | 91 |
| 3.3. Densité.....                             | 92 |
| 4. Différentes lois des gaz parfaits.....     | 92 |
| 4.1. Loi de Boyle Mariotte.....               | 92 |

|  |    |
|--|----|
| 4.2. Loi de Gay –Lussac.....                           | 92 |
| 4.3. Loi de Charles.....                               | 92 |
| 5. Mélanges des gaz parfaits.....                      | 92 |
| 5.1. Quantité de matière.....                          | 92 |
| 5.2. Fraction molaire du constituant d'un mélange..... | 92 |
| 3. Masse molaire moyenne d'un mélange.....             | 93 |
| 5.4. Masse volumique d'un mélange.....                 | 93 |
| 5.5. Densité d'un mélange.....                         | 93 |
| 5.6. Pressions partielles.....                         | 93 |
| 6. Diagramme de Clapeyron.....                         | 93 |
| 7. Température.....                                    | 94 |
| 8. Energie interne.....                                | 94 |
| 8.1. Energie cinétique.....                            | 94 |
| 8.2. Energie potentielle.....                          | 94 |
| 9. Chaleur.....  | 95 |
| 10. Enthalpie.....                                     | 95 |
| 11. Travail.....                                       | 95 |
| 12. Premier principe de la thermodynamique.....        | 96 |
| 13. Deuxième principe de la thermodynamique.....       | 96 |
| 13.1. Entropie .....                                   | 97 |
| 13.2. Propriétés.....                                  | 97 |

## Références

# Chapitre 1

## Unités de mesure, Système international

### 1. Unités de mesure

#### 1.1. Introduction

Dans notre vie de tous les jours, nous utilisons de nombreuses unités pour quantifier tout ce qui nous entoure. Que ce soit les poids, les distances, l'argent, les mesures, tout a une unité. Chaque grandeur physique ou chimique est presque systématiquement associée à une unité indispensable pour lui donner un sens.

#### 1.2. Métrologie

La métrologie est la science de la mesure. Elle s'intéresse traditionnellement à la détermination des caractéristiques (grandeurs) qui peuvent être fondamentales : une longueur, une masse, un temps ... ou dérivées des grandeurs fondamentales : une surface, une vitesse ... Mesurer une grandeur physique consiste à lui attribuer une valeur quantitative en prenant pour référence une grandeur de même nature appelée unité. La métrologie permet donc de déterminer la conformité des produits et participe aussi à l'amélioration de leur qualité.

#### 1.3. Unité de mesure

En physique et en métrologie une unité de mesure permet d'écrire une grandeur en fonction d'une valeur unitaire, par exemple une seconde. Elle se base sur la définition d'étalons nécessaires pour la mesure d'une grandeur physique, et l'analyse dimensionnelle.

#### 1.4. Etalon

Un étalon (standard, unité, modèle légal), est une grandeur de référence qui sert à définir ou à matérialiser une grandeur donnée dont on connaît la valeur avec une grande exactitude. C'est-à-dire un modèle permettant de définir une unité de mesure, de poids. Par exemple le mètre étalon.

##### 1.4.1. Etalon primaire

L'étalon primaire est l'étalon présentant les plus hautes qualités métrologiques et dont la valeur est établie sans se référer à d'autres étalons.

##### 1.4.2. Etalon secondaire

L'étalon secondaire est l'étalon dont la valeur est établie par comparaison à un étalon primaire.

## 1.5. Grandeur physique

Une grandeur est un paramètre mesurable, susceptible d'être distinguée qualitativement et déterminée quantitativement. Elle sert à définir un état, un objet comme la longueur et la température. Une grandeur physique est un ensemble d'unités de mesure, de variables, d'ordres de grandeur et de méthodes de mesure (qui sont l'objet de **la métrologie**) lié à un aspect ou phénomène particulier de la physique. Par exemple, la grandeur « longueur » regroupe tout ce qui concerne les distances. L'addition et la soustraction sont seulement possibles entre données de même grandeur. En revanche, il est possible de multiplier ou de diviser des grandeurs différentes, auquel cas on obtient une nouvelle grandeur dérivée des deux autres. Par exemple, la vitesse est issue de la division de la longueur par le temps. Il existe donc théoriquement une infinité de grandeurs, or seulement un certain nombre d'entre elles sont utilisées dans la pratique.

### 1.5.1. Mesure d'une grandeur

La mesure d'une grandeur fait appel à la métrologie. Il faut définir un phénomène de référence, ou **étalon**, qui va permettre de dire : " le phénomène actuel fait  $x$  fois le phénomène de référence ". Pour simplifier l'énoncé, on définit une **unité** et l'on dit : " le phénomène actuel fait  $x$  unités ". Par exemple, si une barre fait trois fois l'étalon-mètre, on dit que " la barre mesure 3 mètres ", le mètre étant l'unité de longueur. On peut construire des étalons à partir d'étalons déjà existants : par exemple, l'étalon-vitesse (vitesse de référence) est la vitesse d'un objet qui parcourt un étalon-longueur durant un étalon-temps, soit un mètre par seconde.

### 1.5.2. Grandeurs fondamentales (de base)

La possibilité de dériver des grandeurs à partir d'autres implique l'existence d'un point de départ, autrement dit de grandeurs fondamentales ou grandeurs de base. Ces grandeurs, ou plutôt leurs unités, sont souvent regroupées en systèmes d'unités en fonction de l'utilité de leurs relations et de leurs combinaisons. Le système actuellement le plus répandu est le système international qui repose sur sept unités de base.

## 2. Système International (SI)

### 2.1. Définitions des unités fondamentales du SI

Les définitions officielles de toutes les unités de base du « SI » sont approuvées par la conférence générale, dont les premières sont approuvées en 1889. Pour suivre l'évolution des sciences, ces définitions sont modifiées de temps à autre d'où la plus récente était en 1983.

#### 2.1.1. Définition du mètre adoptée en 1983

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de  $1/299\ 792\ 458$  de seconde. Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à  $299\ 792\ 458$  mètres par seconde, exactement,  $c_0 = 299\ 792\ 458$  m/s.

## 2.1.2. Définition du kilogramme

Le kilogramme est l'unité de masse. Le kilogramme est actuellement défini comme la masse d'un cylindre en platine iridié (90% de platine et 10% d'iridium) de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut déclaré unité SI de masse depuis 1889 par le Bureau international des poids et mesures (BIPM). Cette unité de mesure est la dernière du SI à être définie au moyen d'un étalon matériel fabriqué par l'homme. Celui-ci est conservé sous trois cloches de verre scellées (en France au pavillon de Breteuil) dont il n'est extrait que pour réaliser des étalonnages (opération qui n'a eu lieu que trois fois depuis sa création).

## 2.1.3. Définition de la seconde adoptée en 1967

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133. Il en résulte que la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium est égale à 9 192 631 770 hertz exactement, désignée par  $v(hfs\ Cs) = 9\ 192\ 631\ 770\ Hz$ . Lors de sa session de 1997, le comité international a confirmé que cette définition se réfère à un atome de Césium au repos, à une température de 0 K.

## 2.1.4. Définition de l'ampère adoptée en 1948

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, est maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à  $2 \times 10^{-7}$  newton par mètre de longueur.

## 2.1.5. Définition du kelvin adoptée en 1967

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. Il en résulte que la température thermodynamique du point triple de l'eau est égale à 273,16 kelvins exactement,  $T_{tpw} = 273,16\ K$ .

## 2.1.6. Définition de la mole

Une mole contient exactement  $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$  entités élémentaires correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, «  $N_A$  : nombre d'Avogadro », lorsqu'elle est exprimée en  $\text{mol}^{-1}$ . La quantité de matière, symbole «  $n$  » d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Elle peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules. Cette définition implique la relation exacte  $N_A = 6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ . L'inverse de cette relation est l'expression exacte de la mole en fonction de la constante :  $N_A : 1\ \text{mol} = 6,022\ 140\ 76 \times 10^{23} / N_A$ .

### 2.1.7. Définition de la candela adoptée en 1979

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence  $540 \times 10^{12}$  hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est  $1/683$  watt par stéradian. Il en résulte que l'efficacité lumineuse spectrale d'un rayonnement monochromatique de fréquence  $540 \times 10^{12}$  hertz est égale à 683 lumens par watt soit  $K = 683 \text{ lm/W} = 683 \text{ cd sr/W}$ .

### 2.2. Unités de base

Le système international (SI) a été mis en place par la 11<sup>ème</sup> Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) qui fixa en 1960 des règles pour les préfixes, les unités dérivées et d'autres indications. Le SI est fondé sur un choix de **sept unités de base** (tableau 1.) bien définies et considérées par convention comme indépendantes du point de vue dimensionnel : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela.

### 2.3. Unités dérivées

Les unités dérivées sont formées en combinant les unités de base, d'après les relations ces unités peuvent être remplacées par des noms (comme le Newton ou le Volt) et des symboles spéciaux (N et V) qui peuvent être utilisés pour exprimer les noms et symboles d'autres unités dérivées (tableau 2).

#### Remarque

Deux grandeurs supplémentaires ont été introduites pour assurer la cohérence du système.

### 2.4. Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur représente sa nature physique. La dimension d'une grandeur physique « G » se note entre crochets : [G]. Par exemple, si « G » a la dimension d'une longueur, on dit qu'elle est homogène à une longueur, donc la relation  $[G] = L$  : correspond à l'équation aux dimensions (la dimension) de la grandeur « G ». Donc, si « G » a la dimension d'une masse, on note  $[G] = M$ , d'une longueur, on note  $[G] = L$ , d'un temps, on note  $[G] = T$ .

#### Remarques

- Si  $[G] = 1$ , la grandeur « G » est sans dimension : une grandeur purement numérique, comme le rapport de deux longueurs, est dite sans dimension. Parfois elle peut avoir une unité : un angle plat est en radians ou en degrés.
- Les dimensions des grandeurs dérivées se déterminent à partir des dimensions des sept grandeurs de base et des équations de la physique.

## 2.5. Equation aux dimensions

Dans une relation entre grandeurs, on remplace chaque terme par la grandeur fondamentale correspondante, « L » pour une longueur, « M » pour une masse, « T » pour un temps, « I » pour une intensité électrique. . . On obtient ainsi l'équation aux dimensions. Cette équation permet :

- De déterminer l'unité composée d'une grandeur en fonction des grandeurs fondamentales.
- De tester si une formule est homogène.

### Exemple d'unité composée

De la formule :  $x = \frac{1}{2} \times g \times t^2$

On tire la dimension de  $g = L \cdot T^{-2}$  : accélération en  $m \cdot s^{-2}$ .

Homogénéité de la formule :  $\frac{1}{2} m \times v^2 = mgh$

On tire  $M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L$

La dimension d'une énergie est donc :  $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

## 2.6. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de déterminer la dimension d'une grandeur et donc d'en déduire son unité. Elle permet également de vérifier l'exactitude d'une formule. Faire l'analyse dimensionnelle d'une relation consiste à remplacer dans la relation, chaque lettre symbolisant une grandeur par la dimension de cette grandeur. Les dimensions des grandeurs respectent les règles de calculs suivantes:

- La dimension d'une grandeur est obtenue à partir des relations entre les valeurs de ces grandeurs;
- Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même dimension;
- Les deux membres d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension
- La dimension d'un produit (et inversement d'un quotient) est le produit (le quotient) des dimensions de chacune des grandeurs;
- Une grandeur qui est égale au quotient de deux grandeurs qui ont la même dimension n'a pas de dimension.

**Exemple :** Vérifier l'homogénéité de la formule suivante :

$$T = 2 \times \pi \sqrt{\frac{R^3}{g \times M}}$$

Avec T : période de révolution d'une planète, g : constante de gravitation universelle, R : rayon de l'orbite circulaire et M : masse de l'astre attracteur.

**Solution :** D'une part,  $[T] = T$ .

$$\text{D'autre part } \left[ T = 2 \times \pi \sqrt{\frac{R^3}{g \times M}} \right] = T = 2 \times \pi \sqrt{\frac{L^3}{L^3 \times M^{-1} \times T^{-2} \times M}} = \sqrt{T^2} = T$$

**Tableau 1.** Grandeurs et unités de base du Système International (SI)

| Grandeur de base   |                        | Unité de base |        |
|--|------------------------|---------------|--------|
| Nom  | Symbol de la dimension | Nom           | Symbol |
| Temps  | T                      | seconde       | s      |
| Longueur   | L                      | mètre         | m      |
| Masse  | M                      | kilogramme    | Kg     |
| Courant Electrique   | I                      | ampère        | A      |
| Température  | θ                      | kelvin        | K      |
| Quantité De Matière  | N                      | mole          | mol    |
| Intensité Lumineuse  | J                      | candela       | cd     |
| <b>Grandeurs supplémentaires du système international (SI)</b> |                        |               |        |
| Angle plan   |                        | radian        | rad    |
| Angle solide   | (Ω)                    | stéradian     | sr     |

**Tableau 2.** Grandeurs dérivées du système international

| Grandeur              | Dimension                        | Nom                       | Symbol             |
|-----------------------|----------------------------------|---------------------------|--------------------|
| Nombre d'onde         | L <sup>-1</sup>                  | mètre                     | m <sup>-1</sup>    |
| Aire                  | L <sup>2</sup>                   | Mètre carré               | m <sup>2</sup>     |
| Volume                | L <sup>3</sup>                   | Mètre cube                | m <sup>3</sup>     |
| Masse volumique       | M.L <sup>-3</sup>                | kilogramme par mètre cube | kg.m <sup>-3</sup> |
| Fréquence             | T <sup>-1</sup>                  | hertz                     | Hz                 |
| Vitesse               | LT <sup>-1</sup>                 | mètre par seconde         | m.s <sup>-1</sup>  |
| Accélération          | LT <sup>-2</sup>                 | mètre par seconde carrée  | m.s <sup>-2</sup>  |
| Force                 | MLT <sup>-2</sup>                | newton                    | N                  |
| Tension superficielle | MT <sup>-2</sup>                 | newton par mètre          | Nm <sup>-1</sup>   |
| Travail , Energie     | ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>  | joule                     | J                  |
| Puissance             | ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>  | watt                      | W                  |
| Pression              | ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup> | pascal                    | Pa                 |
| Moment d'inertie      | ML <sup>2</sup>                  | kilogramme- mètre carré   | kg.m <sup>2</sup>  |
| Quantité de mouvement | MLT <sup>-1</sup>                | newton- seconde           | N.s                |
| Viscosité dynamique   | ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup> | pascal-seconde            | Pa.s               |
| Viscosité cinématique | L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>   | mètre carré par seconde   | m <sup>2</sup> /s  |
| Intensité lumineuse   | J                                | candela                   | cd                 |
| Flux lumineux         | JΩ                               | lumen (cd/sr)             | lm                 |
| ECLAIREMENT LUMINEUX  | L <sup>-2</sup> JΩ               | lux (lm/m <sup>2</sup> )  | lx                 |
| Luminance             | L <sup>-2</sup> J                | candela par mètre carré   | cd/m <sup>2</sup>  |

### - Autres unités égales

1 hectare (ha) = 10 000 m<sup>2</sup>    1 litre = 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>    1 tour (tr) = 2π rad    1 degré (°) = π/180 rad  
 1gramme (g) = 10<sup>-3</sup> kg    1minute (min) = 60 s    1heure (h) = 3600 s    1 jour (d) = 86400 s.

## 2.7. Conventions d'écriture des unités

### 2.7.1. Les noms d'unités sont des noms communs

Il n'y a pas de majuscule et variation au pluriel, mais il faut écrire degrés Celsius car l'unité est le degré. Si les noms d'unités composées sont séparés par un trait d'union, les deux noms s'accordent Exemple : des newtons-mètres.

### 2.7.2. Noms d'unités avec un préfixe

Le préfixe est accolé au nom de l'unité. Si le nom de l'unité commence par une voyelle, il peut y avoir élision (mégohm et pas mégaohm). On donne quelques préfixes sont mentionnés ci-dessous (tableau 3)

### 2.7.3. Écriture des symboles des unités

Ils s'écrivent en principe en minuscule sauf s'ils dérivent d'un nom propre (Ampère, Newton) Ils sont toujours invariables. Quand les symboles sont préfixés, le préfixe doit être collé au symbole. Il faut écrire « hPa » et non pas « h Pa ». Pour les quotients, on peut écrire  $m/s^2$  mais pas  $m/s/s$ . Il est préférable d'écrire  $m.s^{-2}$ .

### 2.7.4. Écriture des valeurs numériques

Le séparateur décimal est la virgule. On peut découper les grands nombres en tranches de trois chiffres séparées par un blanc. Le nom ou le symbole de l'unité est écrit à la fin de la valeur numérique.

#### Exemples

- Il faut écrire 12,54 W et pas 12 W 54.
- Écrire un nombre de décimales compatible avec la précision de la mesure : Pour une mesure réalisée avec une précision de  $10^{-2}$  écrire 5,23 et pas 5,2289.

**Tableau 3.** Quelques préfixes

| Nom   | Symbole | Facteur    | Nom   | Symbole | Facteur    | Nom  | Symbole | Facteur   |
|-------|---------|------------|-------|---------|------------|------|---------|-----------|
| déci  | d       | $10^{-1}$  | femto | f       | $10^{-15}$ | kilo | k       | $10^3$    |
| centi | c       | $10^{-2}$  | atto  | a       | $10^{-18}$ | méga | M       | $10^6$    |
| milli | m       | $10^{-3}$  | zepto | z       | $10^{-21}$ | giga | G       | $10^9$    |
| micro | $\mu$   | $10^{-6}$  | yocto | y       | $10^{-24}$ | tera | T       | $10^{12}$ |
| nano  | n       | $10^{-9}$  | déca  | da      | 10         | peta | P       | $10^{15}$ |
| pico  | p       | $10^{-12}$ | hecto | h       | $10^2$     | exa  | E       | $10^{18}$ |
| zetta | Z       | $10^{21}$  | yotta | Y       | $10^{24}$  |      |         |           |

#### Applications

##### Application 1

Un point matériel de masse « m » est soumis à une force centrale «  $\vec{F}$  » de module F ((1))  
Sa trajectoire exprimée en coordonnées polaires est donnée par la relation (2) :

$$F = \frac{k \times m}{r} \quad (1) \quad \frac{1}{r} = \frac{k}{C^2} + A \cos(\theta - \alpha) \quad (2)$$

a. Trouver les dimensions de « k » et « C ».

b. Déterminer l'unité de « A » dans le système international d'unité (SI).

### Solution

a. Suivant l'expression de la force, et en utilisant les tableaux des unités et des dimensions donné dans le cours on trouve que :

$$F = \frac{k \times m}{r} \text{ donc : } [F] = \frac{[k] \times [m]}{[r]} \Rightarrow [k] = \frac{[F] \times [r]}{[m]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L}{M} = L^2 \cdot T^{-2}$$

La dimension de « C ».

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{k}{C^2} + A \cos(\theta - \alpha) \text{ donc: } \left[\frac{1}{r}\right] = \left[\frac{k}{C^2}\right] + [A \cos(\theta - \alpha)] \Rightarrow \left[\frac{1}{r}\right] = \left[\frac{k}{C^2}\right] = [A \cos(\theta - \alpha)] \\ &= [L^{-1}] \text{ aussi } \left[\frac{1}{r}\right] = \left[\frac{k}{C^2}\right] \Rightarrow [C^2] = [k] \cdot [r] = L^3 \cdot T^{-2} \Rightarrow [C] = (L^3 \cdot T^{-2})^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} \cdot T^{-\frac{1}{2}} = \\ &L^{\frac{3}{2}} \cdot T^{-1} \end{aligned}$$

b. L'unité de « A » dans le système international d'unité (SI).

On a :  $[A \cos(\theta - \alpha)] = [L^{-1}] \Rightarrow [A] = L^{-1}$  donc l'unité (SI) de "A" est  $m^{-1}$

### Application 2

La hauteur « h » d'une masse « m » lancée en plein air depuis le sol avec une vitesse initiale «  $V_0$  » et sous un angle d'inclinaison «  $\alpha$  » est donnée par l'expression (3) :

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \quad (3)$$

- Vérifier l'homogénéité de cette expression.

### Solution

On établit l'équation aux dimensions de cette relation comme suit :

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} : [h] = \frac{[V_0^2] \cdot [\sin^2(\alpha)]}{[2g]} \Rightarrow L = \frac{(L \cdot T^{-1})^2 \cdot 1}{L \cdot T^{-2}}$$

Donc

$$h = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L$$

La dimension de la longueur (hauteur) est prouvée ce qui confirme l'homogénéité de l'équation.

## Chapitre 2

### Les forces (statique)

#### 1. Définition

En physique, une force désigne l'interaction entre deux objets ou système, elle peut changer la nature du mouvement d'un corps et déformer un corps. En l'absence de force aucun de ces effets n'est possible, inversement aucun de ces effets n'est possible sans que la cause en soit une force.

**2. Effets d'une force :** Deux principaux effets existent :

#### 2.1. Effet statique

Un effet est dit statique lorsqu'il est capable de mettre un corps au repos, de le déformer ou de le modifier comme par exemple la déformation d'une cannette de boisson par les mains.

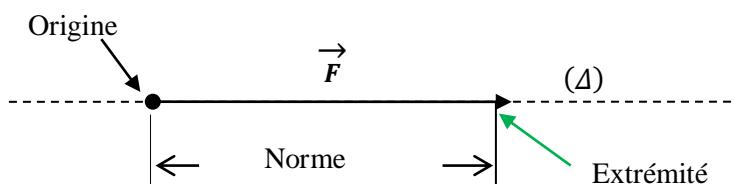
#### 2.2. Effet dynamique

Un effet est dit dynamique lorsqu'il est capable de mettre un corps en mouvement ou de modifier la nature de son mouvement. Il y a un changement de la nature du mouvement lorsque la valeur de la vitesse change (moto qui accélère), ou bien lorsque la direction de la vitesse d'un corps change (bille en acier déviée par un aimant).

### 3. Représentation mathématique de la force

On représente la force par un vecteur qui possède quatre (4) caractéristiques (figure.2.1) :

- a. Un point d'application (origine, le point auquel elle est appliquée);
- b. Une ligne d'action (une ligne passant par le point d'application dans le même sens que  $\vec{F}$ ) ;
- c. Un sens (de l'origine à l'extrémité : sens de la flèche pour montrer le *sens* de la force) ;
- d. Une norme (grandeur de la force, sa longueur réelle en Newton).



**Figure.2.1.** Représentation d'un vecteur force

#### A retenir

- Le vecteur  $\vec{F}$  désigne la force avec ses 4 caractéristiques
- Le symbole  $F$  désigne la norme de la force  $\vec{F}$   $F = \|\vec{F}\|$
- La norme d'une force est mesurée à l'aide d'un dynamomètre, l'unité (SI) de la norme est le Newton (N).

## 4. Composition de forces

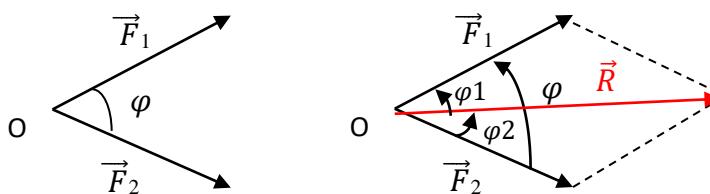
Si un corps est soumis à plusieurs forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  (en même temps), l'effet résultant est le même que si on n'avait qu'une seule force appelée **résultante** (1) correspond à la somme vectorielle de tout les vecteurs forces qui s'appliquent à ce corps.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \quad (1)$$

### 4.1. Résultante de deux forces concourantes

Il existe deux façons de construire géométriquement la résultante de deux forces : la méthode du triangle et la méthode du parallélogramme.

Soit deux (2) forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , appliquées à un point « O » du solide, afin de déterminer la résultante «  $\vec{R}$  » on construit un parallélogramme sur  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  le module (2) et la direction de «  $\vec{R}$  » sont déterminés par la diagonale du parallélogramme  $\square$  (figure 2.2).



**Figure 2.2.** Parallélogramme de deux forces

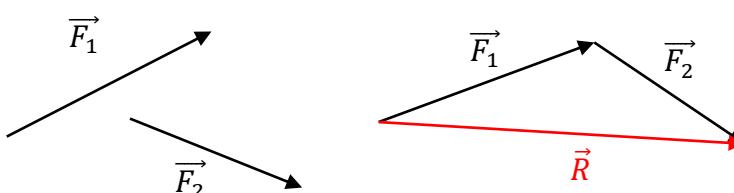
$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , sa norme est :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \times F_1 \times F_2 \times \cos \varphi} \quad (2)$$

En appliquant la loi des sinus dans un des deux triangles, on obtient:

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi} \quad (3)$$

On peut également trouver la résultante de deux forces par la translation des vecteurs, tel que l'origine du 2<sup>ième</sup> vecteur soit placé à l'extrémité du 1<sup>ier</sup> ou inversement, la liaison de l'origine du 1<sup>ier</sup> vecteur à l'extrémité du 2<sup>ième</sup> vecteur donne la résultante (figure 2.3).



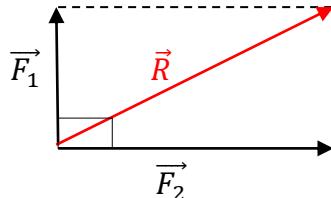
**Figure.2.3** Méthode du triangle

Remarque

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right\| \neq \sum_{i=1}^n F_i$$

## 4.2. Résultante de deux forces perpendiculaires

On se servant du théorème de pythagore (figure 2.4) :



**Figure 2.4** Résultante de deux forces perpendiculaires

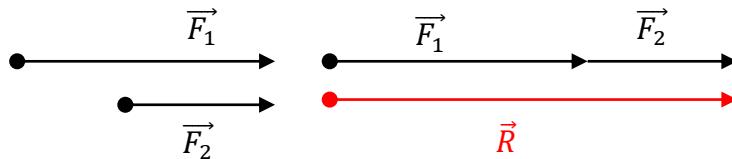
Donc :

$$\|\vec{R}\| = \left\| \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \right\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (4)$$

## 4.3. Résultante de deux forces de même sens

Lorsque les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  ont le même sens (vecteurs colinéaires), la résultante est égale à  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  dans le sens de  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  (figure 2.5). Sa norme est :

$$\|\vec{R}\| = F_1 + F_2 \quad (5)$$

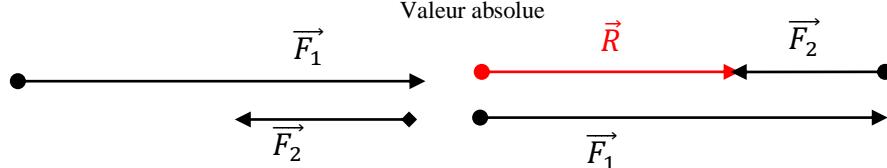


**Figure 2.5.** Résultante de deux forces de même sens.

## 4.4. Résultante de deux forces opposées

La résultante est égale à :  $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$  ( $\vec{F}_2 < \vec{F}_1$ ) dans le sens de  $\vec{F}_1$  ou bien à :  $\vec{F}_2 - \vec{F}_1$  ( $\vec{F}_1 < \vec{F}_2$ ) dans le sens de  $\vec{F}_2$  (figure 2.6). Sa norme est :

$$\|\vec{R}\| = |F_1 - F_2| \quad (6)$$

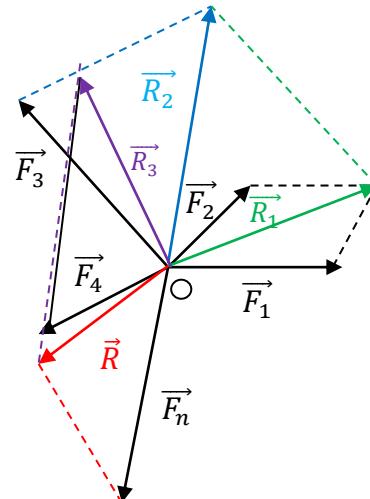
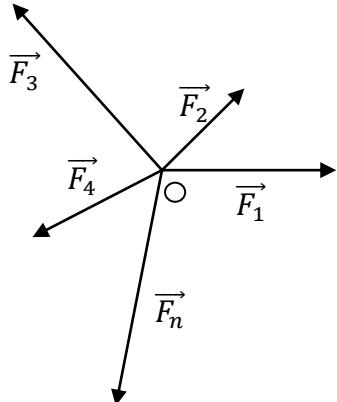


**Figure. 2.6.** Résultante de deux forces opposées

## 4.5. Résultante de plusieurs forces concourantes

### 4.5.a. Règle du parallélogramme

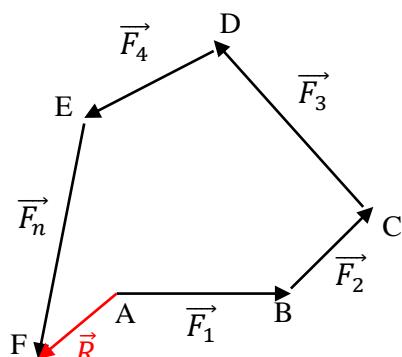
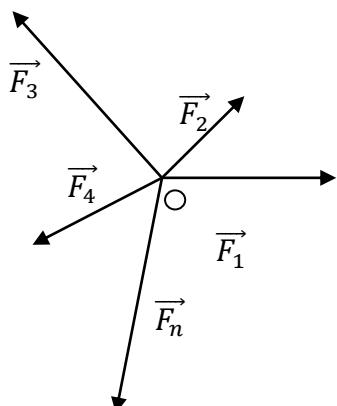
La somme de plusieurs forces appliquées en un point commun se fait suivant la règle du parallélogramme,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  pour trouver  $\vec{R}_1$  puis composer  $\vec{R}_1$  et  $\vec{F}_3$  pour trouver  $\vec{R}_2$  puis  $\vec{R}_2$  et  $\vec{F}_4$  pour trouver  $\vec{R}_3$  et ainsi de suite jusqu'à obtention de la résultante finale  $\vec{R}$  (figure.2.7).



**Figure.2.7.** Résultante de plusieurs forces concourantes

### 4.5.b. Règle du polygone des forces

Pour construire le polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force. En désignant le point « A » origine de la force ( $\vec{F}_1$ ), tout d'abord on place l'origine du vecteur ( $\vec{F}_2$ ) à l'extrémité « B » de ( $\vec{F}_1$ ) puis on place l'origine ( $\vec{F}_3$ ) à l'extrémité « C » de ( $\vec{F}_2$ ) et ainsi de suite. Après en joignant le point « A » et l'extrémité de  $\vec{F}_n$ , on obtient ainsi la résultante ( $\vec{R}$ ). La ligne brisée (ABCDEF) s'appelle « Polygone des forces » et le segment [AF] vecteur fermant le polygone s'appelle « Résultante des forces » (figure 2.8.b)



**Figure.2.8.a.** Système de forces concourantes

**Figure.2.8.b.** Polygone des forces

### Remarque

La résultante «  $\vec{R}$  » des forces concourantes en « O » est unique et appliquée en « O », elle est la somme géométrique des vecteurs forces :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (7)$$

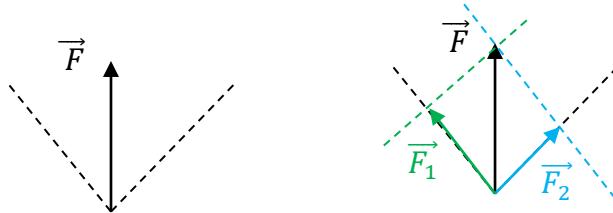
## 5. décomposition géométrique d'une force

Il est souvent avantageux de remplacer la force  $\vec{F}$  par deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  dont l'action combinée est identique à celle de  $\vec{F}$ . ( $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ ) sont alors **les composantes de la résultante  $\vec{F}$**  où  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ . Afin de déterminer les composantes d'une force  $\vec{F}$  il faut d'abord judicieusement choisir les directions suivant lesquelles on va la décomposer.

### 5.1.Décomposition suivant deux directions

#### 5.1.a. selon deux directions quelconques

On trace des rayons suivant ces directions, en partant de l'origine de  $\vec{F}$  on construit alors le parallélogramme dont la diagonale est  $\vec{F}$ . Les cotés de ce parallélogramme constituent les composantes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  (figure.2.9).

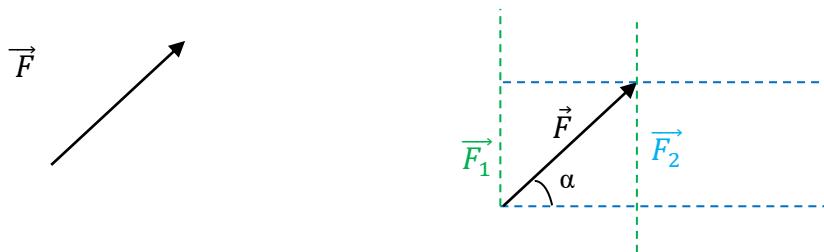


**Figure. 2.9.** Décomposition suivant deux directions quelconques

#### 5.1.b. Selon deux directions perpendiculaires

Si les deux composantes ont des directions perpendiculaires (figure.2.10), on peut facilement calculer leurs normes si on connaît la norme  $F$  de la résultante et l'angle «  $\alpha$  » qu'elle fait avec l'horizontale, en effet on obtient:

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{F} \Rightarrow F_2 = F \times \cos \alpha \quad (8) \quad \text{de même : } \sin \alpha = \frac{F_1}{F} \Rightarrow F_1 = F \times \sin \alpha \quad (9)$$

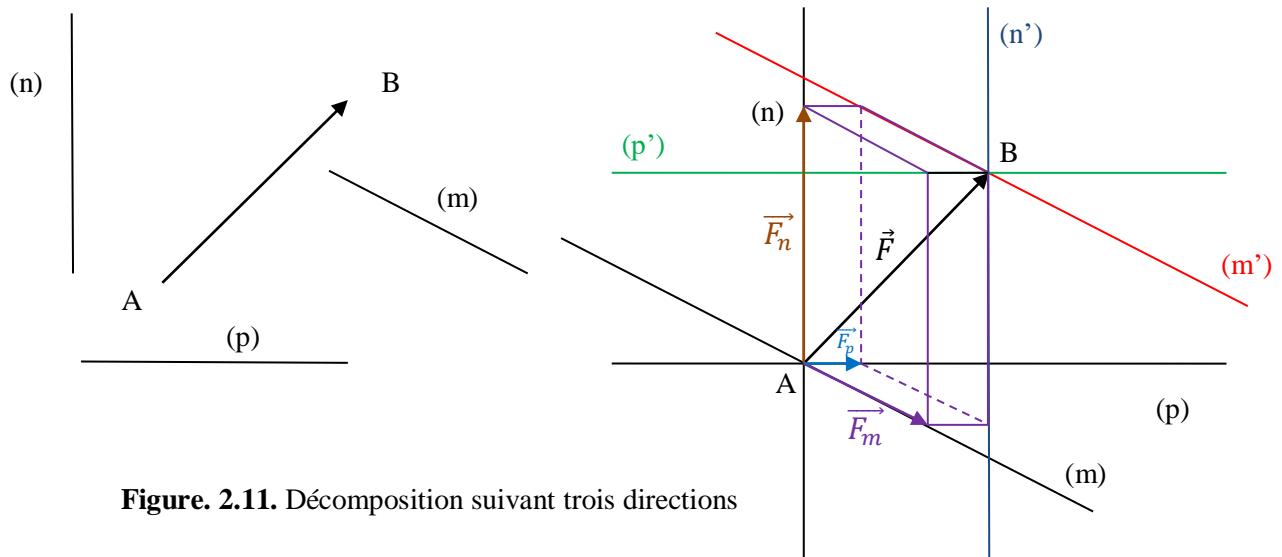


**Figure. 2.10.** Décomposition suivant deux directions perpendiculaires

## 5.2. Décomposition suivant trois directions

On peut décomposer une force d'une façon **unique**, suivant trois directions arbitraires non parallèles à un plan (figure.2.11). La solution conduit à un parallélépipède  dont les arêtes ont les directions données, et dont la diagonale [ab] est constituée par la force décomposée. La force «  $\vec{F}$  » est égale à la somme des composantes cherchées et sera écrite comme suit :

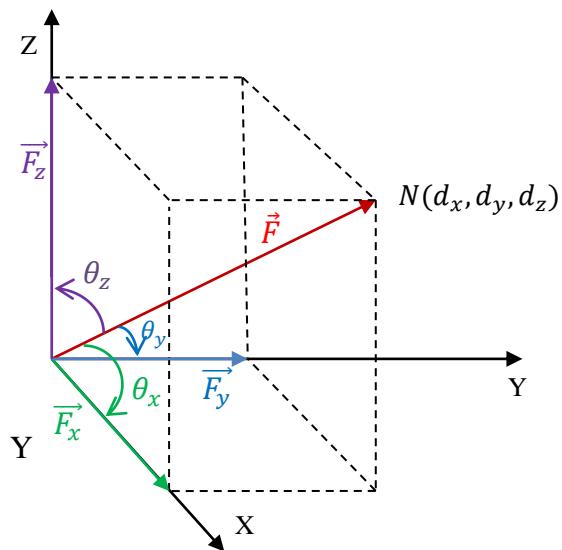
$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_n + \vec{F}_p \quad (10)$$



**Figure. 2.11.** Décomposition suivant trois directions

### Remarque

Si la force «  $\vec{F}$  » fait les angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  respectivement avec les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  du système de coordonnées cartésiennes orthogonales (oxyz). Pour décomposer la force «  $\vec{F}$  » suivant les trois axes, on construit un parallélépipède dans lequel «  $\vec{F}$  » sera une diagonale (figure.2.12).



**Figure. 2.12.** Décomposition de la force suivant trois axes orthogonaux

Le vecteur de la force «  $\vec{F}$  » s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \cdot \vec{x} + F_y \cdot \vec{y} + F_z \cdot \vec{z} \quad (11)$$

Tel que :  $F_x, F_y, F_z$  sont les composantes de la force «  $\vec{F}$  » et dont le module  $\|\vec{F}\|$  peut s'exprimer autrement en utilisant les cosinus directeurs :

$$F_x = \|\vec{F}\| \times \cos \theta_x, \quad F_y = \|\vec{F}\| \times \cos \theta_y, \quad F_z = \|\vec{F}\| \times \cos \theta_z$$

d'où le module de «  $\vec{F}$  » s'écrit :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (12)$$

## 6. Statique graphique (polygone des forces et polygone funiculaire)

La Statique graphique plane implique que toutes les forces appliquées au système étudié sont situées dans le plan. La statique graphique est utilisée pour la résolution des problèmes de statique dont le but est de déterminer la position et l'intensité de la résultante d'un système de forces. La méthode de résolution est purement graphique, il n'y a donc pas de calculs. Pour obtenir une précision optimale le tracé et sa lecture après avoir choisi une échelle avec soin demandent de la précision.

### 6.1. Construction du dynamique (polygone des forces) et du funiculaire

L'épure (représentation plane de parties de l'espace affine de dimension 3) de statique graphique comprend deux parties : le plan et le dynamique. La construction du dynamique et du funiculaire se fait suivant deux étapes : **tracé du dynamique du polygone** et **tracé du funiculaire**.

### 6.2. Etapes à suivre

Considérons trois forces du plan appliquées sur une structure représentées avec une échelle géométrique (figure.2.13.a), qui sert après à tracer le **funiculaire**. Puis nous construisons le polygone somme géométrique de ces trois vecteurs forces (figure.2.13.b).

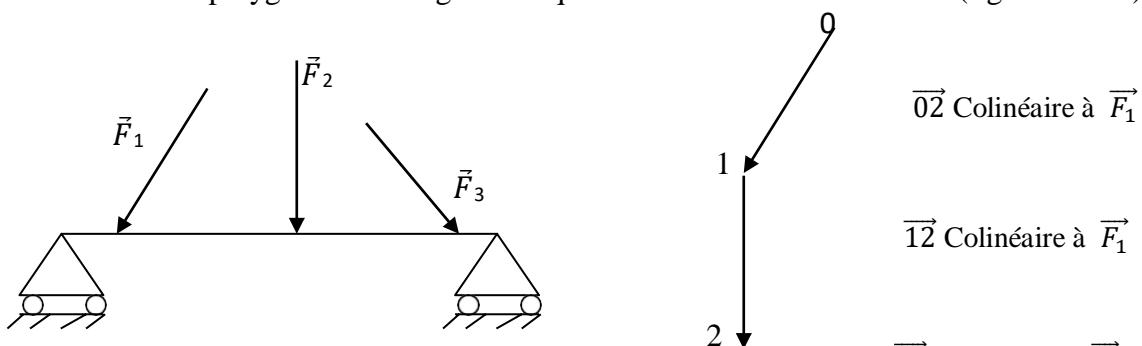


Figure.2.13.b. Le plan

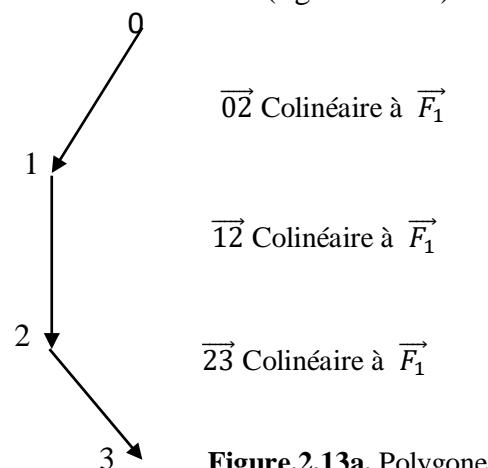


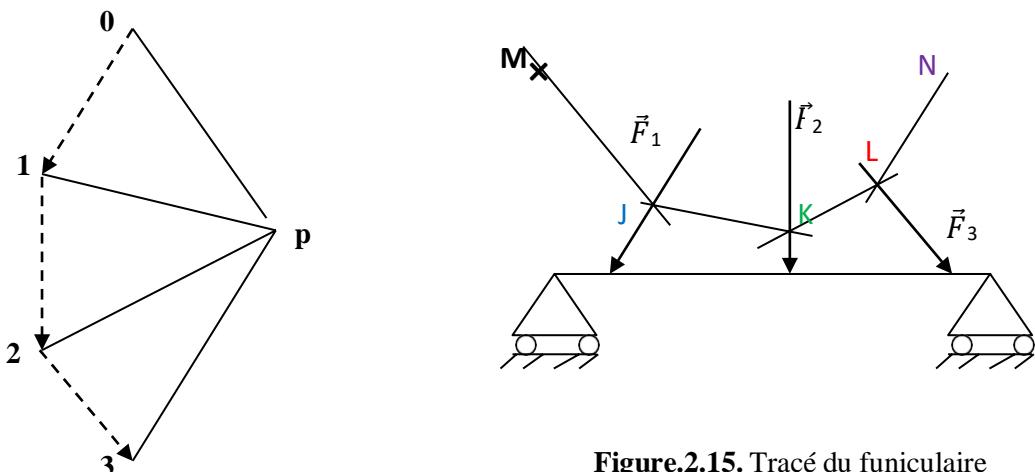
Figure.2.13a. Polygone

### Etape 1 : tracé du dynamique du polygone

Pour tracer le dynamique du polygone, nous choisissons un point « p » quelconque du dynamique et le joignons aux extrémités des vecteurs du polygone **somme géométrique** (figure .2.14) où le schéma obtenu représente le **dynamique**, « p » est le **pôle** du dynamique, (P0, P1, P2, P3) : sont les **rayons polaires**.

### Etape 2 : tracé du funiculaire

Revenons au plan des forces et traçons à partir d'un point quelconque « m » une parallèle au premier rayon polaire « OP » qui coupe le support de la force «  $\vec{F}_1$  » en « J », puis à partir de « J », une parallèle au deuxième rayon polaire « 1P » qui coupe le support de «  $\vec{F}_2$  » en « k ». à partir de « K », une parallèle au troisième rayon polaire « 2P » qui coupe le support de «  $\vec{F}_3$  » en « L ». puis à partir de « L », une parallèle (LN) au quatrième rayon polaire « 3P ». En fin nous obtenons la ligne brisée (MJKLN) est le **funiculaire** relatif au **pôle « P »** à l'origine « M » (figure.2.15).



**Figure.2.14.** Le dynamique

**Figure.2.15.** Tracé du funiculaire

### 6.3. Détermination graphique de la résultante d'un système de forces coplanaires

L'intensité, la direction et le sens de la résultante «  $\vec{R}$  » des trois forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  sont donnés dans le dynamique, elle est représentée par le vecteur  $\overrightarrow{O3}$ . (figure.2.16).

Pour déterminer la position de «  $\vec{R}$  » sur le plan, il suffit de tracer l'intersection « I » de ces deux cotés « MJ » et « LN » qui sont les parallèles aux rayons polaires « P0 » et « P3 » fermant le dynamique (figure.2.17).

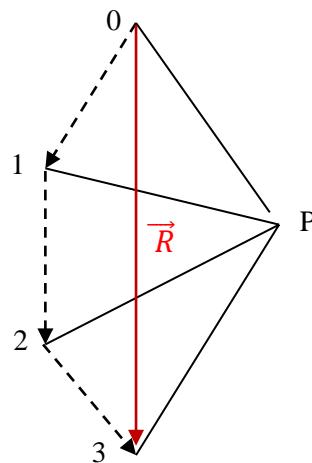


Figure 2.16. La résultante dans le dynamique

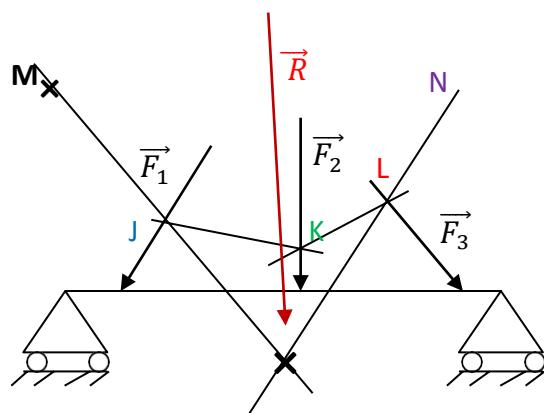
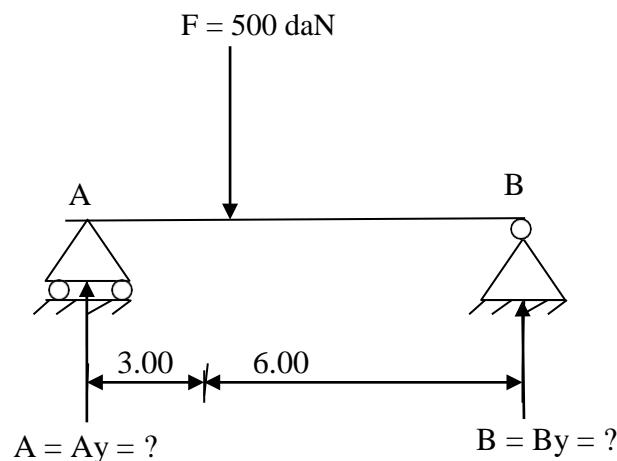


Figure 2.17. La résultante dans le plan

**Application 1.** Un système soumis à plusieurs forces parallèles (figure.2.18).



### Solution

Figure 2.18. Système soumis à plusieurs forces parallèles

Détermination de « Ay » et de « By » par la méthode graphique du dynamique (figure.2.19) et du funiculaire (figure.2.20).

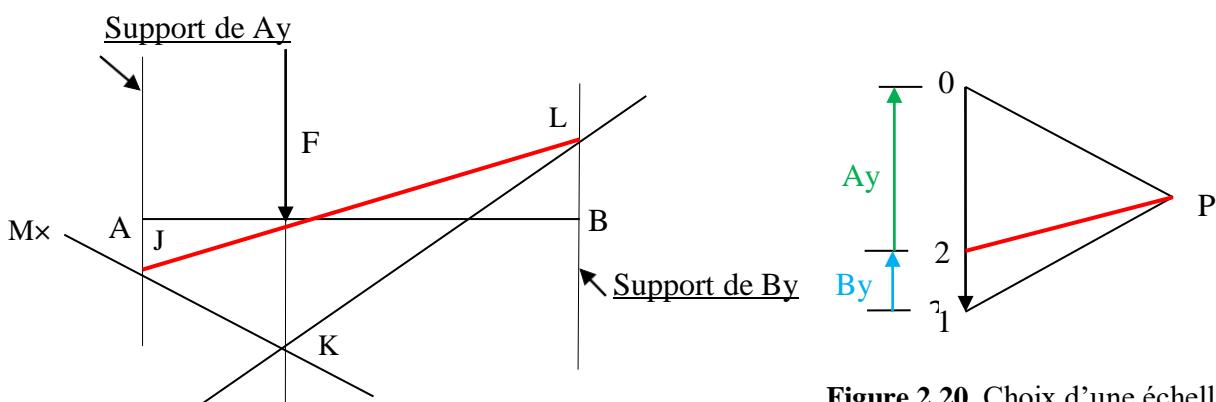


Figure 2.19. Tracé du funiculaire relatif au pôle p et d'origine M quelconque

Figure 2.20. Choix d'une échelle des forces et tracé du polygone des forces à partir d'un pôle p

-L'équilibre d'un système se traduit par la fermeture du funiculaire. Traçons la ligne de fermeture du funiculaire (JL) et sa parallèle sur le dynamique passant par le point « P ». On définit ainsi le rayon polaire (2P) et les inconnues de liaison « Ay » et de « By ».

### Application 2.

#### Un système soumis à trois forces concourantes

L'équilibre du système traduit que la somme des trois forces est nulle:  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{F} = \vec{0}$   
Aussi les forces doivent être concourantes en un même point « I » (figure.2.21).

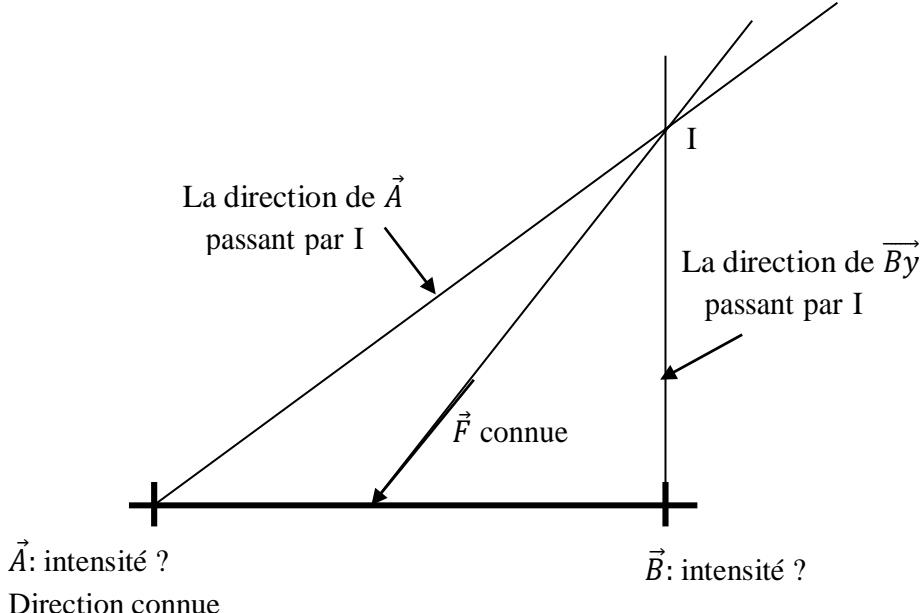


Figure.2.21. Système soumis à trois forces concourantes

#### Solution Méthode du triangle de forces

**Construction du triangle des forces :** les directions des forces doivent être parfaitement parallèles à celle de la figure initiale (figure.2.21) ayant servi à déterminer le point « I », il est indispensable de choisir une échelle pour tracer « F » sur le triangle de forces. Les intensités de  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  seront mesurées à partir de cette même échelle. L'extrémité de chaque force coïncide avec l'origine de la force suivante (figure.2.22).

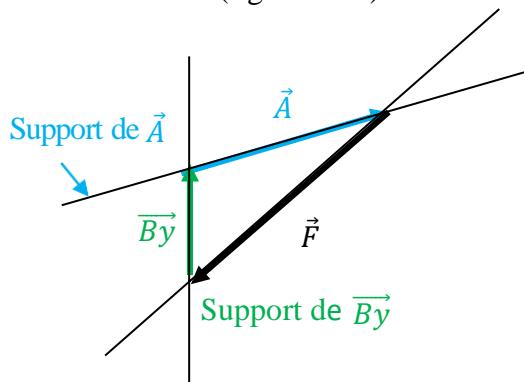


Figure.2.22. Méthode du triangle de forces

## Chapitre 2

# Statique des solides

### 1. Définitions

#### 1.1. Statique

La statique qui n'est qu'un cas particulier de la dynamique (solides en mouvement quelconque), est une partie de la mécanique qui étudie les conditions d'équilibre des corps solides au repos ou en mouvement uniforme par rapport à un repère supposé fixe (un repère Galiléen).

#### 1.2. Référentiel Galiléen

Un référentiel est un solide que l'on considère immobile, par rapport auquel on repère une position ou un mouvement (repère spatial, repère temporel...etc). Un référentiel est Galiléen lorsqu'il ne subit aucune accélération. Il peut avoir un mouvement rectiligne et uniforme.

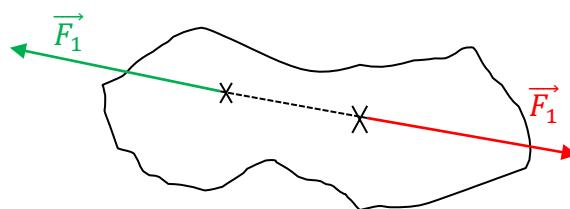
#### 1.3. Corps en équilibre

Lorsqu'un corps est soumis à plusieurs forces, dont les effets se compensent, la nature de son mouvement ne varie pas. On dit que le corps est en équilibre, autrement dit que tout les corps qui sont immobiles ou bien en mouvement rectiligne et uniforme se trouvent en équilibre.

##### 1.3.a. Équilibre sous l'action de deux forces

Si le corps est soumis à deux forces (figure.3.1) , et pour qu'il soit en équilibre il faut que

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \quad (1)$$



**Figure.3.1.** Équilibre sous l'action de deux forces

##### 1.3.b. Équilibre sous l'action de trois forces

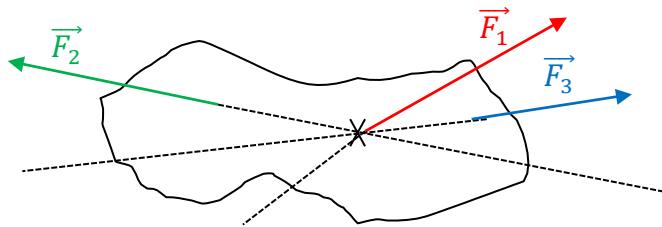
Si le corps est soumis à trois forces, (figure.3.2) et pour qu'il soit en équilibre il faut que :

- les trois forces se trouvent dans un même plan (coplanaires).

-les lignes d'actions (droites qui portent les vecteurs forces) passent par un même point (les forces sont concourantes).

-la résultante  $\Sigma \vec{F}$  est le vecteur nul :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \quad (2)$$

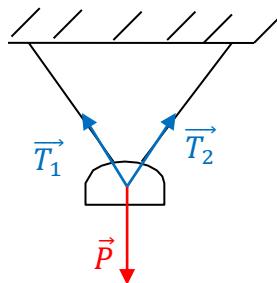


**Figure.3.2.** Équilibre sous l'action de trois forces

### Exemple

Nous avons une lampe qui est soumise à l'action de trois forces (figure.3.3), La lampe est immobile autrement dit elle se trouve en équilibre si :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$



**Figure.3.3.** Une lampe en équilibre

**En règle générale**, si le corps est soumis à plusieurs forces ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n : n > 3$ ) est en équilibre si et seulement si la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées est nulle.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad (3)$$

### Remarque

Il n'est pas nécessaire que toutes les forces soit coplanaires ou concourantes.

### Application

Une bille homogène de poids 12 kN repose sur deux plan inclinés polis AB et BC perpendiculaire entre eux, le plan BC fait un angle de  $60^\circ$  avec l'horizontal (figure.3.4).

-Déterminer les réactions de deux plans inclinés sur la bille.

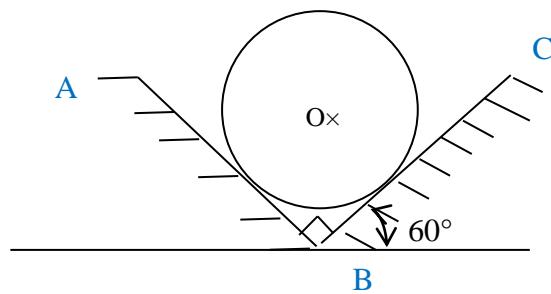


Figure 3.4. La bille sur deux plans inclinés

Solution

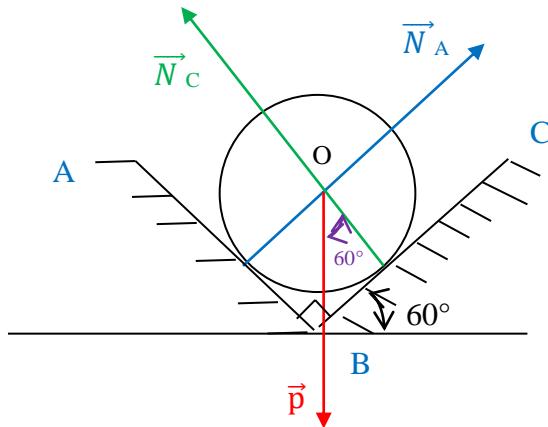


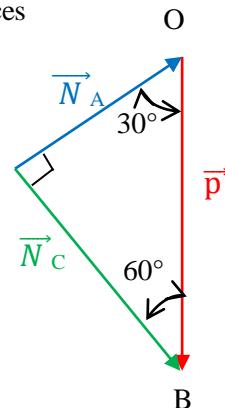
Figure 3.5. La bille est soumise aux trois forces

La bille est soumise à :

- Son poids( $\vec{p}$ ) dirigé verticalement vers le bas.
- Les réactions ( $\vec{N}_A$ ) et ( $\vec{N}_C$ ) respectivement du plan **AB** et **BC** vers le centre « O » de la bille.

### Condition d'équilibre géométrique

Il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.

Puisque le solide est en équilibre, le triangle des forces  $\vec{p}$ , $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_C$  doit être fermé, d'où l'extrémité du vecteur force  $\vec{N}_C$  doit se confondre avec l'origine du vecteur  $\vec{p}$  donc :

$$\frac{N_A}{\sin 60} = \frac{N_C}{\sin 30} = \frac{P}{\sin 90}$$

D'où ;

$$N_A = \frac{\sin 60 P}{\sin 90} = \frac{\sqrt{3}}{2} P = 10.39 \text{ kN}$$

$$N_C = \frac{\sin 30 P}{\sin 90} = 0.5 P = 6 \text{ kN}$$

## 2. Moment d'une force

### 2.1. Définition

On appelle moment d'une force par rapport à un axe de rotation «  $\Delta$  » le produit de la norme «  $F$  » de la force et de son bras de levier «  $a$  ». Désigné par :  $\overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F})$ , son unité SI est Newton mètre (N.m), il se calcule par la relation suivante :

$$\overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}) = \pm F \times a \quad (4)$$

### 2.2. Bras de levier

On appelle « bras de levier » (a) d'une force «  $\vec{F}$  » par rapport à un axe de rotation ( $\Delta$ ) la distance entre la ligne d'action de «  $\vec{F}$  » et l'axe de rotation. C'est la longueur du segment perpendiculaire à la ligne d'action de la force qui lie l'axe ( $\Delta$ ) à cette dernière. Son unité (SI) est le mètre (m) (figure.3.6).

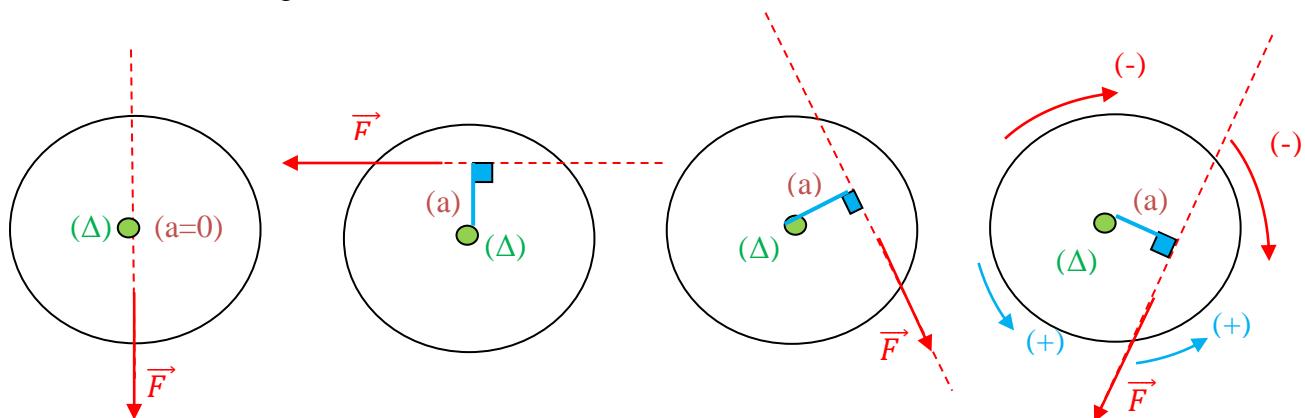


Figure.3.6. Exemples de bras de levier

### 2.3. Signe d'un moment de rotation

Si une force fait tourner un objet dans le sens trigonométrique positif, son moment est positif. Si elle le fait tourner dans le sens trigonométrique négatif, son moment est négatif. (figure.3.7).

$$\overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_1) = -F_1 \times a \text{ Moment négatif}$$

$$\overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_2) = +F_2 \times a \text{ Moment positif}$$

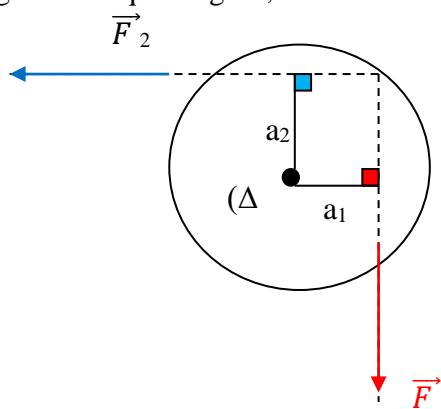


Figure.3.7. Signe d'un moment de rotation

### 2.4. Équilibre d'un solide en rotation

Un solide qui peut tourner autour d'un axe, est en équilibre de rotation si et seulement si la

somme des moments de toutes les forces qui s'applique au solide est nulle.

Équilibre de rotation :

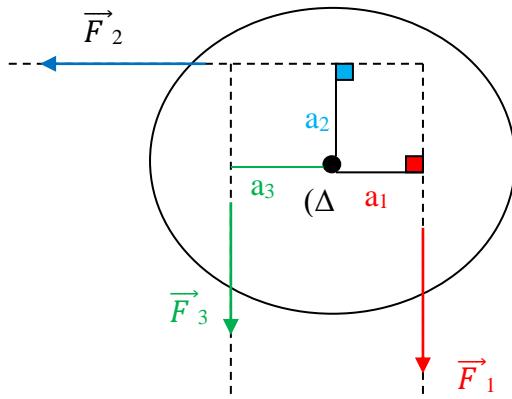
$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_i) = \vec{0} \quad (5)$$

### Applications

**Application 1.** D'après la figure ci-contre nous avons une roue solide qui est soumise à trois forces est ce que le solide est en équilibre de rotation ?

On donne:  $a_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $a_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $a_3 = 2 \text{ cm}$

$F_1 = 4 \text{ N}$ ,  $F_2 = 3 \text{ N}$ ,  $F_3 = 2,5 \text{ N}$



**Solution :** On applique la deuxième équation de l'équilibre statique :

Figure 3.8. Roue soumise à trois forces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_i) = \vec{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_i) = \overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_1) + \overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_2) + \overrightarrow{M}_\Delta (\vec{F}_3) \\ &\Leftrightarrow -F_1 \times a_1 + F_2 \times a_2 + F_3 \times a_3 \Leftrightarrow -4 \times 0.02 + 3 \times 0.01 + 2.5 \times 0.02 = 0 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Donc le solide est en équilibre de rotation.

**Application 2.** Une roue (C) de **20 cm** de diamètre et un engrenage (D) de **2 cm** de rayon, sont emmanchés sur un arbre horizontal (AB), le reste des dimensions est mentionné sur la figure ci-dessous. Une force  $(\vec{P})$  de **10 kN** est appliquée suivant la tangente à l'engrenage (D). Déterminer la force  $(\vec{Q})$  et les réactions aux appuis A et B en position d'équilibre.

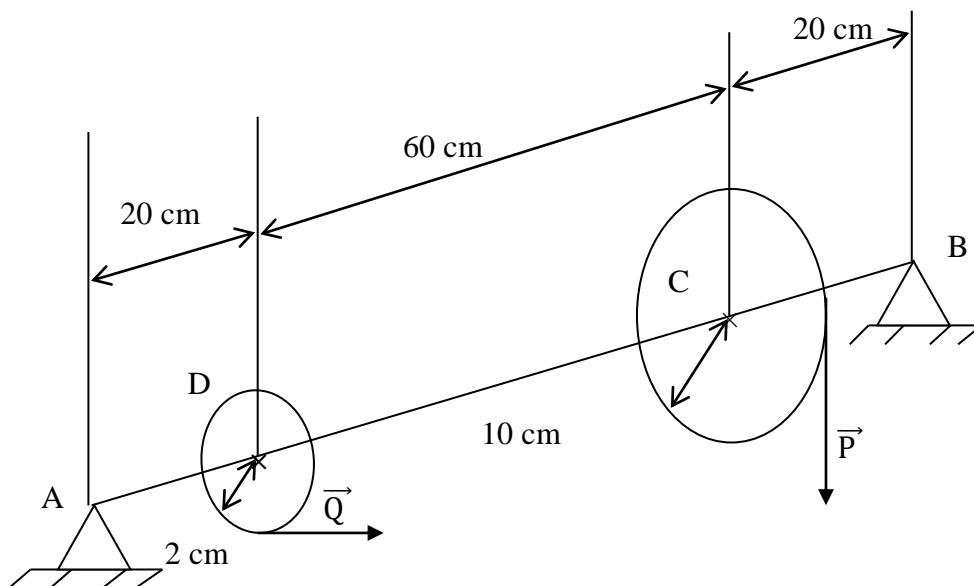
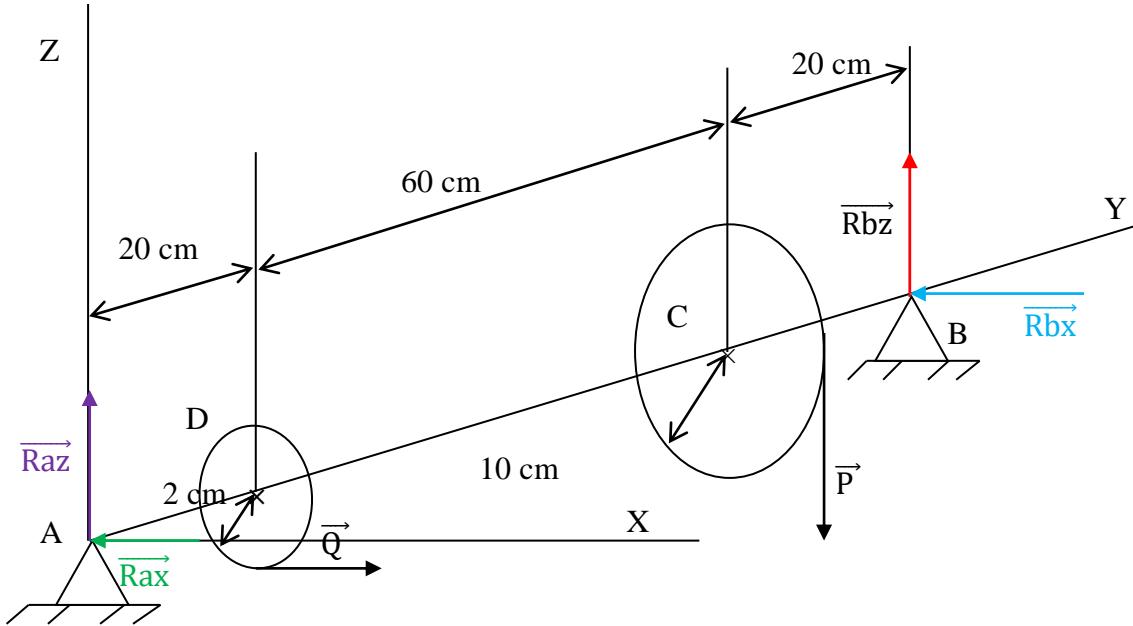


Figure 3.9. Schéma représentatif de l'application

## Solution

La roue est devenue libre sous l'action du système de forces quelconque, représenté par la figure ci-dessous :



**Figure 3.10.** Schéma de la roue sous l'action des différentes forces

Afin de déterminer les composantes de la force et celles des réactions, on applique la première condition de la statique, où la somme des forces extérieures appliquées sur le système est nulle et la deuxième condition de la statique où la somme des moments des forces extérieures appliquées sur le système est nulle.

1<sup>ière</sup> loi de la statique :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_a + \vec{R}_b + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0} \\ \sum F_x &= 0 \Leftrightarrow -R_{ax} - R_{bx} + Q = 0 \Rightarrow R_{ax} = Q - R_{bx} \dots \dots (1) \\ \sum F_y &= 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \\ \sum F_z &= 0 \Leftrightarrow R_{az} + R_{bz} - P = 0 \Rightarrow R_{az} = P - R_{bz} \dots \dots (2) \end{aligned}$$

2<sup>ième</sup> loi de la statique :

$$\sum_{i=1}^3 \overline{M}_{\Delta} (\vec{F}_i) = 0 \Leftrightarrow \overline{M}_{\Delta} (\vec{R}_a) + \overline{M}_{\Delta} (\vec{R}_b) + \overline{M}_{\Delta} (\vec{P}) + \overline{M}_{\Delta} (\vec{Q}) = \vec{0}$$

Suivant l'axe (ax) :  $R_{bz} \times 1 - P \cdot (0.8) = 0 \dots \dots (3)$

Suivant l'axe (ay) :  $Q \cdot (0.02) - P \cdot (0.1) = 0 \dots \dots (4)$

Suivant l'axe (az) :  $R_{bx} \cdot 1 - Q \cdot (0.2) = 0 \dots \dots \text{(5)}$

On déduit :

De l'équation (3)  $\Rightarrow R_{bz} = 0.8P = 8 \text{ KN}$ .

De l'équation (4)  $\Rightarrow Q = 5P = 50 \text{ KN}$ .

De l'équation (5)  $\Rightarrow R_{bx} = 0.2Q = 10 \text{ KN}$ .

De l'équation (1)  $\Rightarrow R_{ax} = Q - R_{bx} = 40 \text{ KN}$ .

De l'équation (2)  $\Rightarrow R_{az} = P - R_{bz} = 2 \text{ KN}$ .

Donc :  $R_a = \sqrt{R_{ax}^2 + R_{bx}^2} = 40.05 \text{ N}$  et  $R_b = \sqrt{R_{bx}^2 + R_{bz}^2} = 12.8 \text{ N}$

### 3. Trois principes de Newton

La connaissance des lois de la mécanique générale énoncées par le physicien Newton en 1687 est indispensable afin de situer le cadre de chaque partie de la mécanique. Ces lois, qui s'énoncent sous forme de trois principes, posent comme postulat la forme des relations entre mouvements et actions mécaniques.

#### 3.1. Premier principe : principe d'inertie

Si un corps n'est soumis à aucune force (corps isolé) ou il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle, alors le centre d'inertie «G» du corps décrit un mouvement rectiligne et uniforme. Donc, tout corps demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, par rapport à un référentiel Galiléen, sauf s'il y a des forces le contraignent d'en changer. Ce principe énonce le principe de l'équilibre des forces qui constitue l'objet essentiel de la statique.

#### Remarque

Un état de repos est un cas particulier du mouvement rectiligne uniforme, la vitesse étant constamment égale à zéro.

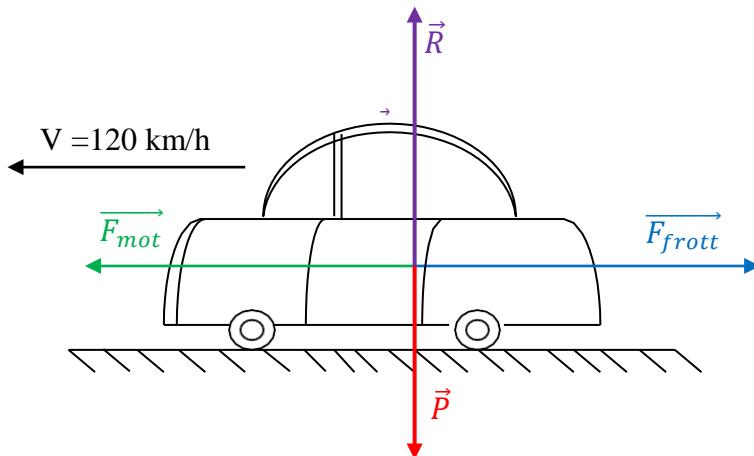
#### Exemples

Considérons une voiture qui roule à 120 km/h sur une autoroute rectiligne et horizontale.

- Selon le principe d'inertie si la norme de la force motrice est exactement égale à la norme des forces de frottement, la voiture suit un mouvement rectiligne et uniforme.

- Si la force motrice est supérieure à la force de frottement, la voiture accélère, où la résultante de toutes les forces est un vecteur pointant vers l'avant.

- Si la force motrice est inférieure à la force de frottement, la voiture décélère, où la résultante de toutes les forces est un vecteur pointant vers l'arrière.

**Figure 3.11.** Schéma d'une voiture en mouvement

### 3.2. Deuxième principe

Par rapport à un référentiel Galiléen, le mouvement d'un point matériel « A » de masse « m » et d'accélération «  $\gamma$  » soumis à plusieurs forces, satisfait à la relation :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{\gamma} \quad (6)$$

Autrement dit, toute force non compensée, agissant sur un corps est proportionnelle à la masse de ce corps et à son accélération. Ce principe montre bien, que lorsque la résultante des forces est nulle il n'y a pas d'accélération, ce qui confirme que le premier principe est un corollaire du deuxième principe.

### 3.3. Troisième principe

Cette loi énonce le principe de l'opposition des actions réciproques qui dit que la réaction est toujours opposée à l'action. Les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales, parallèles et dirigées en sens contraire. Dans ce principe les forces se présentent toujours en paire, où il serait nécessaire, lorsqu'on fait l'analyse de l'équilibre d'un système, d'isoler clairement ce système afin de ne retenir que la force de la paire qui agit sur le système en question. On résume qu'à chaque fois qu'un corps « A » exerce une force «  $\vec{F}_{A/B}$  » (force d'action) sur un corps « B » alors le corps « B » réagit en exerçant sur le corps « A » la force «  $\vec{F}_{B/A}$  » (force de réaction) tel que «  $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$  ».

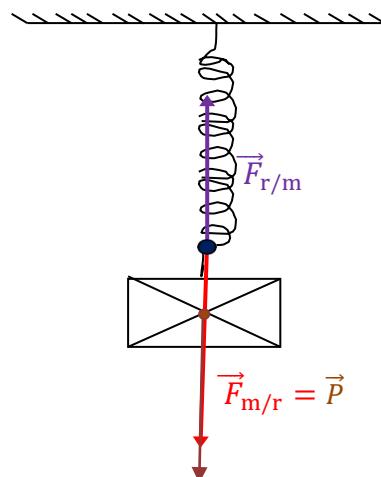
#### 3.3.1. Caractéristiques

- Les deux forces sont de sens opposés.
- Les deux forces ont la même direction
- Les deux forces ont la même norme :  $F_{A/B} = F_{B/A}$

#### Exemples

### a. Masse accrochée à un ressort

La masse exerce la force  $\vec{F}_{m/r}$  (le poids  $\vec{P}$ ) sur le ressort, responsable de l'allongement du ressort. La force «  $\vec{F}_{m/r}$  » exercée par la masse, son point d'application est sur le ressort. Le ressort réagit et exerce la force sur la masse et la tient en équilibre (contre son poids  $\vec{P}$ ), cette force exercée par le ressort, son point d'application est sur le fil relié à la masse à tout moment :  $F_{r/m} = F_{m/r}$ . (figure.3.12).



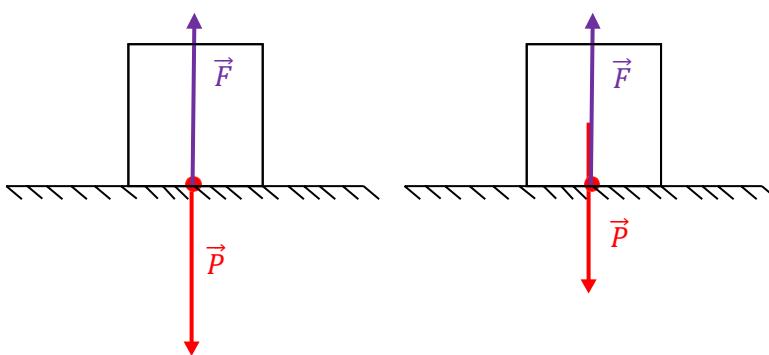
**Figure.3.12.** Masse accrochée à un ressort

### b. Objet posé sur un sol

Si un objet est posé sur le sol tant qu'il est repos, il va rester au repos, il exerce une force «  $\vec{F}$  » sur le sol égale à son poids «  $\vec{P}$  ». Réciproquement le sol exerce une force de réaction du sol sur l'objet opposée à «  $\vec{F}$  » la résultante des deux forces est nulle, ainsi le corps est en équilibre, et va rester au repos (figure.3.13).

#### Remarque

La réaction du sol est toujours perpendiculaire au sol,

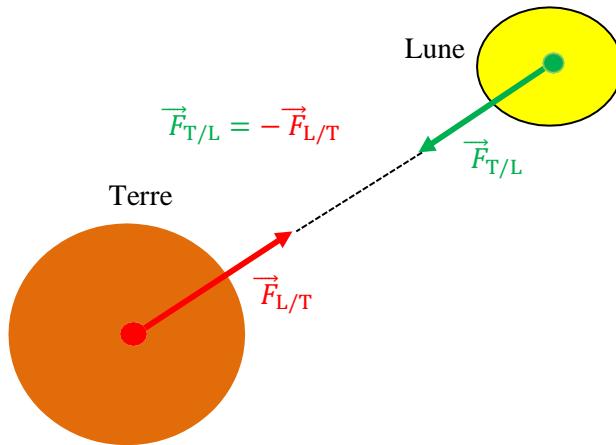


**Figure.3.13.** Action et réaction d'un objet posé sur le sol

## 4. Nature des forces

### 4.1. Force de Gravitation

La Lune décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre. C'est la force gravitationnelle «  $\vec{F}_{T/L}$  » que la Terre exerce sur la lune qui la tient sur cette orbite. Si cette force de gravitation n'existe pas, la Lune serait un corps quasiment isolé et elle partirait à vitesse constante sur une trajectoire rectiligne. En revanche, la Lune attire la Terre avec la force «  $\vec{F}_{L/T}$  » opposée à «  $\vec{F}_{T/L}$  ». Cette force est aussi responsable des marées océaniques. Les deux forces, ont la même direction, la même norme et sont de sens opposé (figure.3.14).

**Figure.3.14.** Action, réaction entre la Terre et la Lune

## 4.2. Force de Pesanteur

La force de pesanteur est la force qui nous maintient à la surface de la terre, plus communément appelée le poids. Elle est due à la présence du champ d'accélération gravitationnel terrestre, plus connu sous le nom de champ de pesanteur, et que l'on désigne généralement par «  $g$  ». Ce champ n'est ni constant dans le temps, ni uniforme sur toute la surface de la terre.

## 4.3. Force du Poids

D'après le deuxième principe de la dynamique, la présence du champ de pesanteur implique que tout corps massique est soumis à une force qui est son poids. D'après les caractéristiques de «  $g$  », précédemment décrites, cette force est verticale dirigée vers le bas, notée «  $P$  », s'exprime en fonction de la pesanteur :

$$P = m \times g \quad (7)$$

L'unité du poids dans le (SI) est le Newton (N).

## 4.4. Forces de contact ou réactions d'appuis

De façon générale, les appuis s'opposent aux forces provoquant la mise en mouvement des objets. Nous avons vu que les conditions de la statique conduisent, pour des problèmes plan, à un système de trois équations. Les deux premières traduisent l'équilibre de translation selon les axes du repère, et la troisième, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan, traduit l'équilibre de rotation.

## 4.5. Forces de frottement

Les forces de frottement ont pour effet de s'opposer au déplacement relatif de deux corps se trouvant en contact. Ces forces sont parallèles aux surfaces. On les désigne par «  $R_t$  » :

réaction tangentielle. Elles dépendent d'une part, de la force normale joignant les deux corps, que l'on désigne «  $R_N$  » : réaction normale, et d'autre part, de la nature des matériaux des surfaces en contact et de leur rugosité. Ces deux paramètres sont pris en compte, dans le bilan des forces, par un coefficient, noté «  $\mu$  ». La force de frottement s'exprime alors :

$$R_t = \mu \cdot R_N \quad (8)$$

On distingue : force de Frottements statiques et force de Frottements dynamique.

#### 4.5.a. Force de frottements statiques

Le frottement statique intervient entre surfaces immobiles, l'une par rapport à l'autre. Ainsi, lorsqu'une force croissante est appliquée à un objet maintenu en équilibre par un appui, la force de frottement statique entre les deux surfaces en contact croît pour s'opposer au déplacement de l'objet. Cette force ne peut dépasser une valeur limite. On désigne par «  $R_{t\max}$  » sa valeur maximale. Ceci implique que pour une valeur limite de la force appliquée, la réaction due au frottement n'est plus suffisante pour empêcher la mise en mouvement de l'objet. Ceci est traduit par l'inégalité:

$$R_t \leq R_{t\max} = \mu_s R_N \quad (9)$$

$\mu_s$  est le coefficient de frottement statique

#### 4.5.b. Force de frottements dynamiques

Lorsque les deux objets sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, une force de frottement persiste et réduit la vitesse de déplacement. La valeur de ces forces est ordinairement inférieure au maximum atteint par la force de frottement statique. Les frottements dans ce cas sont dits dynamiques, s'expriment par :

$$R_T = \mu_d R_N \quad (10)$$

$\mu_d$  : est le coefficient de frottement dynamique.

### 5. Appuis

On distingue les appuis simples et les appuis articulés

#### 5.1. Appuis simples

L'appui simple représente les réactions mises en jeu lorsque l'on pose un objet sur un autre. Dans ce cas, la réaction est décrite par une force dont la direction et le point d'application sont connus, la direction étant bien sûr la normale à la surface de contact. Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'intensité de la force. Cet appui permet deux degrés de liberté : la translation, du système étudié par rapport à la surface d'appui, et la rotation autour du point d'application (figure 3.15.a).

## 5.2. Appuis articulés

L'appui articulé, également appelé appui double, modélise toutes les liaisons réalisées à l'aide d'une articulation. Contrairement à l'appui simple, on doit déterminer deux inconnues, qui sont l'intensité et la direction. Cet appui permet un (1) degré de liberté, la rotation autour du point d'application. Il est commode de décomposer cette réaction en une composante normale à la surface d'appui et une composante parallèle à cette surface (figure 3.15.b).

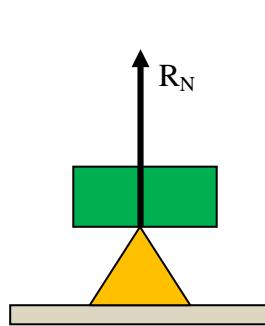


Figure 3.15.a. Appui simple

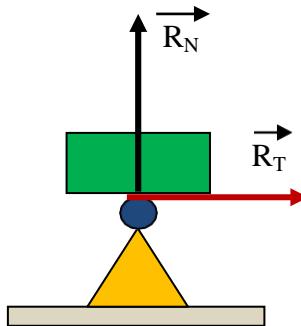


Figure 3.15.b. Appui articulé

## 6. Encastrements

L'encastrement est obtenu en emboîtant la structure étudiée. Dans ce cas, ni la direction ni le point d'application de la force ne sont connus. Cela est dû au fait, que chaque côté de l'encoche oppose des réactions. En effet, si l'on regarde en détail le contact entre les deux objets (voir le symbole (1) (figure.3.16), on remarque que chacun des côtés oppose des réactions différentes réparties sur toute la surface de contact. La conséquence de l'ensemble des réactions produites, qui fait tout l'intérêt de ce type d'appui, est d'empêcher toute rotation de la structure. En d'autres termes, il produit un moment contraire aux moments imposés à la structure que l'on appelle moment d'encastrement.

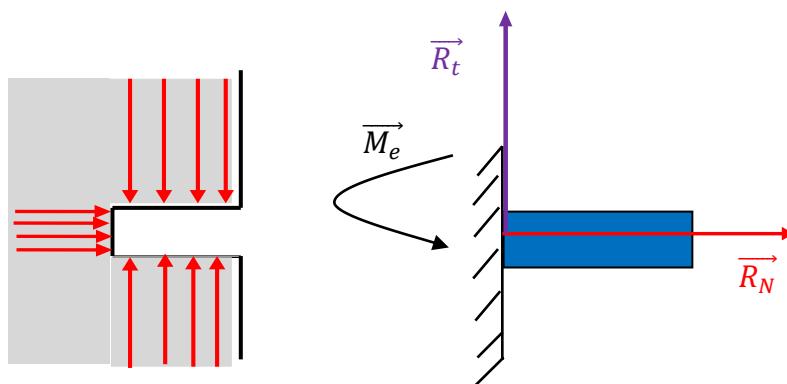


Figure 3.16. Schéma d'encastrement

## 7. Méthode de résolution

Lors du chapitre précédent, nous avons résolu des problèmes de statique graphiquement. Cette méthode est limitée à des problèmes dans un plan et à des solides

soumis à deux (2) ou trois (3) forces. La méthode de résolution analytique, permet de résoudre des problèmes dans l'espace pour des solides soumis à plusieurs forces. Elle permet d'obtenir jusqu'à six (6) équations.

Après la compréhension du système à étudier à l'aide des énoncés, isoler le corps solide ou un ensemble de solide et faire le bilan des actions mécaniques extérieures en les écrivant en leurs points d'applications : ce sont **les équations de l'équilibre statique**.

Pour qu'un corps solide soit en équilibre sous l'action de « n » forces (actions mécaniques), il faut que ces équations satisfassent l'équilibre statique par rapport à un point de référence « A »

### - Equations de l'équilibre statique

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad : \text{Equilibre de translation}$$

$$\sum_{i=1}^4 \overrightarrow{M_{i/A}} = \vec{0} \quad : \text{Equilibre de rotation}$$

## 8. Etapes de résolution

1. Identifier toutes les forces appliquées.
2. Identifier les positions où sont appliquées les forces.
3. Etablir l'équation (3)
4. Etablir l'équation (5). S'il manque des équations pour résoudre le système d'équation déduite des relations (3) et (5) établir l'équation (5) pour un autre point de référence
5. Résoudre le système d'équations et calculer les valeurs numériques des inconnus.

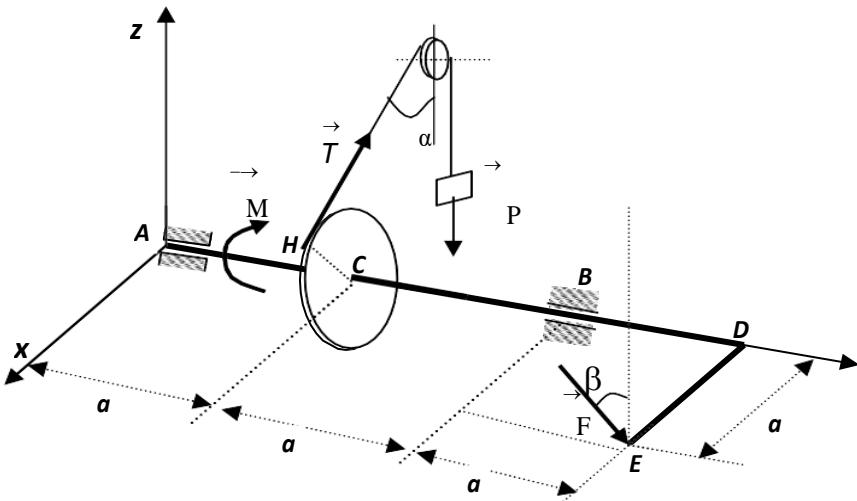
### Remarque

Avant de commencer la résolution, vérifier que le nombre d'inconnues est inférieur ou égal au nombre d'équations.

### Application

Un système mécanique composé d'une barre coudée (**AD**) de masse négligeable et d'un disque de rayon **R**, de masse négligeable, soudé à celle-ci au point **C** comme indiqué sur la figure (3.17). La barre est supportée par deux liaisons cylindriques en « **A** » et « **B** ». On relie le disque à une poulie fixe par un câble inextensible, de masse négligeable, auquel est suspendue un poids « **P** ». Au point « **E** », dans un plan parallèle au plan (**xAz**), est appliquée une force «  $\vec{F}$  » inclinée par rapport à la verticale d'un angle  $\beta=30^\circ$ . Un moment «  $\vec{M}$  » à la barre afin de maintenir le système en position d'équilibre statique dans le plan horizontal (**xAy**). On donne  $F = 2P$ , et  $\alpha = 60^\circ$ .

-Déterminer les réactions ( $R_A$  et  $R_B$ ) respectivement aux points A et B et le moment «  $M$  » pour que le système soit en position d'équilibre statique dans le plan horizontal (**xAy**).



**Figure 3.17.** Système mécanique

## Solution

Le système est en équilibre statique, suivant les deux lois de la statique nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^4 \overrightarrow{M_{i/A}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad (2)$$

-D'après le schéma la poulie est en équilibre statique alors :  $T = P$  nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \vec{R}_A & \begin{pmatrix} R_{AX} \\ 0 \\ R_{AZ} \end{pmatrix}, & \vec{T} & \begin{pmatrix} -P\sin\alpha \\ 0 \\ P\cos\alpha \end{pmatrix}, & \vec{M} & \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{R}_B & \begin{pmatrix} R_{BX} \\ 0 \\ R_{BZ} \end{pmatrix}, & \vec{F} & \begin{pmatrix} -2P\sin\beta \\ 0 \\ -2P\cos\beta \end{pmatrix} \\ \vec{AB} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{AH} & \begin{pmatrix} R\cos\alpha \\ a \\ R\sin\alpha \end{pmatrix}, & \vec{AE} & \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}: \end{aligned}$$

-On fait la projection de l'équation (1) sur les axes nous, ainsi qu'un développement de l'équation vectorielle nous obtenons ce qui suit :

$$R_{AX} + R_{BX} - 2P \sin \beta - P \sin \alpha - P \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

$$0 = 0 \quad (4)$$

$$R_{AZ} + R_{BZ} - 2P\cos\beta + P\cos\alpha = 0 \quad (5)$$

$$2aR_{BZ} - 6aP\cos\beta + aP\cos\alpha = 0 \quad (6)$$

$$2a.P.\cos\beta - M - R.P = 0 \quad (7)$$

$$-2aR_{BX} + 6aP\sin \beta + aP \sin \alpha = \quad (8)$$

De l'équation (7)  $\Rightarrow M = 2a.P.\cos\beta - R.P = P(1.732 a - R)Nm$

De l'équation (8)  $\Rightarrow R_{BX} = 3P \sin \beta + \frac{P}{2} \sin \alpha = 1.933P$  N

De l'équation (6)  $\Rightarrow R_{BZ} = 3P \cos \beta - \frac{z}{2} \cos \alpha = 2.342 P N$

De l'équation (5)  $\Rightarrow R_{4Z} = 2P \cos \beta - P \cos \alpha - R_{BZ} = -1.116P$

De l'équation (4)  $\Rightarrow R_{AV} = R_{BV} = ON$

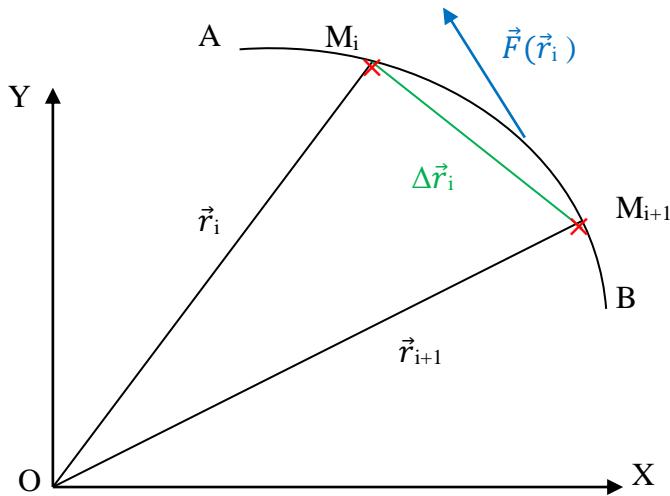
De l'équation (3)  $\Rightarrow R_{Ax} = 2P\sin\beta + P\sin\alpha - R_{Py} = 0,067PN$

## Chapitre 4

### Travail et énergie

#### 1.Travail d'une force

Considérons un corps en mouvement sur une courbe quelconque, sur lequel on applique une force «  $\vec{F}$  » qui peut varier au cours du temps le long de la trajectoire. Pour considérer que la force «  $\vec{F}$  » est constante sur un déplacement élémentaire «  $\Delta\vec{r}$  » On peut donc décomposer le chemin suivi par le point M en petits déplacements élémentaires, tels que «  $\Delta\vec{r}_i$  » est entre deux points «  $M_i$  » et «  $M_{i+1}$  » qui sont suffisamment proches (figure.4.1).



**Figure.4.1.** Déplacement élémentaire sous l'action d'une force

#### 1.1. Travail élémentaire

Le travail élémentaire de «  $\vec{F}$  » sur le déplacement «  $M_i M_{i+1}$  » peut être écrit ainsi :

$$\delta W_i = \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \quad (1)$$

#### 1.2. Travail total

Le travail total de «  $\vec{F}$  » sur la trajectoire entre les points « A » et « B » correspond donc à la somme des travaux élémentaires, comme suit :

$$W_{A \rightarrow B} (\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \quad (2)$$

Si on prend des déplacements élémentaires très petits jusqu'à devenir des infinitésimaux notés «  $d\vec{r}$  » alors la somme discrète ( $\sum$ ) peut être remplacée par une somme continue (sous forme d'intégrale), comme suit :

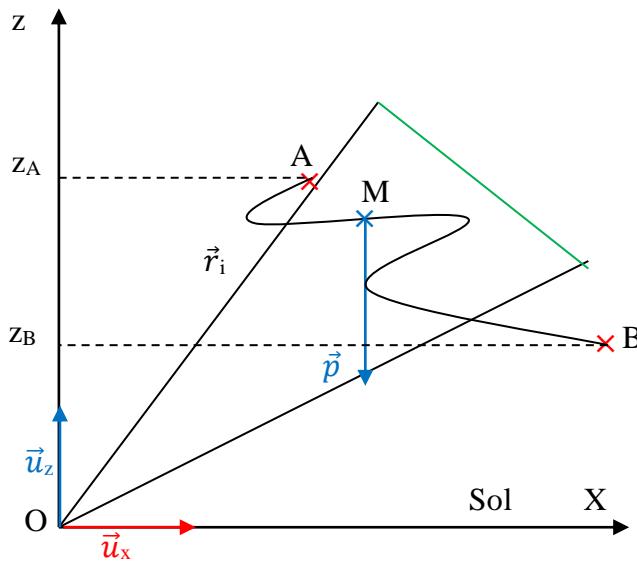
$$W_{A \rightarrow B} (\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

## 2. Forces conservatives et énergie potentielle

Certaines forces possèdent une propriété caractéristique importante concernant le calcul de leur travail. C'est le cas de la force d'attraction gravitationnelle qui est présentée ici comme exemple de ces forces particulières.

### 2.1. Travail de la force d'attraction gravitationnelle

Calculons le travail du poids considérons un corps assimilé au point «M» de masse «m», qui se déplace sur une trajectoire quelconque, entre un point «A» de cote «z<sub>A</sub>» et un point «B» de cote «z<sub>B</sub>» (figure.4.2).



**Figure.4.2.** Travail de la force d'attraction gravitationnelle

Le vecteur poids s'écrit :  $\vec{P} = -m \cdot \vec{g} = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \vec{u}_z$  (4)

Le travail de la force de gravitation exercée sur le point M entre les points A et B, peut s'écrire :

$$W_{A \rightarrow B} (\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \vec{u}_z \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

Le vecteur position s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$$

Donc :  $d\vec{r} = \overrightarrow{dOM} = dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z$  (6)

On introduit  $d\vec{r}$  dans l'expression du travail énoncée plus haut, et comme les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$  sont orthonormés deux à deux, il ne reste que la composante selon  $\vec{u}_z$  dans le produit scalaire sous l'intégrale. Ainsi, on obtient :

$$W_{A \rightarrow B} (\vec{P}) = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \vec{u}_z \cdot d\vec{r} = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot dz = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot (z_B - z_A) \quad (7)$$

## 2.2. Propriétés

Ce travail ne dépend que de la position de départ «A» et de l'arrivée «B» du point «M». Il ne dépend pas du chemin parcouru, donc la force d'attraction gravitationnelle est **conservative**. Trois cas peuvent alors se produire :

\*  $z_A > z_B$  :  $W_{A \rightarrow B} (\vec{P})$  est **positif** et donc **moteur** dans la chute de «M».

\*  $z_A < z_B$  :  $W_{A \rightarrow B} (\vec{P})$  est **négatif, résistant** et s'oppose au mouvement de chute de «M».

\*  $z_A = z_B$ , dans ce cas  $W_{A \rightarrow B} (\vec{P})$  est **nul**, le poids **ne travaille pas**.

Le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée est nul, car les points de départ et d'arrivée sont identiques. Il s'exprime par la relation suivante :

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (8)$$

### Remarque

Lorsque le point d'application de la force se déplace d'une position «A» à une position «B» et le travail de cette force est indépendant de la trajectoire suivie par le point, la force est dite **force conservative**

## 2.3. Énergie potentielle gravitationnelle

Puisque le travail du poids ne dépend que des positions initiale et finale du mobile, on peut introduire une fonction qui ne dépend que de la position du mobile. Cette fonction est appelée énergie potentielle et se note « $E_p$ ». On peut donc écrire la relation suivante:

$$W_{A \rightarrow B} (\vec{P}) = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot dz = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot (z_B - z_A) = -(E_p(B) - E_p(A)) \quad (9)$$

En choisissant un point de référence où l'énergie potentielle est nulle, l'énergie potentielle gravitationnelle (exprimée en Joule qui vaut  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ) est donc définie comme suit:

$$E_p(z) = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot z + E_0 \quad (10)$$

$E_0$  : est une constante définie à partir des conditions initiales par exemple choisir que l'énergie potentielle est nulle quand «  $z = 0$  », pour avoir «  $E_0 = 0$  ».

### Remarques

a. Le signe « moins, - » dans l'expression du travail de la force conservative en fonction de la variation d'énergie potentielle est purement arbitraire, et est utilisé principalement pour des simplifications d'écriture notamment pour l'énergie potentielle gravitationnelle.

b. La force conservative dérive de l'énergie potentielle suivant la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot \vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot \vec{u}_z \quad (11)$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \quad (12)$$

$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot \vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot \vec{u}_z \right) \quad (13)$$

### 3. Énergie cinétique

Il a été montré que l'effet d'une force pouvait être caractérisé par le travail de cette force, mais aussi par ce qu'il est appelé « la force vive » correspondant en fait au double d'une énergie dite cinétique. On peut trouver l'expression de cette énergie cinétique, à partir de la chute libre d'un corps qui depuis une hauteur «  $h$  » peut atteindre une vitesse au sol, cette vitesse a l'expression suivante :

$$\|\vec{v}_s\| = \sqrt{2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot h} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \|\vec{v}_s\|^2 = \|\vec{g}\| \cdot h \quad (14)$$

En multipliant par la masse, on obtient

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}_s\|^2 = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot h = \|\vec{P}\| \cdot h \quad (15)$$

Ce qui confirme que l'effet d'une force peut se mesurer par son travail, mais aussi par une énergie dite cinétique, exprimée en joules comme le travail.

#### 3.1. Théorème de l'énergie cinétique

Considérons le mouvement d'un point «  $M$  » de masse «  $m$  », mobile dans un référentiel galiléen «  $R$  », sous l'action d'une force quelconque «  $\vec{F}$  ». D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :  $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ ,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$

Le travail de la force «  $\vec{F}$  » entre deux points «  $A$  » et «  $B$  » est donc :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot (\vec{v} \cdot dt) = \int_A^B m \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{v})$$

Complément mathématique :  $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2 \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$  aussi  $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}^2\|$

Donc :

$$\int_A^B m \cdot (\vec{v} \cdot d\vec{v}) = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}^2\|\right) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} m \cdot (v_B^2 - v_A^2)$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} (E_{C_B} - E_{C_A}) \quad (16)$$

#### Remarques

a. Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique entre deux positions est égale au travail de la force résultante appliquée entre ces deux positions.

b. Dans le cas de plusieurs forces appliquées, on fait la somme vectorielle de ces forces pour obtenir la force résultante, puis on calcule le travail de cette dernière.

### 3.2. Cas des forces conservatives

Considérons un point «M» mobile dans un référentiel galiléen, et soumis à l'action d'une force résultante conservative « $\vec{F}$ ». Alors le théorème de l'énergie cinétique implique :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \Leftrightarrow E_{c_B} - E_{c_A} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \Rightarrow E_{p_A} + E_{c_A} = E_{p_B} + E_{c_B} \quad (17)$$

## 4. Énergie mécanique

L'énergie mécanique du point « M » est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives qui lui sont appliquées. Cette énergie est désignée par « $E_M$ » son expression est la suivante :

$$E_m = E_p + E_c \quad (18)$$

La relation établie plus haut peut donc s'écrire simplement en introduisant la notion d'énergie mécanique

$$E_m(A) = E_m(B)$$

### 4.1. Cas des forces non conservatives

Lorsqu'il existe une force « $\vec{F}_{NC}$ » non conservative, en plus des forces conservatives de résultante « $\vec{F}_C$ », le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A)$$

Or, le travail des forces conservatives peut s'écrire comme la variation d'énergie potentielle ; on obtient donc la relation suivante :  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) - (E_p(B) - E_p(A)) = E_c(B) - E_c(A)$

On obtient donc :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) \quad (19)$$

### Théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives exercées sur ce point.

### Remarques

**a.** Les forces de frottement sont typiquement des forces non conservatives : en effet leur travail dépend fortement du chemin suivi. À noter aussi que ces forces exercent un travail résistant qui s'oppose au mouvement. Ainsi la présence de forces de frottement conduit à une diminution de l'énergie mécanique.

**b.** Certaines forces sont dites conservatives, c'est-à-dire que leur travail ne dépend pas du chemin parcouru, ce travail étant égal à la variation d'énergie cinétique (théorème de l'énergie

cinétique)  $E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$  peut, dans ce cas, aussi s'écrire sous forme d'une différence d'énergie potentielle ( $E_p$ ). Pour des forces conservatives, on constate alors que l'énergie mécanique ( $E_m = E_C + E_p$ ) se conserve lors du mouvement.

## 5. Travail d'une force : cas particulier

En 1686, Gottfried Leibniz a proposé de caractériser l'effet d'une force par une grandeur scalaire appelée travail de la force. Ainsi le travail d'une force «  $\vec{F}$  » constante au cours d'un déplacement d'un point « A » vers un point « B » ( $AB = d$ ) se définit comme suit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot \|d\| \cdot \cos\alpha \quad (20)$$

«  $\alpha$  » : correspond à l'angle entre les vecteurs «  $\vec{F}$  » et «  $\vec{d}$  ». Deux cas se présentent figures (4.3.a, 4.3.b) de ce fait le travail est une grandeur algébrique qui peut être positive ou négative.

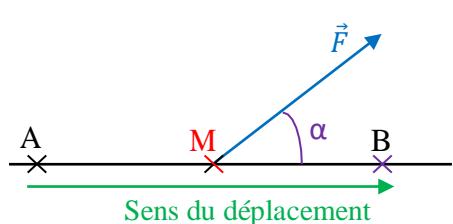


Figure 4.3.a. Travail moteur de «  $\vec{F}$  »

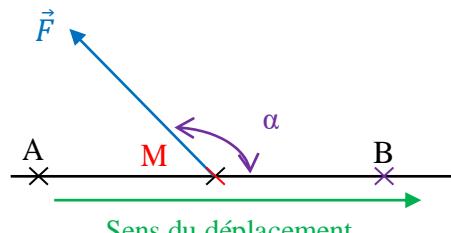


Figure 4.3.b. Travail résistant de «  $\vec{F}$  »

Lorsque la force «  $\vec{F}$  » est exercée dans le sens du mouvement (figure 4.3.a.), on dit que le travail de «  $\vec{F}$  » est moteur car il contribue au déplacement du point « M ». Lorsque la force «  $\vec{F}$  » est exercée dans le sens opposé au mouvement (figure 4.3.b.), on dit que le travail de «  $\vec{F}$  » est résistant car il s'oppose au déplacement de « M ».

### Remarque

Du fait des propriétés du produit scalaire, lorsqu'une force s'exerce perpendiculairement au déplacement «  $\vec{F} \perp \vec{d}$  », on dit que cette force « ne travaille pas », c'est-à-dire que son travail est nul.

### Exemples

**1.** Les forces de gravitation exercées sur un corps en rotation autour d'un point, est toujours radiale et donc perpendiculaire au vecteur déplacement qui est tangent à la trajectoire circulaire.

**2.** La réaction du support dans le cas où il n'y a pas de frottement, est toujours perpendiculaire au support et donc ne travaille pas.

### Remarque

Un corps possède de l'énergie s'il est capable de produire un travail, autrement dit, l'énergie c'est du travail en réserve, elle peut se présenter sous diverses formes : thermique, mécanique, chimique, électrique, ...etc

La puissance mécanique notée « p » est la grandeur physique qui correspond au travail effectué par une force, divisé par le temps nécessaire : son unité (SI) est le Watt, noté « W ».

$$P = \frac{W(\vec{F})}{t} \quad (21)$$

## 6. Poulie

Une poulie appelée aussi machine simple, est un dispositif mécanique élémentaire qui permet de soulever une charge en appliquant une force réduite. Une poulie est composée d'une roue tournant autour d'un axe dont la jante porte une corde, un câble, une courroie.

### 6.1. Poulie fixe

Qui ne se déplace pas avec la charge à soulever. (figure.4.4). En soulevant la charge, la corde se déplace à vitesse constante. Elle est en équilibre sous l'action de deux forces : le poids de la charge «  $\vec{P}$  » et la force exercée par l'opérateur «  $\vec{F}$  ». L'équation de l'équilibre est :

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{P} \Leftrightarrow F = P \quad (22)$$

Considérons «  $\vec{F}_0$  » la force qu'il faut appliquer pour soulever la charge sans machine simple, on constate que :  $\vec{F}$  est de sens opposé à «  $\vec{F}_0$  » et les deux forces ont la même norme  $F = F_0 = P$ . On peut vérifier que pour soulever la charge d'une hauteur «  $h$  », il faut tirer le bout de la corde d'une distance :  $x=h$ .

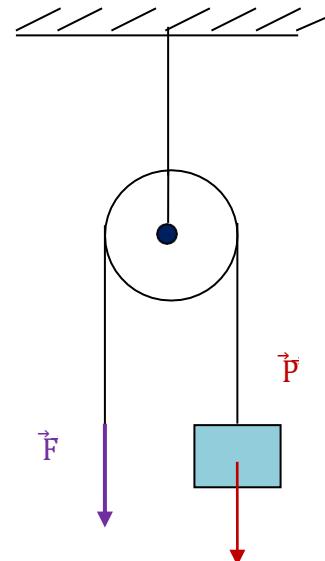


Figure.4.4. Poulie fixe

### 6.2. Poulie mobile

Une poulie mobile est une poulie qui se déplace avec la charge à soulever (figure.4.5.a,b).

Suspendons notre charge à une poulie mobile. L'équation de l'équilibre est :

$$\vec{T} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \quad (23)$$

La tension dans chaque brin de corde vaut :  $\vec{T} = -\frac{\vec{P}}{2}$ . Pour soulever la charge à vitesse constante, il faut donc appliquer la force :  $\vec{F} = -\frac{\vec{P}}{2}$

Si on compare la force «  $\vec{F}$  » qu'il faut appliquer au bout de la corde à la force «  $\vec{F}_0$  » : la force qu'il faut appliquer pour soulever la charge sans machine simple, on constate que «  $\vec{F}$  » est de même sens que «  $\vec{F}_0$  » et la norme de «  $\vec{F}$  » est la moitié de celle de «  $\vec{F}_0$  »  $F = \frac{F_0}{2} = \frac{P}{2}$ .

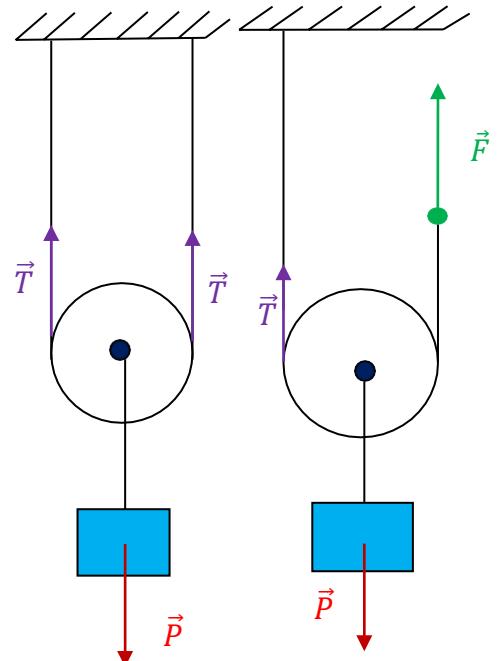


Figure.4.5.a. Charge suspendue à une poulie mobile  
Figure.4.5.b. Soulever une charge par une poulie mobile

On peut vérifier que pour soulever la charge d'une hauteur «  $h$  », il faut tirer le bout de la corde d'une distance :  $x = 2.h$ .

### 6.3. Palan : combinaison d'une poulie fixe et d'une poulie mobile

Un palan est un assemblage de plusieurs poulies sous plusieurs formes différentes (figure 4.6). Si «  $n$  » est le nombre de brin de corde qui supportent la charge, alors :

$$F = \frac{F_0}{n} = \frac{P}{n} \text{ et } x = n.h \quad (24)$$

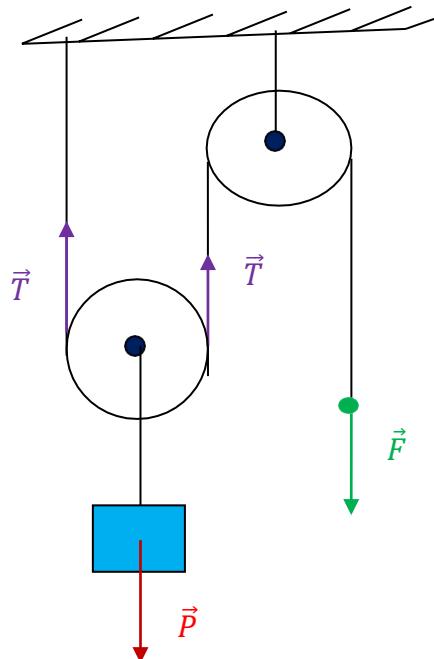


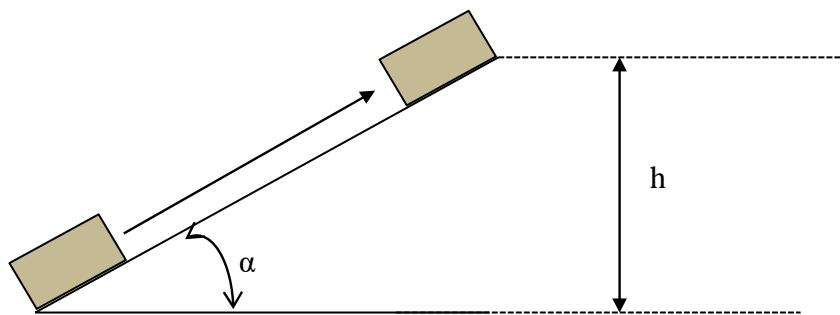
Figure 4.6. Palan formé par une poulie fixe et une poulie mobile

### Conclusions

1. Une poulie fixe change le sens de la force nécessaire à soulever une charge, mais la norme de la force et la distance dont il faut déplacer le bout de la corde restent inchangées.
2. Une poulie mobile garde inchangé le sens de la force nécessaire à soulever une charge, mais la norme de la force est divisée par deux. La distance dont il faut tirer le bout de la corde est multiplié par deux.
3. Si on soulève une charge par un palan, la norme de la force à appliquer au bout de la corde est égale à la norme du poids divisée par le nombre de brins de corde. La distance dont il faut déplacer le bout de la corde sera la hauteur **multipliée** par le nombre de brins de corde.

### 7. Plan incliné

Un plan incliné est une surface plane inclinée par rapport à l'horizontal d'un angle «  $\alpha$  » (figure 4.7). C'est un autre moyen pour monter une charge, dont le frottement entre le plan et le corps doit être faible.

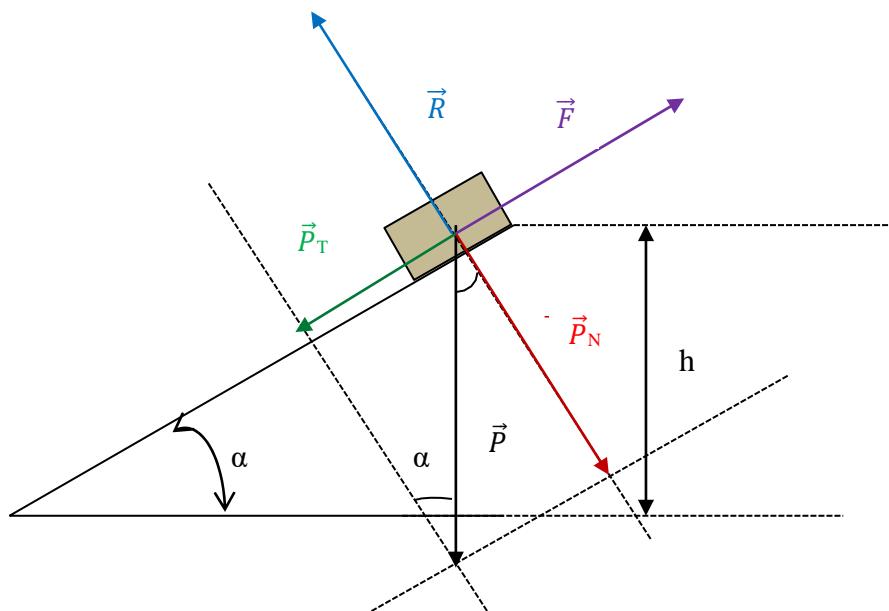


**Figure .4.7.** Soulever une charge avec un palan incliné à

Si on déplace la charge à vitesse constante, elle est en équilibre sous l'action de trois forces : la force de son poids «  $\vec{P}$  » vertical vers le bas, la force «  $\vec{F}$  » exercée par l'opérateur parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut et la réaction perpendiculaire «  $\vec{R}$  » du plan incliné.

Le corps est en équilibre :  $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$  (25)

Décomposons le poids «  $\vec{P}$  » en deux composantes : ( $\vec{P} = \vec{P}_T + \vec{P}_N$ ) une est tangentielle au plan «  $\vec{P}_T$  » l'autre est normale au plan «  $\vec{P}_N$  » (figure.4.8).



**Figure.4.8.** Charge en équilibre sur un plan incliné.

- Dans les triangles rectangles :  $\sin \alpha = \frac{P_T}{P} \Rightarrow P_T = P \cdot \sin \alpha$  et  $\cos \alpha = \frac{P_N}{P} \Rightarrow P_N = P \cdot \cos \alpha$
  - En remplaçant ( $\vec{P}$ ) par ( $\vec{P}_T + \vec{P}_N$ ) l'équation (25) devient :  $\vec{F} + \vec{P}_T + \vec{P}_N + \vec{R} = \vec{0}$
  - La composante normale du poids ( $\vec{P}_N$ ) est la force que la charge applique sur le plan incliné.
  - La réaction du plan incliné, «  $\vec{R}$  » est opposée à ( $\vec{P}_N$ ) (d'après le principe des actions réciproque):  $\vec{R} = -\vec{P}_N$  la norme de  $\vec{R}$  vaut donc :  $R = P_N = P \cdot \cos \alpha$ .
- Avec «  $\vec{R} = -\vec{P}_N$  » l'équation (25) est réduite à :  $\vec{F} + \vec{P}_T = \vec{0}$ .

## 7.1. Force de déplacement

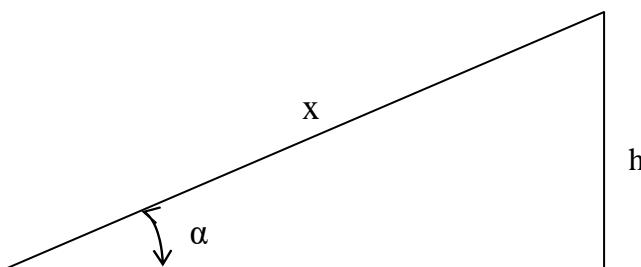
Pour déplacer la charge le long du plan incliné à vitesse constante, l'opérateur doit donc exercer la force «  $\vec{F}$  » opposée à «  $\vec{P}_T$  » :  $\vec{F} = -\vec{P}_T$ .

La norme de cette force vaut :  $F = P_T = P \times \sin \alpha$

Comme :  $0 < \sin \alpha \leq 1$ , on a :  $F \leq P$  : la force nécessaire pour soulever la charge à l'aide du plan incliné est donc moins grande que le poids.

## 7.2. Distance du déplacement

Déterminons la distance «  $x$  » de laquelle il faut déplacer la charge pour atteindre la hauteur «  $h$  » (figure 4.9).



**Figure 4.9.** Relation entre distance et hauteur au niveau du plan incliné

Suivant la figure 4.10. nous avons:  $\sin \alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sin \alpha}$

Comme :  $0 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow x \geq h$ , donc la distance «  $x$  » est plus grande que la hauteur «  $h$  »

### Conséquence

Pour soulever une charge à l'aide d'un plan incliné d'un angle «  $\alpha$  » la norme de la force à appliquer au corps est égale à la norme du poids multipliée par «  $\sin \alpha$  ».

La distance dont il faut déplacer cette force sera égale à la hauteur divisée par «  $\sin \alpha$  ».

### Remarque

Avec un plan incliné, on peut donc réduire la force à appliquer pour soulever une charge. Par contre, le chemin duquel il faut déplacer cette force devient plus long.

### Applications

**Application 1.** Soit la force  $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ . Calculer son travail lors du déplacement de A (0,0,0) à B (1,1,1) sur la trajectoire, l'équation instantanée est donnée par :  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^2$ .

### Solution

$$* \vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k} \quad \text{et } x = t, y = t^2, z = t^2$$

Donc :  $\vec{F} = (t^2 - t^4)\vec{i} + t^3\vec{j} + t^3\vec{k}$ ,  $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$ ,  $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$x = t \Rightarrow dx = dt$      $y = t^2 \Rightarrow dy = 2t \cdot dt$      $z = t^2 \Rightarrow dz = 2t \cdot dt$

$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B ((t^2 - t^4)\vec{i} + t^3\vec{j} + t^3\vec{k}) \cdot (dt\vec{i} + 2t \cdot dt\vec{j} + 2t \cdot dt\vec{k})$  avec :  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow$

$W_{A \rightarrow B} = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt + \int_0^1 (2t^4)dt + \int_0^1 (2t^4)dt$

$W_{A \rightarrow B} = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt + \int_0^1 (2t^4)dt + \int_0^1 (2t^4)dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4)dt = \left. \frac{t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} \right| = \frac{14}{15} J$

**Application 2.** On met un point matériel « M » dans un champ de forces définit par l'énergie potentielle :  $E_p = 2x^3 + 2x - x^2y + yz^2$ . Déterminer la force «  $\vec{F}$  » qui agit sur le point matériel. Calculer le travail de cette force en passant de A (1,2,-1) à B (2,4,-2) suivant la droite (AB), puis suivant la ligne brisée (ACDB), on donne C (2,2,-1) et D (2,4,-1). Interpréter le résultat.

### Solution

Détermination de la force «  $\vec{F}$  »

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = (-6x^2 + 2xy - 2)\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}$$

#### -Calcul du travail suivant la droite (AB)

$$W_{A \rightarrow B} = W_{(A B)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

D'après les coordonnées des points A et B on obtient l'équation de la droite :

$$\begin{cases} y = 2x & (1) \\ z = -x & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} dy = 2dx & (2) \\ dz = -dx & (2) \end{cases} \quad W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F_x \cdot dx + \int_A^B F_y \cdot dy + \int_A^B F_z \cdot dz \quad (3)$$

On remplace les deux systèmes d'équations (1) et (2), dans (3) on obtient :

$$\int_1^2 (-2x^2 - 2)dx + \int_A^B F_y \cancel{dy} + \int_1^2 -4x^2 \cdot dx = \frac{20}{3} + 0 - \frac{28}{3} = -16 J$$

#### -Calcul du travail suivant la ligne brisée ACDB

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow B} \quad \text{où} \quad W_{A \rightarrow C} = \int_A^C F_x \cdot dx = -10 J : (dy = dz = 0)$$

$$W_{C \rightarrow D} = \int_C^D F_y \cdot dy = 6 J : (dx = dz = 0), \quad W_{D \rightarrow B} = \int_C^D F_z \cdot dz = -12 J : (dx = dy = 0)$$

Donc:  $W_{ACDB} = -16 J$

On remarque que :  $W_{ACDB} = W_{(AB)}$  c'est-à-dire que la valeur du travail fourni par le mobile « M » reste la même si sa trajectoire change de forme. On peut donc conclure que le travail ne dépend pas de la trajectoire du mobile si la force dérive d'une énergie potentielle.

**Application 3.** Un point matériel « M » se déplace dans un repère orthonormé sous l'action d'une force «  $\vec{F}$  » définie par la relation :  $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{i} + 3xy\vec{j}$

-Est-ce que la force «  $\vec{F}$  » est une dérivée d'une énergie potentielle «  $E_p$  »

-Calculer le travail de cette force, sachant que le point « M » passe de A (0,0) à B (2,4) sur les trajectoires suivantes :

-Sur l'axe (Ox) de A (0,0) à C (2,0) puis parallèlement à l'axe (Oy) jusqu'à B (2,4)

-Sur l'axe (Oy) de A (0,0) à D (0,4) puis parallèlement à l'axe (Ox) jusqu'à B (2,4)

-Que peut-on conclure ?

## Solution

- Pour démontrer que la force «  $\vec{F}$  » est une dérivé d'une énergie potentielle «  $E_p$  », il faut chercher «  $E_p$  » comme suit :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow E_p = - \int F_x . dx = - \left( y^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \dots \dots (1)$$

De (1) et (2) :  $-\int F_x \cdot dx \neq -\int F_y \cdot dy$

Donc on peut conclure que ( $\vec{F}$ ) n'est pas une dérivée d'une énergie potentielle.

### -Calcul du travail

-Le point matériel se déplace sur l'axe (Ox) de A (0,0) à C (2,0) : ( $\text{dy} = 0$ ) puis parallèlement à l'axe (Oy) : ( $\text{dx} = 0$ ) jusqu'à B (2,4).

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow B} = \int_A^C F_x \cdot dx + \int_C^B F_y \cdot dy = \int_0^2 (y^2 - x^2) \cdot dx + \int_0^4 3xy \cdot dy \\ = \frac{136}{3} J$$

-Le point matériel se déplace sur l'axe ( $Oy$ ) de A (0,0) à D (0,4) : ( $dx = 0$ ) puis parallèlement à l'axe ( $Ox$ ) : ( $dy = 0$ ) jusqu'à B (2,4).

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow D} + W_{D \rightarrow B} = \int_A^D F_y \cdot dy + \int_D^B F_x \cdot dx = \int_0^4 3xy \cdot dy + \int_0^2 (y^2 - x^2) dx \\ = \frac{88}{3} J$$

Suivant les résultats obtenus ; on conclu que le travail fourni par le point matériel lors de son déplacement, n'est pas le même en changeant le chemin de son déplacement ( $W_{ACB} \neq W_{ADB}$ ). Ce qui confirme que la force sous la quelle il se déplace ne dérive pas d'une énergie potentielle.

## Chapitre 5

### Vibration et onde

#### 1. Introduction aux équations de Lagrange

La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre. Son mouvement est caractérisé par une équation différentielle du second ordre de la forme suivant la relation (1)

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t) \quad (1)$$

Avec :

$y$  : le déplacement (m)

$\dot{y}$  : la Vitesse ( $m.s^{-1}$ )

$\ddot{y}$  : l'accélération ( $m.s^{-2}$ )

$\delta$  : le coefficient d'amortissement

$\omega_0$  : la pulsation libre ( $rad.s^{-1}$ )

$A(t)$ : le second membre.

#### 1.1. Exemple et étapes de résolution

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4$$

Les conditions initiales sont :  $y(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = 0$

a. Pour résoudre l'équation, dans un premier temps on cherche la solution homogène lorsque :

$A(t)=0$ . L'équation devient donc :  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$

b. On transforme l'équation différentielle à une équation d'une variable de second ordre pour devenir :  $s^2+3s+2=0$ . On pose la solution :  $y(t) = e^{st}$

c. On calcule le déterminant :  $\Delta = b^2 - 4.a.c$  ( $b = 3$ ,  $a = 1$ ,  $c = 2$ ) : donc  $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

où l'équation admet deux solutions différentes données par:  $s_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$  ,  $s_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

d. En appliquant ces deux relations on trouve que :  $s_1 = -1$  et  $s_2 = -2$

e. Donc la solution Homogène est donnée par:  $y_H(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

f. On cherche la solution particulière lorsque:  $A(t) \neq 0$ . La solution particulière suit toujours la forme du second membre.

$$y_p(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{4}{2} \Rightarrow y_p(t) = 2$$

g. On déduit donc la solution générale:  $y(t) = y_H(t) + y_p(t) \Leftrightarrow y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 2$

h. Les deux constantes d'intégration :  $A_1$  et  $A_2$ , sont inconnues, pour les déterminer on utilise les conditions initiales :  $y(0) = 0 \Rightarrow A_1 e^0 + A_2 e^{-2 \cdot 0} + 2 = 0 \Leftrightarrow A_1 + A_2 + 2 = 0$  ..(1) aussi on a

$y(0) = 0$ . On fait d'abord la dérivé de  $y(t)$  :  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -A_1 e^{-t} - 2A_2 e^{-2t} + 0$   $y(0) \Leftrightarrow -A_1 - 2A_2 = 0 \dots (2)$  ( $e^0 = 1$ ) en résolvant le système d'équations (1) et (2) on obtient :  $A_1 = -4$  et  $A_2 = +2$  enfin la solution générale devient :  $y(t) = -4e^{-t} + 2e^{-2t} + 2$

## 2. Description d'un système oscillant

Un système oscillant est caractérisé par des mouvements périodiques au voisinage d'une position d'équilibre sous l'effet d'une perturbation extérieure (figure.5.1 et figure.5.2). Lorsque le mouvement est sinusoïdal, l'oscillateur est dit harmonique (figure.5.3).

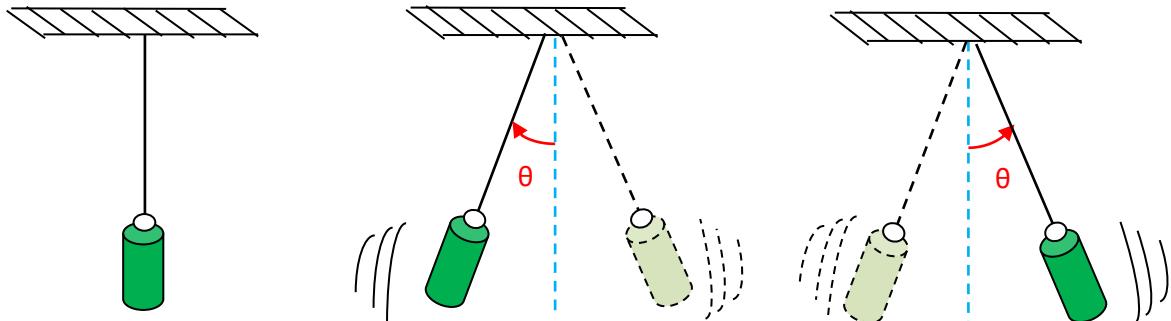


Figure.5.1. Position d'équilibre d'un oscillateur

Figure.5.2. Oscillateur en mouvement après son lancement

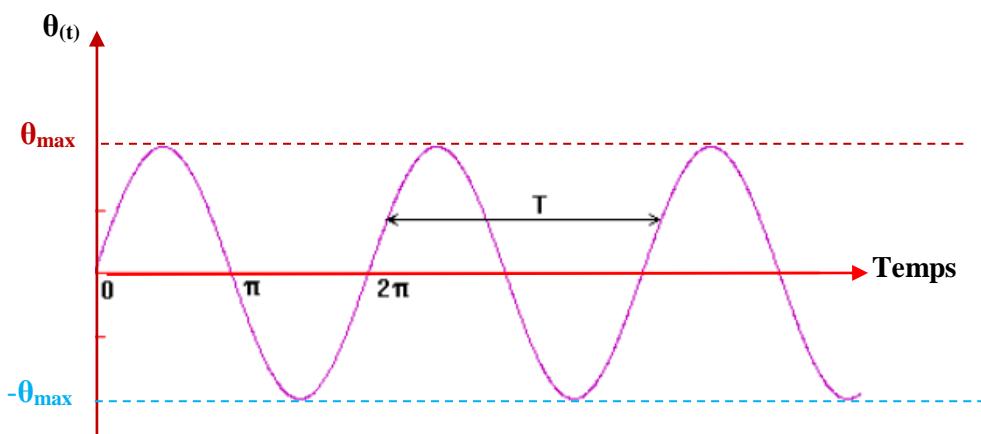


Figure.5.3. Oscillations harmoniques pour de petits angles

## 3. Mouvement d'un oscillateur harmonique

Le mouvement d'un oscillateur harmonique se caractérise par :

### 3.1. Amplitude

L'amplitude des oscillations correspond au déplacement (angulaire, linéaire) maximal : ( $\theta_{\max}$ ,  $X_{\max}$ ) (par rapport à la position d'équilibre). L'amplitude est désignée par « A », elle se mesure (SI) en radian pour le déplacement angulaire (rad) (figure.5.4.a et 5.4.b.) ou en mètre (m) pour le déplacement linéaire (figure.5.5.a et 5.5.b.).

### 3.2. Période

La période du mouvement est le temps nécessaire pour réaliser une seule

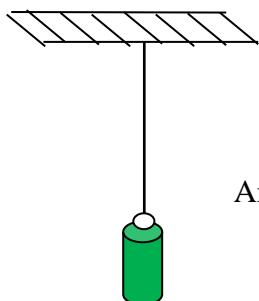
oscillation complète. La période est désignée par « **T** », elle se mesure en seconde « **s** ».

### 3.3. Fréquence

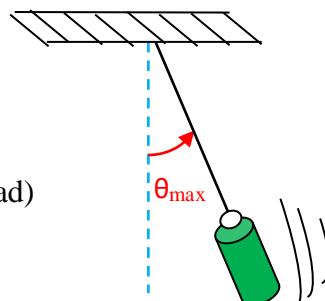
La fréquence d'oscillation est l'inverse de la période, elle représente le nombre d'oscillations effectuées en une seconde. Elle se mesure en Hertz « **Hz** ». La fréquence est désignée par :  $f = \frac{1}{T}$  (2)

### 3.4. Pulsation

La pulsation est une grandeur proportionnelle à la fréquence d'un phénomène périodique. En fonction de la fréquence elle est désignée par :  $\omega = 2\pi f$  (3)

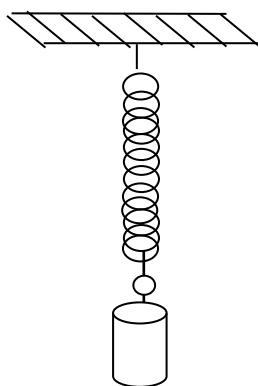


Amplitude :  $A = \theta_{\max}$  (rad)

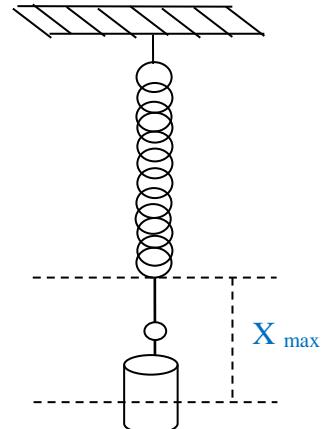


**Figure.5.4.a** Mouvement angulaire :  
position de repos

**Figure.5.4.b** : Mouvement angulaire :  
déplacement maximal



Amplitude :  $A = X_{\max}$  (m)



**Figure.5.5.a** Mouvement linéaire :  
position de repos

**Figure.5.5.b** : Mouvement linéaire :  
déplacement maximal

## 4. Vibration

Une vibration est sinusoïdale lorsqu'une masse attachée au bout d'un ressort est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée. Une vibration est périodique lorsque les mouvements se reproduisent globalement identiques à eux-mêmes à des périodes de temps mesurables. L'équation gouvernante est de la forme:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (4) \quad \text{ou bien} \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5)$$

A : est l'amplitude maximale (m).

$\varphi$  : est le déphasage par rapport à l'origine des temps.

$\omega_0$  : est la pulsation libre (rad.s<sup>-1</sup>).

## 4.1. Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange pour une particule est donnée par la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = F_{ext,q} \quad (6)$$

L : est le Lagrangien définit par:  $L = Ec - Ep = T - U$  (7)

Ec, T : est l'énergie cinétique du système ;

Ep, U : est l'énergie potentielle du système ;

q : est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$  : Les forces extérieures généralisées.

## 4.2. Degré de liberté

Le degré de liberté (d) est égal au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons (R).  $d = N - R$  (8)

Pour un système conservatif, la force appliquée dérive d'un potentiel et l'équation s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0 \quad (9)$$

Dans le cas d'une force de frottement dépendant de la vitesse du système « $\vec{v}$ » et du coefficient de frottement « $\alpha$ » ( $\vec{F} = -\alpha \cdot \vec{v}$ ) l'équation devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = -\alpha \dot{q} \quad (10)$$

Cette équation se généralise à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (11)$$

(D) : est la fonction de dissipation donnée par:  $D = \frac{1}{2} \alpha q^2$  (12)

Elle est liée à la force de frottement par:  $F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$  (13)

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation précédente s'écrit comme

suit :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q}$  (14)

Et pour un système à plusieurs degrés de liberté, elle devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,q_i} \quad (i = 1, 2, n) \quad (15)$$

## Application 1

- Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant:  $x(t) = 5\cos(25t + \frac{\pi}{3})$   
Où (x) est en centimètres, (t) est en secondes et la phase est en radians.
- Déterminer l'amplitude maximale, la pulsation propre, la fréquence et la période du mouvement. Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).
- Calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants (t=0s et t=0.5s).

## Réponse

-L'amplitude maximale est de 5 cm, la pulsation propre est  $\omega_0 = 25 \text{ rad/s}$ , la fréquence est  $f = 3.98 \text{ Hz}$ , la période propre est  $T_0 = 0.25 \text{ s}$ . La phase initiale est  $\phi = \pi/3 \text{ rad}$ .

-Le déplacement, à (t=0s):  $x(0) = 5\cos(\pi/3) = 2.5 \text{ cm}$

-La vitesse :  $\dot{x}(t) = (\frac{dx(t)}{dt}) = -125\sin(25t+\pi/3)$  à t=0,  $\dot{x}(0) = -125\sin(\pi/3) = -108.25 \text{ cm.s}^{-1}$

-l'accélération:  $\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = -3125\cos(25t+\pi/3)$  à t=0,  $\ddot{x}(0) = -3125\cos(\pi/3) = -1562.5 \text{ cm.s}^{-2}$

-à t=0.5 s  $x(0.5) = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\dot{x}(0.5) = -119.2 \text{ cm/s}$   $\ddot{x}(0.5) = -939.7 \text{ cm.s}^{-2}$

## 5. Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

### 5.1. Oscillateur linéaire

Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (15)$$

#### 5.1.a. Conditions d'équilibre

La condition d'équilibre est vérifiée par :  $\left. \frac{\partial Ep}{\partial q} \right|_{q=0} = 0 \quad (16)$

#### 5.1.b. Condition de stabilité

La condition de stabilité est donnée par:  $\left. \frac{\partial^2 Ep}{\partial q^2} \right|_{q=0} > 0 \quad (17)$

Dans un mouvement vibratoire l'énergie totale reste constante avec la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction du déplacement « x » (figure.5.6). Cela peut être interprété par la transformation d'énergie ; d'une énergie cinétique à une énergie potentielle, et quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vice versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

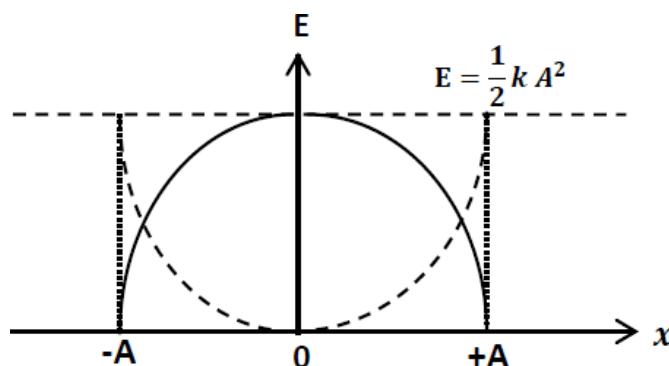


Figure 5.6. Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x

### 5.1.c. Équation différentielle

L'équation de Lagrange pour les oscillations libres d'un système conservatif est donnée

par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0 \quad (18)$$

La solution est :

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (19)$$

Pour calculer les constantes « A » et «  $\varphi$  », il nous faut les conditions initiales:

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (20)$$

En remplaçant ces conditions dans l'équation et sa dérivée, on obtient :

$$\begin{cases} A \cos \varphi = q_0 \\ -A \omega_0 \sin \varphi = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (21)$$

Pour calculer la constante « A », on a :

$$\cos \varphi = \frac{q_0}{A} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\dot{q}_0}{-A \omega_0} \quad \text{nous avons : } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \left( \frac{q_0}{A} \right)^2 + \left( \frac{\dot{q}_0}{-A \omega_0} \right)^2 = 1$$

Donc

$$A = \sqrt{\frac{q_0^2 \omega_0^2 + \dot{q}_0^2}{\omega_0^2}} \quad (22)$$

Le déphasage «  $\varphi$  » se calcule comme suit :

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\dot{q}_0}{q_0 \omega_0} \Rightarrow \varphi = -\arctg \left( \frac{\dot{q}_0}{q_0 \omega_0} \right) \quad (23)$$

## 5.2. Oscillations libres amorties à un degré de liberté

### 5.2.1. Amortissement des oscillations

L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps en raison des forces de frottement. Cette perte d'énergie peut se faire par simple frottement dans l'air (ou autre...). Elle peut être également provoquée par l'emploi d'un amortisseur qui limite l'amplitude des oscillations. Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prises en considération. Les frottements sont visqueux et dépendent de la vitesse.

### 5.2.2. Équation de Lagrange

L'équation de Lagrange des oscillations amorties est donnée comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (24)$$

La fonction de dissipation est définie par:  $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha \dot{q}$   $(25)$

L'équation différentielle devient :  $\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$   $(26)$

$\delta$  : Coefficient d'amortissement.

$\omega_0$ : Pulsation libre.

### -Résolution de l'équation différentielle

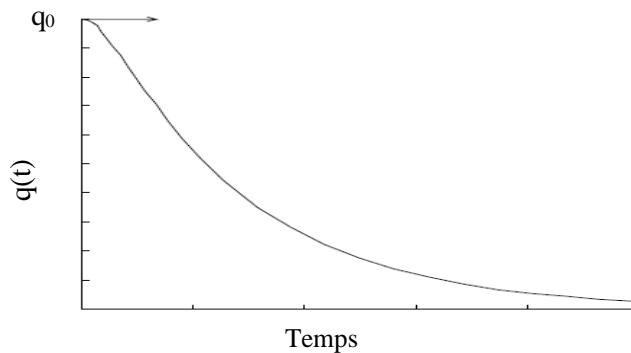
La solution de l'équation différentielle (26) dépend de la valeur de «  $\delta$  » par rapport à «  $\omega_0$  ». On distingue trois régimes: régime apériodique, régime critique et le régime pseudo périodique.

#### a. Régime apériodique

Le régime est apériodique (ou régime fortement amorti) si «  $\delta > \omega_0$  » la solution est:

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (27)$$

$A_1$  et  $A_2$  sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure.5.7 représente la solution «  $q(t)$  » en fonction du temps dans le cas particulier où  $q(0)=q_0$  et  $\dot{q}(0)=0$ . La solution  $q(t)$  décroît exponentiellement et tend vers zéro.



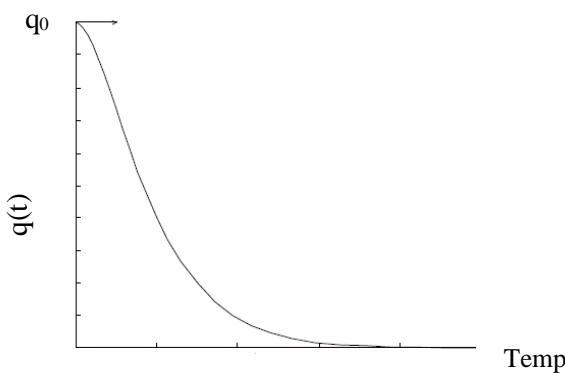
**Figure.5.7.** Variation de  $q(t)$  en fonction du temps pour le régime fortement amorti

#### b. Régime Critique

Si «  $\delta = \omega_0$  » le régime est critique, la solution est :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} \quad (28)$$

«  $A_1$  et  $A_2$  » sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales. La figure.5.8, montre la variation de la solution «  $q(t)$  » en fonction du temps.



**Figure.5.8 .** Variation de  $q(t)$  en fonction du temps pour le régime critique

Lorsque le temps augmente  $q(t)$  est une fonction qui tend vers zéro sans oscillation.

### c. Régime pseudopériodique

Si «  $\delta < \omega_0$  » le régime est pseudopériodique, la solution est :

$$q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) \quad (29)$$

« A,  $\varphi$  » sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. «  $\omega_D$  » est la pseudo pulsation définie par:  $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . La figure 5.9, montre la variation de « q(t) » en fonction du temps. On remarque que « q(t) » est enveloppée par deux fonctions exponentielles. Le lieu des maxima est obtenu en résolvant «  $\dot{q}(t) = 0$  ». Les maxima de q(t) sont séparés par des intervalles réguliers égaux à « T\_A ». « T\_A » est appelée la pseudo-période. On remarque donc que la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ( $\delta \ll \omega_0$ ), on peut remarquer que «  $\omega_D \approx \omega_0$  » et que la pseudo période est peu différente de la période propre :  $T_A \approx T_0 = 2\pi\omega_0$ .

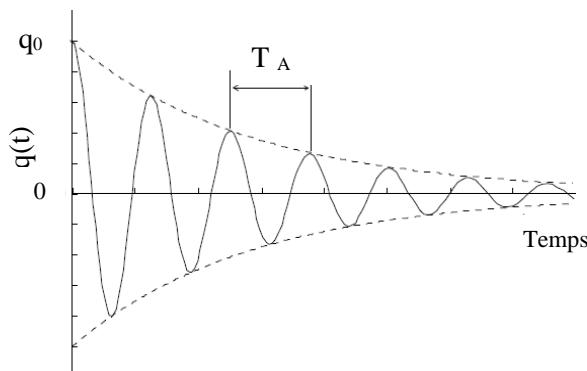


Figure 5.9. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime faiblement amorti (sous amorti)

### 5.3. Analogie électromécanique

L'analogie électromécanique entre le système mécanique **masse-ressort** et le système électrique RLC est regroupée dans le tableau suivant:

Tableau 1. Analogie électromécanique

| Systèmes mécaniques                     |  | Système électrique                   |
|---|--|--------------------------------------|
| Translation                             | Rotation                                 | Circuit RLC                          |
| Déplacement : x                         | Angle : $\theta$                         | Charge : q                           |
| Vitesse : $\dot{x}$                     | Vitesse angulaire : $\dot{\theta}$       | Courant : $\dot{q}$                  |
| Accélération : $\ddot{x}$               | Accélération angulaire : $\ddot{\theta}$ | Variation de courant : $\ddot{q}$    |
| Constante de raideur : k                | Constante de torsion : C                 | Inverse de la capacité : $1/c$       |
| Masse : m                               | Moment d'inertie : I                     | Inductance : L                       |
| Coefficience d'amortissement : $\delta$ | Coefficient d'amortissement : $\delta$   | Résistance : R                       |
| Energie cinétique : $(1/2)m\dot{x}^2$   | $(1/2)I\dot{\theta}^2$                   | Energie magnétique $(1/2)L\dot{q}^2$ |
| Energie potentielle : $(1/2)kx^2$       | $-mgh$                                   | Energie électrique $(1/2c)q^2$       |

## 5.4. Raideur équivalente

Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle.

### 5.4.1. Ressorts en parallèle

La figure 5.10.a, schématise l'association en parallèle de deux ressorts. L'équilibre des forces conduit à :  $k_1.x + k_2.x = k_{eq}.x \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$  (30)  
 $k_{eq}$  : est la raideur équivalente.

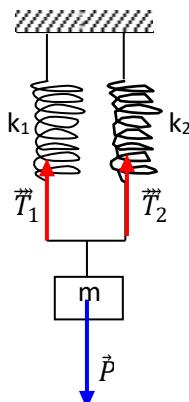
### 5.4.2. Ressorts en série

La figure 5.10.b, schématise l'association en série de deux ressorts. L'équilibre des forces conduit aux relations suivantes:  $k_1.x_1 = k_{eq}.x \Rightarrow x_1 = (k_{eq}/k_1).x$

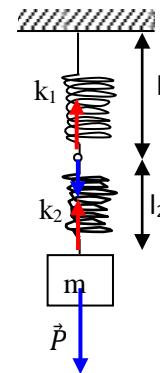
$$k_2.x_2 = k_{eq}.x \Rightarrow x_2 = (k_{eq}/k_2).x$$

L'élongation totale:  $x = x_1 + x_2 = x.[(k_{eq}/k_1) + (k_{eq}/k_2)]$

La raideur équivalente est :  $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$  (31)



**Figure.5.10.a.** Raideur en parallèle



**Figure.5.10.b.** Raideur en série

## Application

- Une tige « OC » de masse négligeable est articulée « sans frottement au point « O » et porte à son extrémité « C » une masse « m » (Figure.5.10). Deux ressorts de raideur «  $k_1$  » et «  $k_2$  » sont liés à la tige aux points « A » et « B » respectivement, à l'équilibre, la tige est horizontale et elle est écartée d'un angle «  $\theta$  » supposé très petit (faibles oscillations).
  - Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système puis déduire le Lagrangien.
  - Etablir l'équation du mouvement et trouver la solution  $\theta(t)$  si  $\theta_0 = \frac{\pi}{15}$  et  $\dot{\theta}_0 = 0$ .
- OA =  $l_1$    OB =  $l_2$    OC = 1

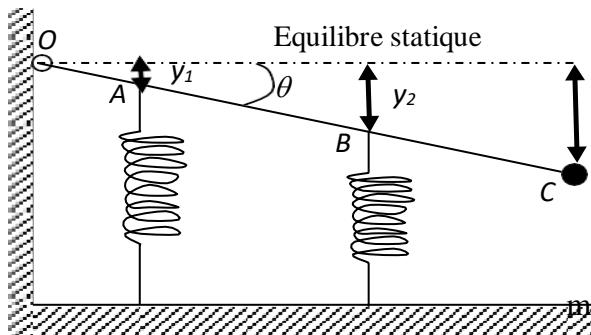


Figure 5.11. Système mécanique pendule-ressort

### Solution

-Energie cinétique et potentielle :

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot y^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2, \quad y = l\sin\theta \approx l\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot l^2\dot{\theta}^2$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2, \quad y_1 = l_1\sin\theta \approx l_1\theta, \quad y_2 = l_2\sin\theta \approx l_2\theta$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(l_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2\theta)^2$$

Le Lagrangien est défini par :

$$L = E_C - E_p \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}m \cdot l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1l_1^2\theta^2 - \frac{1}{2}k_2l_2^2\theta^2$$

-L'équation de Lagrange est donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m \cdot l^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m \cdot l^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_1l_1^2\theta - k_2l_2^2\theta$$

-L'équation du mouvement s'établit comme suit :

$$m \cdot l^2\ddot{\theta} + (k_1l_1^2\theta + k_2l_2^2\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{m \cdot l^2}\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{m \cdot l^2}}$$

-La solution de cette équation est de forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 = A\cos(\varphi) = \frac{\pi}{15} \Rightarrow A = -\frac{\pi}{15}, \quad \varphi = \pi$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0 = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$$

-L'équation est :  $\theta(t) = -\frac{\pi}{15}\cos(\omega_0 t + \pi)$ .

## Chapitre 6

### Mécanique des fluides

#### Introduction

La mécanique des fluides est une branche de la physique, elle consiste à étudier les écoulements de fluides, (liquide, gaz) lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. Le mouvement des liquides et des gaz est régi par les mêmes équations mais avec la différence que l'on considère en général les liquides comme étant incompressibles et les gaz compressibles. La mécanique des fluides se compose de deux parties principales :

- **Statique des fluides** ou hydrostatique qui concerne les fluides au repos observés par Archimède.

- **Dynamique des fluides.** Ou l'hydrodynamique Qui s'intéresse aux fluides en mouvement selon leur viscosité.

#### I. Hydrostatique

##### I.1. Définition du fluide

Un fluide est un corps dont les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment les unes des autres (gaz), de façon que le corps prenne la forme du vase qui le contient. Autrement dit un **fluide** est un ensemble de particules qui sont maintenues ensemble par de faibles forces de cohésion et les parois d'un récipient et susceptibles de s'écouler. Les fluides peuvent être répartis en deux catégories:

- les liquides qui sont pratiquement incompressibles. Ils produisent des surfaces libres, occupent des volumes bien définis quand ils sont en contact avec l'atmosphère
- les gaz qui sont compressibles et ils se dilatent jusqu'à occuper toutes parties du récipient qui les contient.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement à leur viscosité, une de leur caractéristique physico-chimique. La famille des fluides **newtoniens** comme l'eau, l'air et la plupart des gaz ont une viscosité constante, qui ne peut varier qu'en fonction de la température. et celle des fluides "**non newtoniens**" comme le sang, la boue, et les gels, lorsque ceux-ci s'écoulent leur viscosité varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent.

##### I.2. Principales grandeurs caractéristiques des fluides

###### I.2.1. Masse volumique

La masse volumique d'un fluide est une grandeur intensive qui ne dépend pas de la

quantité de matière. Elle est définie comme étant le rapport entre sa masse (m) et son volume (V). Désignée par «  $\rho$  » et s'exprime en ( $\text{Kg/m}^3$ ), elle se calcule par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

**Remarque :** la masse volumique d'un corps dépend :

- de la température : un corps se dilate et occupe plus de volume sous l'effet de la chaleur.
- de la pression : un corps occupe moins de volume sous l'effet de la compression.

### -Quelques ordres de grandeurs

| Fluides               | Air   | Eau douce | Eau de mer | Huile d'olive | Mercure | Essence | Glycérine |
|-----------------------|-------|-----------|------------|---------------|---------|---------|-----------|
| $\rho(\text{Kg/m}^3)$ | 1.293 | 1000      | 1030       | 920           | 13600   | 750     | 1260      |

### I.2.2. Densité

La densité d'un corps est définie comme étant le rapport de sa masse volumique à la masse volumique d'un corps de référence :

- L'eau pure à 4 °C pour les liquides et les solides.
- L'air à la même température et sous la même pression pour les gaz.

C'est une grandeur sans dimension, désignée par «  $d$  » et se calcule comme suit :

$$d = \frac{\rho_{\text{corps}}}{\rho_{\text{référence}}} \quad (2)$$

### -Application

Trouver la masse volumique et la densité de l'essence si une masse de 51 g occupe 75 cm<sup>3</sup>.

### - Solutions

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.051}{75 \times 10^{-6}} = 680 \text{ Kg/m}^3$$

$$d = \frac{\rho_{\text{essence}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{680}{1000} = 0.68$$

### I.2.3. Poids volumique

Le poids volumique d'un fluide représente la force de gravité agissant sur la masse par unité de volume, désigné par «  $\gamma$  » et s'exprime en ( $\text{N/m}^3$ ), il se calcule comme suit :

$$\gamma = \frac{m \times g}{V} = \rho \times g \quad (3)$$

On donne  $\gamma_{\text{eau}} = 10^4 \text{ N/m}^3$

## I.2.4. Viscosité

### I.2.4.1. Viscosité dynamique

La viscosité dynamique d'un fluide est une propriété importante, qui intervient lorsque le fluide est mis en mouvement suite à l'application d'une force. Elle traduit sa résistance à l'écoulement, par exemple dans un tube ou dans un canal. Cette résistance est principalement due à l'interaction entre ses molécules le constituant. Suivant la nature de l'écoulement, la viscosité est négligeable si le fluide est considéré parfait. La viscosité n'est plus négligeable si le fluide est considéré réel. Dans les liquides la viscosité est inversement proportionnelle à la température contrairement aux gaz où l'augmentation de la température entraîne une augmentation de la viscosité. Désignée par «  $\eta$  » sa Dimension est :  $[\eta] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$ , son unité dans le système international (SI) est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl).

### I.2.4.2. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique par la masse volumique du fluide. Désignée par «  $v$  » sa Dimension est :  $[v] = L^2 \cdot T^{-1}$ , son unité dans le système international (SI) est le ( $m^2/s$ ).

#### -Appareils de mesure

Selon que le fluide est soumis à un cisaillement tangentiel, à un écoulement laminaire ou à une déformation on distingue respectivement trois (3) classes d'appareil de mesure :

- a. Viscosimètre à mobile tournant (Viscosimètre de Couette).
- b. Viscosimètre à un écoulement laminaire (Viscosimètre d'Ostwald).
- c. Viscosimètre à chute libre (Viscosimètre d'Hoepler).

## I.2.5. Pression

La pression «  $p$  » [Pa] est une quantité scalaire, fonction de plusieurs variables comme l'altitude. La pression a la dimension d'une force par unité de surface [ $N/m^2$ ]. La pression est isotrope car elle ne dépend pas de la direction. Les efforts de pression s'exercent :

- Au sein d'un fluide ;
- A une interface entre deux (2) fluides ;
- Contre une paroi solide.

On note «  $p_{atm}$  » ou «  $p_a$  » la pression atmosphérique. La pression atmosphérique normalisée vaut :  $p_{atm} = 1,0125 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

### 1.2.5.1. Forces de pression

Considérons un élément de volume de fluide de masse «  $\Delta m$  » et de masse volumique «  $\rho$  » en équilibre mécanique avec le reste du fluide environnant. Cet élément de volume est soumis à des forces de volume et celles de surface.

**a. Forces de volume** : dues à l'existence de champs auxquels peut être soumis «  $\Delta V$  » et qui s'appliquent à tous les atomes contenus dans «  $\Delta V$  » (figure.6.1.a) :

- De gravité (pesanteur),
- Accélération.

**b. Forces de surface** : qui se décomposent en :

- Forces tangentielles «  $\vec{F}_t$  » liées à la viscosité du fluide (*cas des fluides en mouvement*)
- Forces normales «  $\vec{F}_N$  » à la surface en tout point de celle-ci et dirigées vers l'intérieur de l'élément de volume : **forces de pression hydrostatique**. (figure.6.1.b)

Dans le cas d'une surface plane ABCD de surface (figure. 6.1.c) sur laquelle la pression « P » est uniforme et la force de pression hydrostatique est définies par:

$$\vec{F} = P \cdot S \cdot \vec{n} \quad (4)$$

$\vec{n}$  : Vecteur unitaire perpendiculaire à la surface dans ce cas, la pression est définie par :

$$P = \frac{F}{S} \quad (5)$$

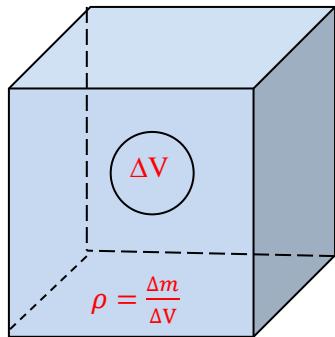


Figure.6.1.a. Forces de volume

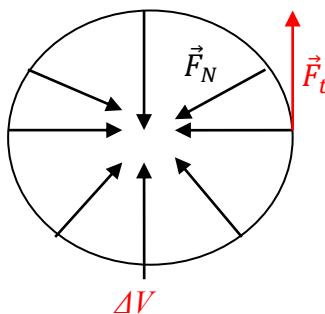


Figure.6.1.b. Forces de surface

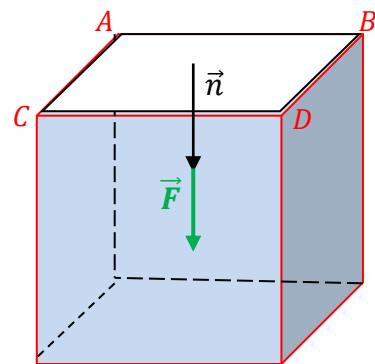


Figure.6.1.c. Cas d'une surface plane

La dimension de la pression est :  $[P] = M L^{-1} T^{-2}$

Son unité (S.I.) est le Pascal (Pa) :  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2}$

#### - Unités dérivées

- Le bar :  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N.m}^{-2}$
- Le mbar :  $1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa}$
- L'atmosphère :  $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar}$  appelée pression atmosphérique.

#### Applications

**Application 1.** Un objet de 50kg est posé sur le sol, sa section horizontale vaut  $0,250 \text{ m}^2$ . Quelle pression son poids exerce-t-il sur le sol ?

**Solution**

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{50 \times 9.81}{0.25} = 1962 \text{ Pa} = 19.62 \text{ mbar} = 19.62 \times 10^{-3} \text{ bar}$$

**Application 2.** Un objet de 30kg exerce une pression de 1200 Pa sur le sol. Quelle est la surface de contact de cet objet avec le sol ?

**Solution**

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow S = \frac{F}{p} = \frac{30 \times 9.81}{1200} = 0.245 \text{ m}^2$$

**Application 3.** Les deux faces d'une palissade de jardin ont chacune pour surface S. La pression atmosphérique est notée Patm. Calculer la valeur de la force pressante exercée par l'air sur chaque face de cette palissade. On donne : S = 15×10<sup>2</sup> m<sup>2</sup> et Patm = 1, 013 × 10<sup>5</sup> Pa

**Solution**

$$F = p \times S = 1,013 \times 10^5 \times 15 \times 10^2 = 15.195 \times 10^7 \text{ N}$$

**Remarque**

Cette force est énorme, mais comme cette force s'exerce de la même façon de chaque côté de la palissade, dans ce cas les deux forces se compensent.

**Application 4.** Le toit vitré d'un appartement forme un rectangle de surface S = 10 m<sup>2</sup>.

- Calculer la force « F » pressante exercée par l'air extérieur sur le vitrage.
- Quelle serait la masse de l'objet qui exercerait la même force « F » si on le posait sur ce vitrage ? Ce dernier pourquoi ne se brise t-il pas ?

**Solution :**

a.  $F = p \times S = 1,013 \times 10^5 \times 10 = 1,013 \times 10^6 \text{ N}$

b.  $m = \frac{F}{g} = \frac{1,013 \times 10^6}{9.81} = 103.26 \text{ tonnes}$

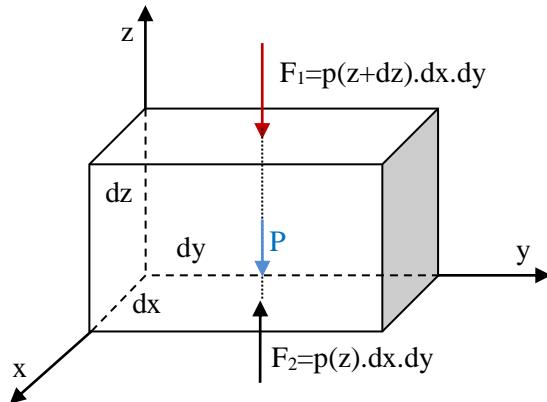
**Réponse**

Le vitrage ne se brise pas, car il y a de l'air à la même pression de chaque côté de la vitre et les deux forces pressantes se compensent.

**I.3. Principe fondamental de l'hydrostatique**

Considérons un fluide au repos et isolons un volume élémentaire de forme parallélépipédique à l'intérieur d'un récipient et de volume :  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Deux types de force agissant sur le volume de cet élément: les forces de surface qui sont des forces de pression et les forces de volume qui est la force de pesanteur : le poids « P »

**Figure 6.2.** Forces agissant sur le volume de l'élément

### I.3.1. Forces de surface

Si l'on note «  $dF_z$  » la composante suivant «  $z$  » de la force de pression, celle-ci peut s'écrire :

$$dF_z = p(z).dx.dy - p(z + dz).dx.dy$$

où  $p(z)$  et  $p(z + dz)$  sont respectivement les pressions agissant sur la face inférieure et la face supérieure du parallélépipède. Puisque "dz" est petit on obtient :

$$p(z + dz) = p(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z . dz$$

Donc :

$$dF_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z dx.dy.dz = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z . dV$$

Par analogie, suivant les autres directions, on trouve :

$$dF_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_y dV \text{ et } dF_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x dV$$

La résultante «  $d\vec{F}$  » s'écrit donc :

$$d\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right)dV = -\vec{\nabla}.p.dV$$

### I.3.2. Forces de volume

Il s'agit simplement du poids de l'élément de volume «  $dV$  » On a donc :

$$d\vec{P} = dm.\vec{g} = \rho.dV.\vec{g}$$

Où «  $\vec{g}$  » est l'accélération de la pesanteur et «  $\rho$  » est la masse volumique du fluide. D'après le principe fondamental de la dynamique, on sait que la résultante des forces agissant sur un corps est égale au produit de sa masse «  $dm$  » par l'accélération  $\vec{a}(x, y, z)$  qu'il subit. Comme le fluide est au repos, au quel cas,  $\vec{a} = \vec{0}$

On a donc:  $d\vec{F} + d\vec{P} = \vec{0}$  soit encore:  $-\vec{\nabla}p \cdot dV + \rho \cdot dV \cdot \vec{g} = \vec{0}$

En simplifiant par «  $dV$  », on obtient une équation de forme suivante:

$$-\vec{\nabla}p + \rho \cdot \vec{g} = \vec{0} \quad \text{où } \vec{\nabla}p = \rho \cdot \vec{g}$$

Comme le champ de pesanteur est tel que  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

Par projection sur les trois axes du référentiel cartésien, on obtient :

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$  et comme :  $p(x, y, z) = p(z)$  l'équation fondamentale de l'hydrostatique s'établit comme suit :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g \quad (6)$$

### 1.3.3. Application aux fluides incompressibles

Lorsqu'un fluide est incompressible, sa masse volumique est une constante, l'équation fondamentale de la statique des fluides montre que la pression varie linéairement avec «  $z$  »:

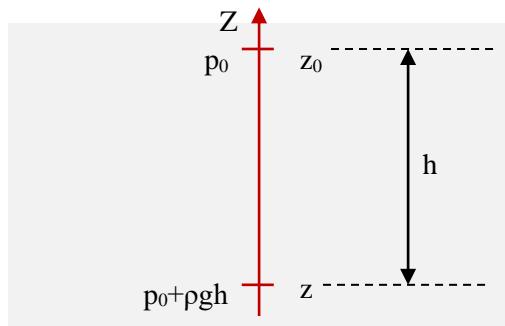
$$p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz + C^{te} = - \int \rho g dz + C^{te} = -\rho g \int dz + C^{te} \quad \text{D'où: } p(z) = -\rho g z + C^{te}$$

Si pour un niveau de référence «  $z_0$  » la pression vaut, «  $p_0$  » alors la pression pour un niveau «  $z$  » quelconque s'exprime comme (figure.6.3) :

$$p(z) = p_0 + \rho g(z - z_0)$$

On peut également exprimer cette même pression en fonction de la **profondeur** :  $h = z - z_0$   
L'équation fondamentale de l'hydrostatique est donc:

$$p(h) = p_0 + \rho gh \quad (7)$$



**Figure.6.3.** position de deux points différents dans un fluide

#### Remarque

Cette relation montre que la variation de la pression dans un fluide incompressible est proportionnelle à la densité du fluide et à la différence de hauteur.

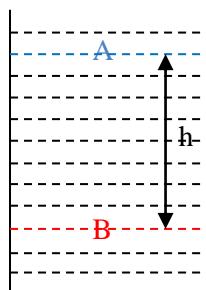
## I.4.Théorème de Pascal

La force pressante exercée sur le fond horizontal d'un récipient ne dépend pas de la forme du récipient, ni donc de la masse totale du liquide, mais de la hauteur du liquide. La force pressante est égale au poids d'une colonne de liquide de hauteur «  $h$  » et de section «  $S$  », par conséquent :

- Les surfaces isobares sont horizontales :  $p = C^{te} \Rightarrow z = C^{te}$
- La surface libre d'un liquide au repos est horizontale :  $p = p_{atm} \Rightarrow z = C^{te}$

Un liquide étant considéré comme incompressible, toute variation de pression en un point de ce fluide confiné dans une enceinte fermée est transmise intégralement à tous les points. (à travers tout le fluide) (figure.6.4).

De ce fait :  $p_{ZA} + \Delta p + \rho g z_A = C^{te} = p_{ZB} + \Delta p + \rho g z_B$  (8)



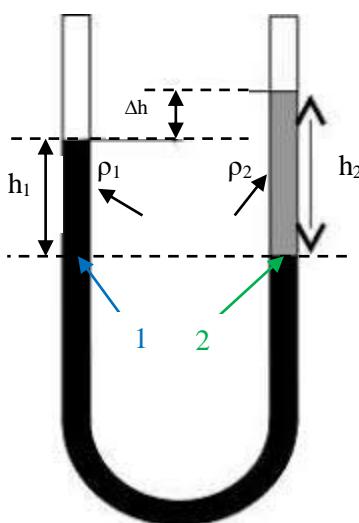
**Figure.6.4.** Pression au sein d'un

### -Applications

#### Le tube en U

Considérons un tube en « U » rempli avec deux liquides non miscibles,

1. Suivant le principe de Pascal trouver la relation entre les pressions mesurées aux points « 1 » et « 2 » (Figure.6.5)



**Figure.6.5.** Tube en U

On donne : La section du tube = 1 cm<sup>2</sup>, il est rempli d'eau ( $V_{\text{eau}}=50 \text{ cm}^3$ ,  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et d'huile ( $V_{\text{huile}}=25 \text{ cm}^3$   $\rho_{\text{huile}} = 840 \text{ kg.m}^{-3}$ ).

- 2.** Calculer la hauteur «  $h_2$  » de l'huile ?
- 3.** Quelle est la différence entre les deux niveaux de surface ( $h_2 - h_1$ ) ?

### Solution

- 1.** Suivant le théorème de pascal

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 + p_{\text{surface}1} = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + p_{\text{surface}2}$$

Nous avons :  $p_{\text{surface}1} = p_{\text{surface}2} = p_{\text{atmosphérique}}$

Suite aux simplifications :  $\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2$

Cette relation nous permet de calculer la masse volumique du liquide inconnu en connaissant celle du deuxième liquide.

$$\text{2. } V_{\text{huile}} = S_2 \times h_2 \rightarrow h_2 = \frac{V_{\text{huile}}}{S_2} = \frac{25 \times 10^{-6}}{10^{-4}} = 25 \times 10^{-2} = 25 \text{ cm}$$

**3.** Comme les pressions en point (1) et en point (2) sont les mêmes, donc :

$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h_2 \rightarrow h_1 = \frac{\rho_2 \cdot h_2}{\rho_1} = \frac{840 \times 0.25}{1000} = 21 \text{ cm} \rightarrow h_2 - h_1 = 25 - 21 = 4 \text{ cm}$$

### Le baromètre

Mis au point en 1643 par Evangelista Torricelli, un baromètre est un appareil qui permet de mesurer la pression atmosphérique. Un baromètre qui contient une colonne de mercure (figure 6.6).

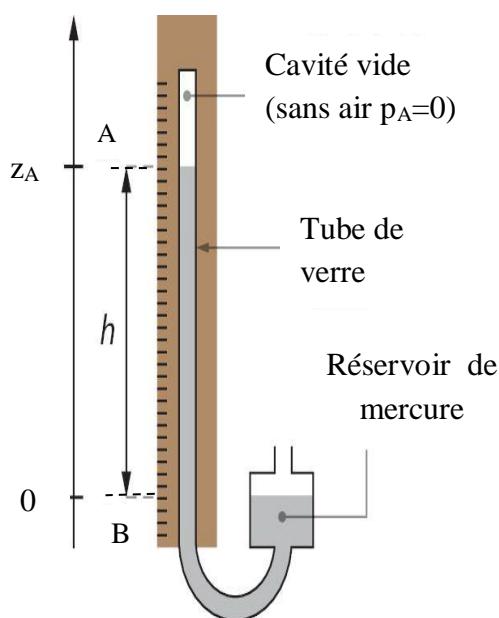


Figure 6.6. Baromètre de Torricelli.

**1.** Calculer l'altitude  $z_A$  du point A lorsque la pression atmosphérique est normale ( $p_B = 1\ 013$  hPa), sachant que la masse volumique du mercure est de  $13\ 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . En déduire la valeur de  $h$ .

**2.** Est-il commode de réaliser un baromètre similaire en remplaçant le mercure par de l'eau dont la masse volumique est de  $1\ 000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ? Justifier.

## Solution

**1.** La relation fondamentale de l'hydrostatique appliquée à ce système est :

$$p_B - p_A = \rho \times g \times (Z_A - Z_B) \rightarrow p_B = \rho \times g \times Z_A = \rho \times g \times h$$

Donc «  $h$  » est proportionnelle à la pression atmosphérique :

$$p_B - p_A = p_{atm} = Cts = \rho \times g \times h$$

Ce qui confirme que le baromètre permet de mesurer la pression atmosphérique.

$$\rightarrow Z_A = \frac{p_B}{\rho \times g} = \frac{1013 \times 100}{13500 \times 9.81} = 0.765 \text{ m}$$

La hauteur «  $h$  » représente la différence d'altitude

$$h = Z_A - Z_B \rightarrow h = 765 \text{ mm} = 76.5 \text{ cm}.$$

«  $P_{atm}$  » équivaut à une hauteur de liquide égale à 765 mm, d'où l'unité Torr = mmHg = 133.32 Pa.

**2.** On fait le même calcul en utilisant de l'eau.

$$Z_A = \frac{p_B}{\rho \times g} = \frac{1013 \times 100}{1000 \times 9.81} = 10.326 \text{ m}$$

### Remarque

Suivant le résultat, si on voulait construire un baromètre en utilisant de l'eau; il faudrait une colonne d'eau de **10.33 m** de haut. Ce qui n'est pas du tout pratique à manipuler pour un instrument de mesure. Donc il n'est commode de réaliser un baromètre similaire en remplaçant le mercure par de l'eau.

## I.5. Poussée d'Archimède

### I.5.1. Enoncé

Considérons un volume de forme quelconque au sein d'une masse de fluide est en état d'équilibre, deux forces qui s'exercent sur ce corps (figure.6.7):

1. La force de son propre poids :  $\vec{P} : P = m.g$
2. La résultante des forces de pression qui s'exercent sur la surface de la masse :  $\int p \times \vec{dS}$   
«  $p$  » est la pression du fluide sur le corps à l'endroit de l'élément de surface «  $dS$  »

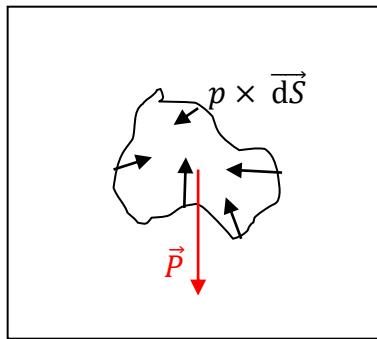


Figure 6.7. Forces de pression exercées sur la masse d'eau

L'état d'équilibre est :

$$\vec{P} + \int p \times \vec{dS} = \vec{0} \Rightarrow: \vec{P} = -\int p \times \vec{dS}$$

D'après cette relation, La somme des forces de pression exercées sur la surface de ce volume est équivalente au poids du fluide. Comme la pression hydrostatique augmente avec la profondeur, la résultante des forces de pression est verticale et dirigée de bas en haut (figure.6.8). Remplaçons le volume de fluide par un corps différent par exemple un solide ayant le même contour. La surface définissant le volume étant identique, les forces de pression sont les mêmes en intensité et point d'application.

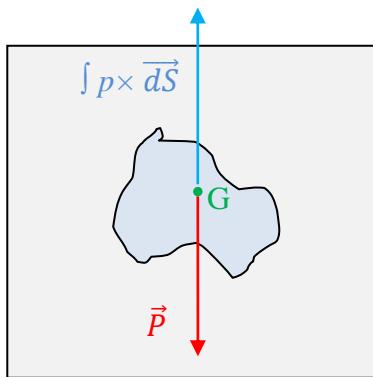


Figure 6.8. Forces de pression exercées sur la masse d'un solide

Pour simplifier, soit un cylindre solide de hauteur «  $h$  » et de section «  $S$  » en équilibre immergé dans un fluide de masse volumique «  $\rho$  ». Le cylindre est en équilibre car sur sa face latérale, les forces radiales de pression, diamétralement opposées s'annulent deux à deux. Sur sa surface inférieure une force verticale normale à «  $S$  » et dirigée vers le haut d'intensité  $F_1 = p_{z1} \times S$ . De même sur sa surface supérieure une force est dirigée vers le bas d'intensité :  $F_2 = p_{z2} \times S$ . La résultante de toutes les forces de pression exercées par le liquide est  $\sum \vec{F}$  soit en projection sur l'axe «  $oz$  » :

$$F_1 - F_2 = (p_{z1} - p_{z2}) \times S = \rho \times g \times (z_2 - z_1) \times S \Leftrightarrow -\Delta p \times S = \rho \times g \times h \times S$$

Suivant l'équation de l'hydrostatique :

$$F_1 - F_2 \Leftrightarrow -\Delta p \times S = \rho \times g \times h \times S$$

Par conséquent :

$$\rho \times g \times h \times S = \rho \times g \times V \quad \text{d'où : } \rho \times g \times h \times S = P_A \quad \text{et } \rho \times g \times V = m_l \times g = P_L$$

«  $m_l$  » est la masse du volume «  $V$  » du liquide occupé ou remplacé par le solide de ce fait : **la poussée d'Archimède** est une force verticale dirigée vers le haut d'intensité égale au poids «  $P_l$  » du liquide déplacé. Elle est exercée sur un corps solide qui y est partiellement ou totalement immergé. Cette découverte qui date d'environ 250 av. J-C est due à Archimède, célèbre physicien de l'antiquité.

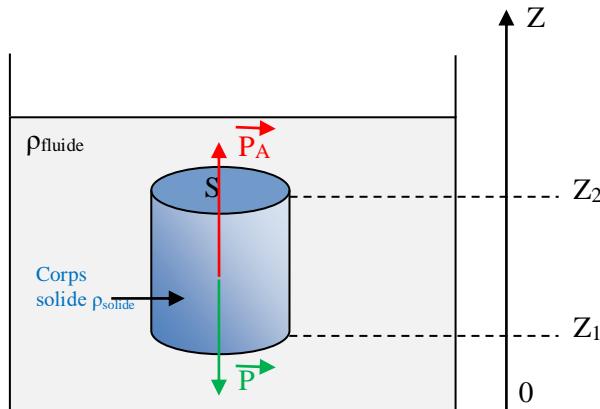


Figure.6.9. Cylindre immergé dans un fluide

### I.5.2. Équilibre d'un corps immergé

#### I.5.2.1. Poids apparent

Désigné par «  $P_{app}$  » le poids apparent est plus faible que le poids réel. Il est la différence entre le poids réel «  $P_{réel}$  » et la poussée d'Archimède «  $P_A$  ».

$$P_{app} = P_{réel} - P_A \Leftrightarrow P_{app} = \rho_s \times V_s \times g - \rho_l \times V_l \times g \quad (9)$$

-Si la densité du corps immergé est supérieure à celle du fluide, le corps tombe car son poids est supérieur à la poussée exercée par le fluide ( $P_{app} > 0$ ).

-Si la densité du corps immergé est égale à celle du fluide, le corps est en équilibre ( $P_{app} = 0$ )

-Si la densité du corps immergé est inférieure à celle du fluide, le corps flotte car son poids est inférieur à la poussée exercée par le fluide ( $P_{app} < 0$ ).

### Application

Une bille en Fer de masse  $m_{fer} = 40 \text{ g}$  et de masse volumique  $\rho_{fer} = 7860 \text{ kg.m}^{-3}$  est plongée dans l'eau :  $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Calculer son poids apparent. On donne  $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$ .

## Solution

D'après la relation (9)

$$\begin{aligned} P_{app} &= P_{réel} - P_A \Leftrightarrow P_{app} = \rho_s \times V_s \times g - \rho_l \times V_l \times g \\ P_{réel} &= \rho_{fer} \times V_{fer} \times g = \cancel{\rho_{fer}} \times \frac{m_{fer}}{\cancel{\rho_{fer}}} \times g = m_{fer} \times g = 0.04 \times 9,81 = 0.392 \text{ N} \\ V_{fer} &= \frac{m_{fer}}{\rho_{fer}} = \frac{0.04}{7860} = 5.089 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A &= \rho_l \times V_{l(immérgé)} \times g \Leftrightarrow P_A = 1000 \times 5.089 \times 10^{-6} \times 9,81 = 4.992 \times 10^{-2} \text{ N} \\ P_{app} &= 0.392 - 4.992 \times 10^{-2} = 0.342 \text{ N} \end{aligned}$$

### Remarque

Ce poids apparent est de 0.342 N de la bille dans l'eau au lieu de 0.392 N dans l'air.

## Exercices résolus

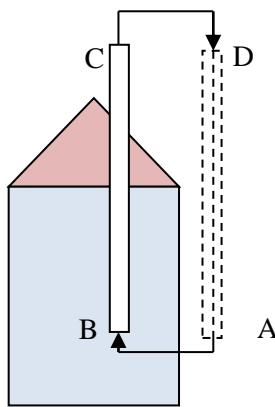
### Exercice 1

Les gaz de fumée se trouvant dans une cheminée à une température de 150°C ont une masse volumique  $\rho_{air chaud} = 0,84 \text{ kg/m}^3$ . Calculer la dépression de tirage au pied de la cheminée si elle mesure 30 mètres de hauteur, quelle sera la dépression de tirage au pied de la cheminée. On donne la masse volumique de l'air extérieur à la température de 0°C :  $\rho_{air froid} = 1,29 \text{ kg/m}^3$ .

## Solution

Pour un bon tirage de la cheminée il faut que de l'air rentre dans la maison par les interstices des fenêtres des portes, des grille d'aération, ... où un cycle se crée afin d'alimenter la base de la cheminée.

Imaginons deux (2) colonnes d'air fictives de masses spécifiques différentes.



**Figure.6.10.** schéma d'une cheminée dans la maison

$p_C$  et  $p_D$  sont à la pression atmosphérique :  $p_C = p_D$

$$\begin{aligned} p_A &= p_D + \rho_{air froid} \times g \times h \\ p_B &= p_C + \rho_{air chaud} \times g \times h \quad \text{Donc :} \end{aligned}$$

$$P_A - p_B = (\rho_{\text{air froid}} - \rho_{\text{air chaud}}) \times g \times h = (1.29 - 0.87) \times 9.81 \times 30 = 132.43 \text{ Pa}$$

### Remarques

- Au point A, l'air froid, plus "lourd", sera en surpression par rapport au point B. Autrement dit, une dépression de 132.43 Pa existera au point B.
- Une cheminée qui ne **tire** pas est notamment le signe :

- \* d'une étanchéité du bâtiment trop élevée ;
- \* d'une température des fumées trop faible,
- \* d'une hauteur de cheminée trop petite.

### Exercice 2

Un morceau de métal pèse 250 g dans l'air.

Combien pèsera-t-il si on le plonge dans l'eau ou dans l'huile ?  $d_{\text{métal}} = 6,25$  et  $d_{\text{huile}} = 0,625$

### Solution

Poids dans l'eau = poids dans l'air - force d'Archimède.

$$P' = P - F_A$$

$$P = m \cdot g = 0.25 \times 9.81 = 2.45 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{métal}} \times g = \rho_{\text{eau}} \times \frac{m_{\text{métal}}}{\rho_{\text{métal}}} \times g = \rho_{\text{eau}} \times \frac{m_{\text{métal}}}{\rho_{\text{eau}} \times d_{\text{métal}}} \times g = \frac{0.25}{6.25} \times 9.81 \\ &= 0.39 \text{ N} \end{aligned}$$

$$P' = P - F_A = 2.45 - 0.39 = 2.06 \text{ N} \rightarrow m' \approx 210 \text{ g}$$

Idem pour l'huile : Poids dans l'huile = poids dans l'air - force d'Archimède.

$$P' = P - F_A$$

$$P = m \cdot g = 0.25 \times 9.81 = 2.45 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_{\text{huile}} \times V_{\text{métal}} \times g = \rho_{\text{huile}} \times \frac{m_{\text{métal}}}{\rho_{\text{métal}}} \times g = d_{\text{huile}} \times \rho_{\text{eau}} \times \frac{m_{\text{métal}}}{\rho_{\text{eau}} \times d_{\text{métal}}} \times g \\ &= 0.625 \times \frac{0.25}{6.25} \times 9.81 = 0.245 \text{ N} \end{aligned}$$

$$P' = P - F_A = 2.45 - 0.245 = 2.2 \text{ N} \rightarrow m' = 224.47 \text{ g}$$

### Remarque

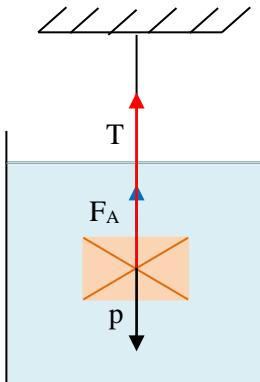
Le métal est moins lourd dans l'eau que dans l'huile.

### Exercice 3.

Un bloc de métal de 40 kg, de 5000 cm<sup>3</sup> de volume est suspendu à une corde et plongé dans un bain d'huile de densité :  $d_{\text{huile}} = 0,76$ .

-Trouver la poussée d'Archimède exercée par l'huile et la tension dans la corde.

### Solution



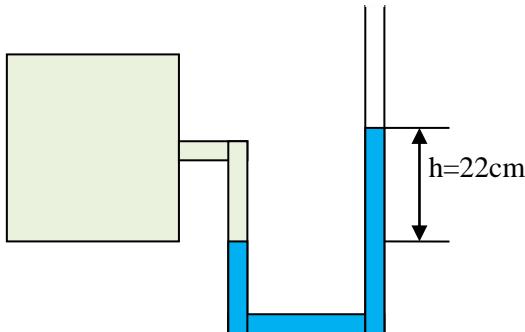
**Figure.6.11.** schéma d'un bloc plongé dans l'huile

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_{\text{huile}} \times V_{\text{bloc}} \times g = d_{\text{huile}} \times \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{bloc}} \times g = 0.76 \times 1000 \times 5000 \times 10^{-6} \times 9.81 \\ &= 37.278 \text{ N} \approx 37.3 \text{ N} \end{aligned}$$

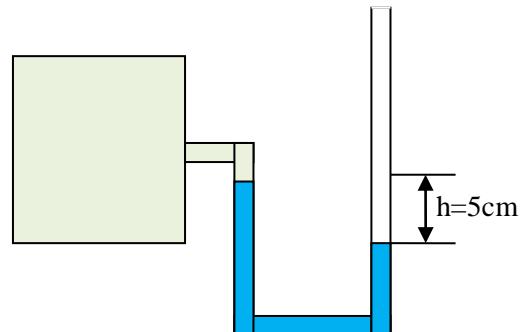
$$\text{A l'équilibre : } P = F_A + T \Rightarrow T = P - F_A \Leftrightarrow T = 392.4 - 37.278 = 355.12 \text{ N}$$

### Exercice 4

Dans les deux cas ci-dessous, quelle est la pression absolue à l'intérieur du récipient, si le liquide dans le tube est du mercure. La densité du mercure égale à 13,6 ?



**Figure.6.11.a.** Cas 1



**Figure.6.11.b.** Cas 2

### Solution

Calcul de la pression absolue :  $p_{\text{abs}} = p_{\text{atm}} + p_{\text{rel}}$

**Cas 1**  $p_{\text{abs}} = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot h = p_{\text{atm}} + d_{\text{mercure}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h_1 = 1.012 \times 10^5 + 13.6 \times 1000 \times 9.81 \times 0.22 = 130551.52 \text{ Pa.}$

**Cas 1**  $p_{\text{abs}} = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot h = p_{\text{atm}} + d_{\text{mercure}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h_2 = 1.012 \times 10^5 + 13.6 \times 1000 \times 9.81 \times 0.05 = 107870.8 \text{ Pa}$

## II. Dynamique des fluides

### II.1. Introduction

La dynamique des fluides autrement dit l'hydrodynamique a pour but d'étudier les mouvements des liquides en fonction des forces qui leur donnent naissance. Pour le cas des fluides incompressibles parfaits les forces de viscosité n'interviennent pas et donc ces fluides ne développent pas de la turbulence.

### II.2. Fluides en mouvement

Suivant le deuxième principe de Newton, si une force «  $F_x$  » est appliquée sur une particule fluide de masse «  $M$  » dans une direction arbitraire «  $x$  » alors la particule fluide se déplacera dans la même direction de cette force, qui est égale à la dérivé par rapport au temps de la variation des quantités de mouvement «  $M \times V_x$  » dans la direction «  $x$  » :

$$F_x = \frac{d(M \times V_x)}{dt} \quad (10)$$

#### II.2.1. Lignes de courants

Chaque particule dans les fluides décrit une ligne de courant (figure.6.12) lorsqu'elle se déplace. La définition des lignes de courant d'un fluide, la connaissance de la vitesse et de la pression en tout point de ce fluide, permet de connaître le mouvement de ce dernier. De plus si on connaît la trajectoire de la particule en ce même point on pourra facilement décrire le type d'écoulement. En régime permanent les caractéristiques de l'écoulement (vitesse et pression) sont toujours les mêmes quelque soit le moment d'observation.

#### II.2.2. Débit

Le mot débit signifie la quantité du fluide qui circule à l'intérieur des différents éléments (gaines, tuyauterie). Par conséquent, on peut définir la notion du débit comme étant l'écoulement d'une quantité de fluide à travers une section de passage «  $S$  » pendant le temps «  $\Delta t$  »



**Figure .6.12.** Fluide en mouvement

Désigné par «  $q$  » on distingue le débit massique «  $q_m$  » et le débit volumique «  $q_v$  »

##### II.2.2.a. Débit volumique

Le débit volumique est une mesure de l'espace tridimensionnel que le fluide occupe lorsqu'il s'écoule à travers la section de passage d'une conduite, dans les conditions de pression et de température mesurées. Il se mesure en [ $m^3/s$ ] et se calcule par la relation suivante :

$$q_v = \frac{V}{t} \quad (11)$$

## II.2.2. b. Débit massique

Le débit massique est une mesure du nombre de molécules qui traversent l'appareil, indépendamment de l'espace occupé par ces molécules. Il se mesure en [Kg/s] et se calcule par la relation suivante :

$$q_m = \frac{m}{t} \quad (12)$$

### -Relation entre débit massique et débit volumique

Le débit massique exprime la quantité de la masse par unité de temps ( $q_m = \frac{m}{t}$ ) et le débit volumique exprime la quantité du volume par unité de temps ( $q_V = \frac{V}{t}$ ). Nous avons :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \times V \text{ D'où } q_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho \times V}{t} = \rho \times \frac{V}{t} = \rho \times q_V$$

Donc la relation entre le débit massique et le débit volumique est la suivante :

$$q_m = \rho \times q_V \quad (13)$$

## II.2.3. Vitesse

Au cours de l'écoulement d'un fluide, chaque particule de matière, assimilée à un point possède à chaque instant une vitesse «  $v$  » qui peut en chaque point varier avec le temps. Elle peut aussi varier d'un point à un autre du fluide.

### -Relation entre le débit et la vitesse

Désignons par «  $v$  » la vitesse de l'écoulement, les débits volumique et massique se calcule respectivement en fonction de «  $v$  » comme suit :

$$q_V = S \times v \text{ et } q_m = \rho \times S \times v \quad (14)$$

### Remarque

Si le fluide est incompressible, soumis à de faibles variations de pression et température donc faible vitesse de déplacement, alors la masse volumique ne dépend pas de la pression.

## II.2.4. Ligne de courant

En régime stationnaire, on appelle ligne de courant toute courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide. Cette ligne est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse du fluide en ce point. (figure.6.13).

## II.2.5. Tube de courant

On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée. (figure.6.13)

## II.2.6. Filet de courant

Tube de courant s'appuyant sur un petit élément de surface «  $\Delta S$  ». La section de base «  $\Delta S$  » du tube ainsi définie est suffisamment petite pour que la vitesse du fluide soit la même en tous ses points (répartition uniforme). (figure.6.13)

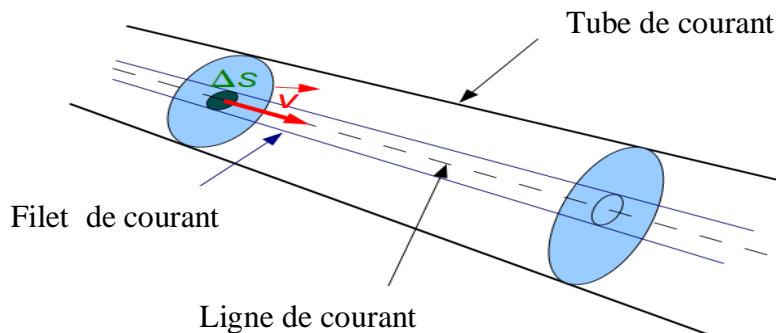


Figure.6.13. Ligne, tube et filet de courant

## II.2.7. Equation de continuité

Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable  $S_1$  et  $S_2$ . (figure.6.14)

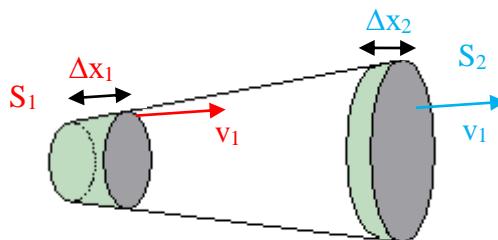


Figure.6.14. Ecoulement dans un cylindre de section variable

Pour une surface fermée:

$$\begin{aligned} q_{m1} = q_{m2} &\Leftrightarrow \frac{m_1}{t_1} = \frac{m_2}{t_2} \Leftrightarrow \frac{\rho \times V_1}{t_1} = \frac{\rho \times V_2}{t_2} \Leftrightarrow \frac{\rho \times \cancel{\Delta x_1} \times S_1}{\cancel{t_1}} = \frac{\rho \times \cancel{\Delta x_2} \times S_2}{\cancel{t_2}} \\ &\Leftrightarrow \rho \times v_1 \times S_1 = \rho \times v_2 \times S_2 \Leftrightarrow S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2 \end{aligned}$$

L'équation de continuité dite aussi l'équation de conservation de débit massique est donc :

$$S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2 \quad (15)$$

## II.2.8. Energie mécanique d'un fluide

L'énergie mécanique d'un fluide en mouvement est l'addition de deux formes d'énergies, une potentielle ; composée elle-même d'une énergie liée à la pression «  $E_{p1}$  » et une autre liée à l'altitude (hauteur) «  $E_{p2}$  » et l'autre cinétique liée à la vitesse «  $E_c$  »

$$E_m = E_{p1} + E_{p2} + E_c$$

$$E_{p1} = p \quad , \quad E_{p2} = \rho \times g \times z \quad , \quad E_c = \frac{1}{2} \times \rho \times v^2$$

$p$  est la pression statique ,  $\rho \times g \times z$  est la pression de pesanteur,  $\frac{1}{2} \times \rho \times v^2$  est la pression cinétique. L'énergie mécanique totale du fluide est l'ensemble de pressions étudié par unité de volume s'écrit comme suit:

$$E_m = p + \rho \times g \times z + \frac{1}{2} \times \rho \times v^2 \quad (16)$$

## II.3. Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli exprime simplement que l'énergie mécanique (totale) d'un fluide parfait est constante dans un circuit dans lequel il circule à débit constant au cours du temps, mais les différentes formes d'énergie potentielle et cinétique peuvent se transformer (figure.6.15).

$$E_m = p + \rho \times g \times z + \frac{1}{2} \times \rho \times v^2 = C^{te}$$

$$p_1 + \rho \times g \times z_1 + \frac{1}{2} \times \rho \times v^2_1 = p_2 + \rho \times g \times z_2 + \frac{1}{2} \times \rho \times v^2_2$$

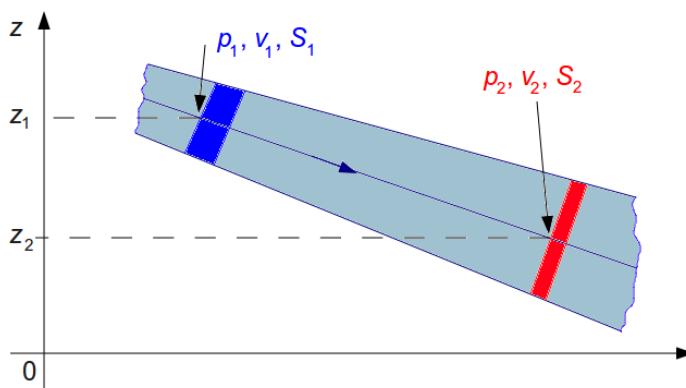


Figure.6.15. Energie mécanique constante pour un débit constant aux points 1 et 2

En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit ( $\rho \times g$ ), on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur et les pressions sont exprimées en mètres de colonne de fluide.

$$p + \rho \times g \times z + \frac{1}{2} \times \rho \times v^2 = C^{te}$$

$$\frac{p}{\rho \times g} + z + \frac{v^2}{2 \times g} = C^{te} \quad (17)$$

### II.3.1. Conditions d'application du théorème de Bernoulli

Les différentes conditions d'application du théorème de Bernoulli sont entre autre :

- Fluide incompressible et densité constante ( $\rho = C^{te}$ ).
- Fluide non visqueux (pas de frottements).
- Pas de perte de charge mais perte de pression.
- Fluide en écoulement stationnaire ( $v = C^{te}$ ) et non turbulent.

#### - Cas particulier

Si la vitesse est nulle ( $v=0$ ) le théorème de Bernoulli se réduit à la loi de Pascal :

$$p + \rho \times g \times z = C^{te}$$

### II.3.2. Applications du théorème de Bernoulli

#### II.3.2.1. Tube de Pitot

Un tube de Pitot est un instrument de mesure de pression utilisé pour mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide. (figure.6.16)

On considère un liquide en écoulement permanent à une vitesse «  $v$  » dans une canalisation qui est équipée de deux tubes plongeant dans ce liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités sont à la même hauteur.

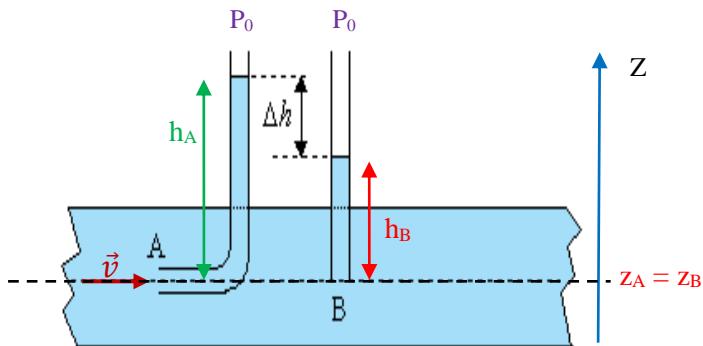


Figure.6.16. Tube de Pitot

- Les points A et B sont à la même cote :  $z_A=z_B$
- Au point B, le liquide a la même vitesse «  $v$  » que dans la canalisation et la pression est notée «  $p_B$  »
- En « A » la vitesse est nulle et la pression est notée «  $p_A$  »

D'après le théorème de Bernoulli,

$$p_A + \rho \times g \times z_A + \frac{1}{2} \times \rho \times v_A^2 = p_B + \rho \times g \times z_B + \frac{1}{2} \times \rho \times v_B^2$$

Nous avons :  $z_A = z_B$  ,  $v_A = 0$  ,  $v_B = v$

Donc :

$$p_A = p_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \Rightarrow p_A - p_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

En appliquant le théorème de Pascal (relation fondamentale de l'hydrostatique)

$$P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot \Delta h \text{ alors } \rho \cdot g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \quad (18)$$

**Remarque** En mesurant la dénivellation «  $\Delta h$  » du liquide dans les deux tubes, la relation (18) permet de déduire la vitesse «  $v$  » d'écoulement du fluide, par exemple celle du flux d'air dans une canalisation.

### II.3.2.2. Effet Venturi

Le tube de venturi est une méthode qui consiste à mesurer le débit d'un fluide en utilisant un organe déprimogène de forme cylindrique comportant un rétrécissement. En raison de la restriction, le débit du fluide augmente en s'écoulant à travers le tube, et la différence de pression entre l'amont et l'aval est proportionnelle au débit.

Considérons une section principale «  $S_A$  » et une section «  $S_B$  » niveau du rétrécissement. d'où «  $S_A > S_B$  » au Muni de prise de pression statique, l'un en amont du convergent «  $S_A$  », l'autre au niveau du col «  $S_B$  » (figure.6.17).

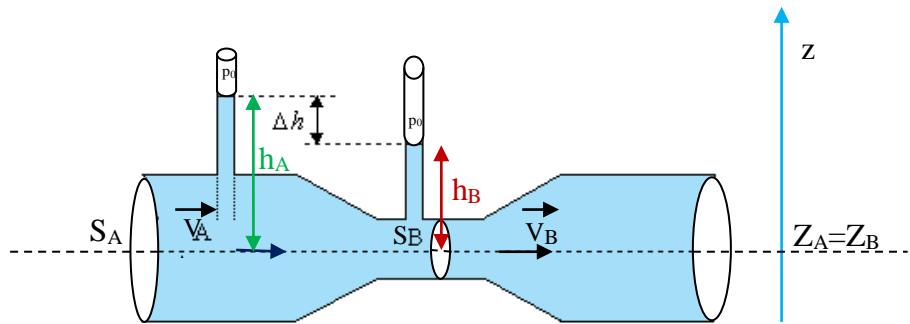


Figure.6.17. Tube de Venturi

Suivant le théorème de Bernoulli entre les deux points « A » et « B »

$$p_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 = p_B + \rho \cdot g \cdot z_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2$$

$$z_A = z_B \Rightarrow p_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2 \quad (a)$$

D'après l'équation de continuité,  $S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \Rightarrow v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$  et comme  $S_A > S_B$  alors  $v_A < v_B$  d'où  $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 < \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2$  il en résulte donc  $p_A > p_B$  la vitesse du fluide augmente dans le rétrécissement (faible section) et sa pression y diminue : c'est l'effet Venturi.

En appliquant la loi de Pascal au niveau des tubes verticaux, dans lesquels le fluide est immobile :  $P_A = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_A$  et  $P_B = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_B$  en remplaçant ces deux relations dans la relation (a) on obtient :  $\cancel{\rho \cdot g \cdot h_A} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\rho} \cdot v_A^2 = \cancel{\rho \cdot g \cdot h_B} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\rho} \cdot v_B^2$

$$g \cdot (h_A - h_B) = \frac{1}{2} \cdot (v_B^2 - v_A^2) \Leftrightarrow g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot (v_B^2 - v_A^2)$$

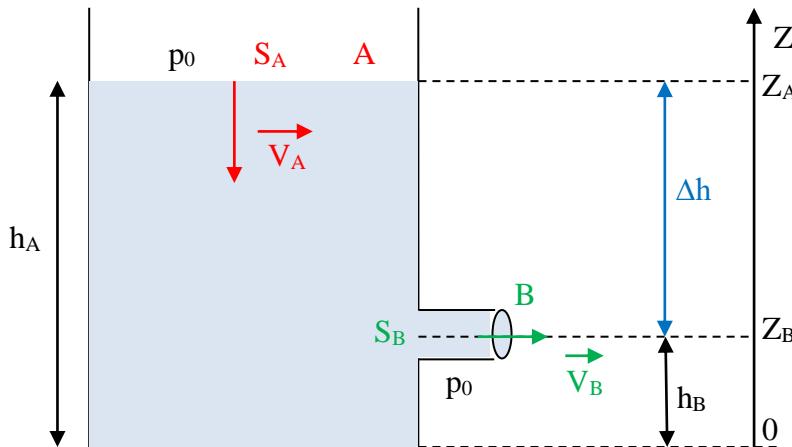
Remplaçons l'expression de  $v_B$  on obtient ce qui suit :

$$g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot (v_A^2 \frac{S_A^2}{S_B^2} - v_A^2) \Leftrightarrow g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot v_A^2 \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h \cdot \frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2}} \quad (19)$$

### II.3.2.3. Vase de Torricelli

Soit un réservoir dont le fluide s'échappe par un orifice étroit à sa base de section « S » et une ligne de courant partant de la surface au point (A) et arrivant à l'orifice au point (B).



**Figure.6.18.** Vase de Torricelli

Suivant le théorème de Bernoulli entre les deux points « A » et « B »

$$p_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 = p_B + \rho \cdot g \cdot z_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2$$

Nous avons :  $p_A = p_B = p_{atm} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2) = \rho \cdot g \cdot (h_A - h_B)$

Dans ce cas :  $v_A \ll v_B \rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$  (20)

Le débit volumique est  $q_v = S \cdot v$ , en remplaçant la vitesse par la relation (20) on obtient:

$$q_v = S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \quad (21) \quad \text{Appelée formule de Torricelli.}$$

De ce fait, la formule de Torricelli relie le Débit d'écoulement avec la hauteur de liquide.

## II.4. Pertes de charge

### II.4.1. Phénomène

Un fluide réel, en mouvement, subit des pertes d'énergie dues aux frottements sur les parois de la canalisation. Contrairement au théorème de Bernoulli, la pression d'un liquide réel subi des diminutions tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, même si elle est horizontale et de section uniforme. Aussi après le passage à travers un coude, une vanne ou un rétrécissement.

### II.4.2. Différents régimes d'écoulement

Lors de l'écoulement de divers fluides réels dans une conduite cylindrique rectiligne, deux régimes d'écoulement se produisent : laminaire et turbulent (figure.6.19). En faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds** permet de définir le régime d'écoulement. Le nombre de Reynolds est donné par la relation suivante :

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \quad (22) \quad \text{ou} \quad Re = \frac{v \cdot D}{\nu} \quad (23)$$

Avec :

$\rho$  : est la masse volumique du fluide ( $\text{kg/m}^3$ )

$v$  : est la vitesse moyenne ( $\text{m/s}$ )

$D$  : est le diamètre de la conduite ( $\text{m}$ )

$\mu$  : est la viscosité dynamique du fluide ( $\text{Pa.s}$ )

$\nu$  : est la viscosité cinématique ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

#### II.4.2.1. Régime laminaire

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un tuyau comme s'il glissait parallèlement aux parois (en couches cylindriques coaxiales) qui le guident, on dit que l'écoulement est laminaire. Grâce à la répartition des vitesses qui est bien régulière et ordonnée, ces écoulements génèrent très peu de bruit à cause de leur structure de vitesse. (figure.6.19.a).

### II.4.2.2. Régime transitoire

Le régime transitoire est le régime qui se situe entre les deux régimes, dans lequel l'écoulement est instable pouvant être soit laminaire, soit turbulent soit il passe d'un régime à un autre. (figure.6.19.b).

### II.4.2.3. Régime turbulent

Lorsqu'un fluide s'écoule avec des variations de vitesse brusques et aléatoires en chaque point de la conduite à diamètre varié, on dit que l'écoulement est turbulent (formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide). A cause de leur structure chaotique ces écoulements génèrent du bruit. Cela a été constaté selon des expériences faites par Reynolds. (figure.6.19.c)

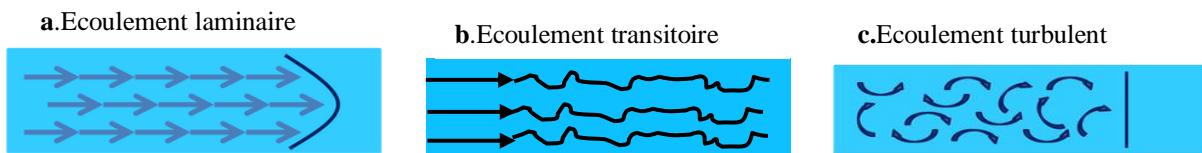


Figure.6.19. Différents régimes d'écoulement

#### -Ordres de grandeur

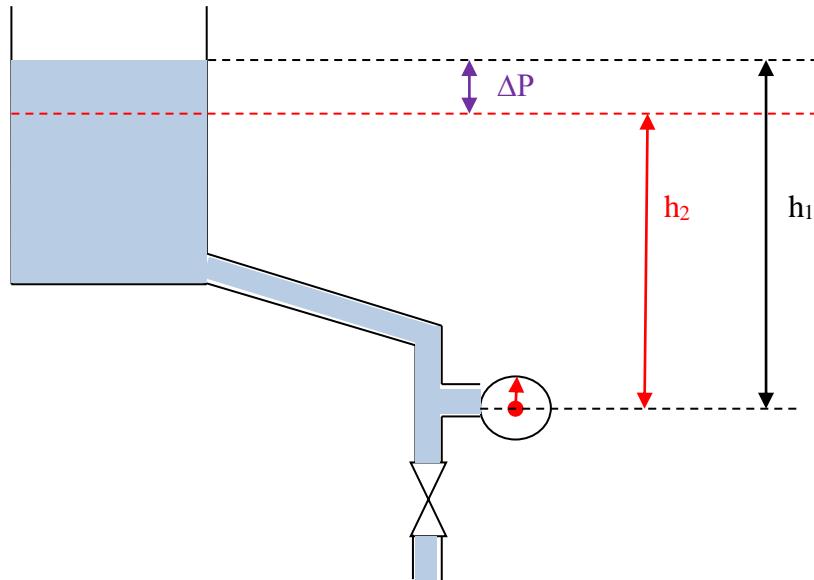
- Si  $Re < 2000$  le régime est laminaire
- Si  $Re = 2000$  le régime de transition (intermédiaire)
- Si  $Re > 2000$  le régime est turbulent :
  - Il est turbulent lisse si :  $2000 < Re < 10^5$
  - Il est turbulent rugueux si :  $Re > 10^5$

-Si l'on admet pour limite supérieure du régime laminaire la valeur  $Re = 2000$ , nous obtenons

$$\nu = \frac{2000 \cdot \nu}{D} \quad (24)$$

-La relation (24) donne la vitesse maximum du régime laminaire. C'est la vitesse critique d'écoulement pour une viscosité et un diamètre donnés. Pour une installation existante, elle permet de déterminer le régime d'écoulement.

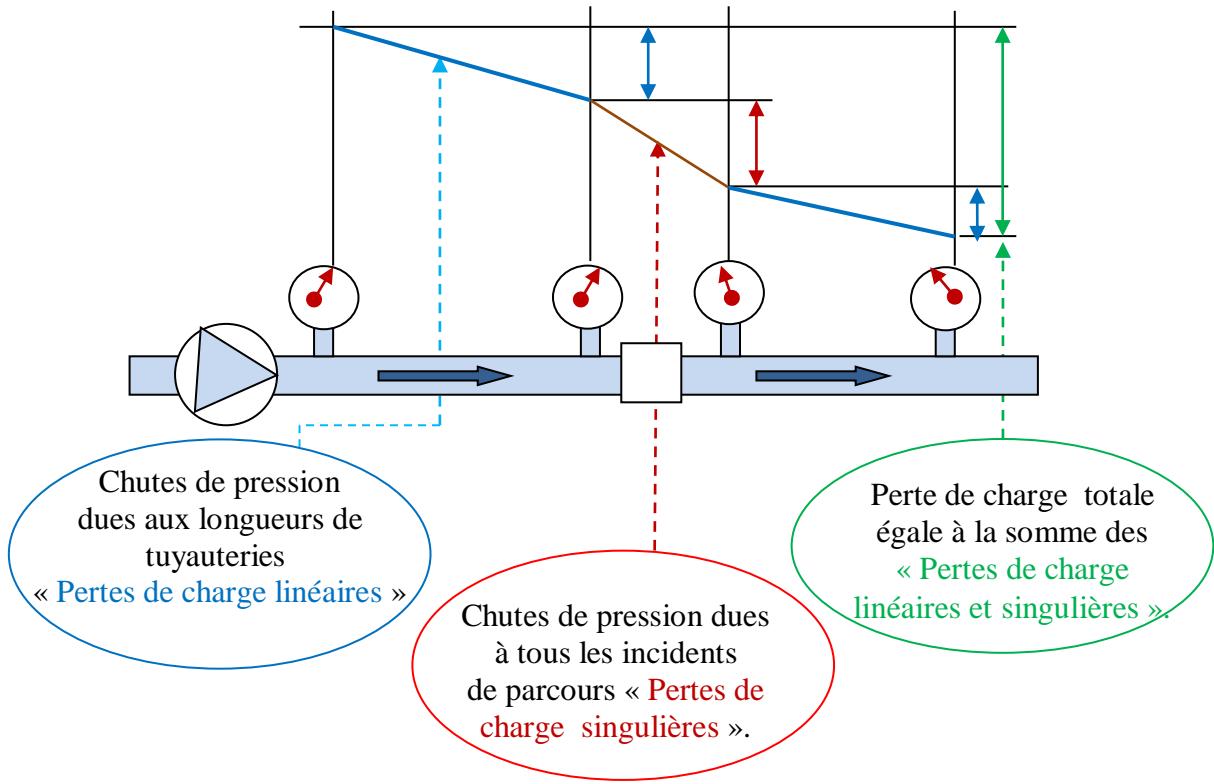
-Lorsque l'on ouvre la vanne, on s'aperçoit que la pression chute. Cette nouvelle pression correspond à une charge d'eau «  $h_2$  » inférieure à la hauteur d'eau réelle «  $h_1$  », cette chute de pression, due au débit d'eau dans la canalisation, appelée « perte de charge » (ΔP) qui dépend de l'état de surface de la conduite, du débit de liquide dans la conduite, de la viscosité du liquide, de la longueur de la conduite, et des incidents de parcours rencontrés dans la conduite.



**Figure 6.20.** Chute de pression le long de la conduite (pertes de charge)

### II.4.3. Différents types de pertes de charge

Les différents types de charges sont illustrés ci-dessous (figure 6.21)



**Figure 6.21.** Types de pertes de charge dans une installation hydraulique

L'équation gouvernante les pertes de charge d'un tronçon est :

$$\Delta P = \sum \Delta P_{linéaires} + \sum \Delta P_{singulières} \quad (25)$$

### II.4.3.1. Perte de charge linéaire

La perte de charge linéaire dépend du type d'écoulement et de la qualité du tube, elle se calcule par la relation suivante :

-En Pascal ( $Pa$ ) :

$$\Delta P_{linéaires} = \lambda \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{d} \quad (26)$$

-En mètres de colonne de fluide ( $mCF$ ) :

$$\Delta P_{linéaires} = \lambda \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{L}{d} \quad (27)$$

$\Delta P$  : perte de charge totale du tronçon considéré

$L$  : longueur droite de tuyauterie

$d$  : Diamètre de la conduite en mètre

$\frac{v^2}{2 \cdot g}$  : Pression dynamique en mètre.

$\lambda$  : Coefficient de perte de charge sans dimension, se calcule en fonction de nombre de Reynold comme suit :

-Si le régime est laminaire :

$$-(\text{Formule de Poiseuille}) \quad \lambda = \frac{64}{R} \quad (28)$$

-Si le régime est turbulent :

$$-\text{la conduite est lisse : } (\text{Loi de Blasius}) \quad \lambda = 0.3164 \cdot Re^{-0.25} \quad (29)$$

$$-\text{la conduite rugueuse : } (\text{Loi de Blenck}) \quad \lambda = 0.79 \sqrt{\frac{\epsilon}{d}} \quad (30)$$

$\epsilon$  : Etant le coefficient de rugosité de la conduite.

#### Remarques

-Parfois, on lit la valeur de «  $\lambda$  » sur un abaque établie par Moody (figure.6.22).

- En pratique, les constructeurs fournissent des abaques (tableaux) permettant de déterminer les pertes de charge pour un mètre (1m) de canalisation suivant une section déterminée ; un type de tuyau (acier, cuivre, ...), son diamètre, le débit et la vitesse de l'eau. Il suffira alors de multiplier par la longueur «  $L$  » du tuyau pour obtenir la perte de charge linéaire totale «  $R$  ». (Unité: mm CE.) (figure.6.23).

-Par exemple, pour un débit de **400 l/h** et pour un diamètre intérieur d'une conduite en acier de 15 mm, l'abaque donne une vitesse correspondante de : **0.52m/s** et une perte de charge de **27**

mm CE/m. La pompe qui devra assurer ce débit pour une tuyauterie de « 100 m » de long devra vaincre une perte de charge de «  $27.5 \times 100 = 2750$  mm CE  $\approx 27000$  Pa ».

### II.4.3.2. Perte de charge singulière

Les expériences montrent que ces pertes de charge, aussi appelées pertes accidentelles, sont à peu près proportionnelles au carré de la vitesse, d'où la forme suivante d'expression :

-En Pascal ( $Pa$ ):

$$\Delta P_{singulières} = k \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad (31)$$

-En mètres de colonne de fluide ( $mCF$ ):

$$\Delta P_{singulières} = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (32)$$

«  $k$  » : Coefficient sans dimension de pertes de charge singulière, dépend de la nature du point singulier dont il s'agit. (figure.6.24)

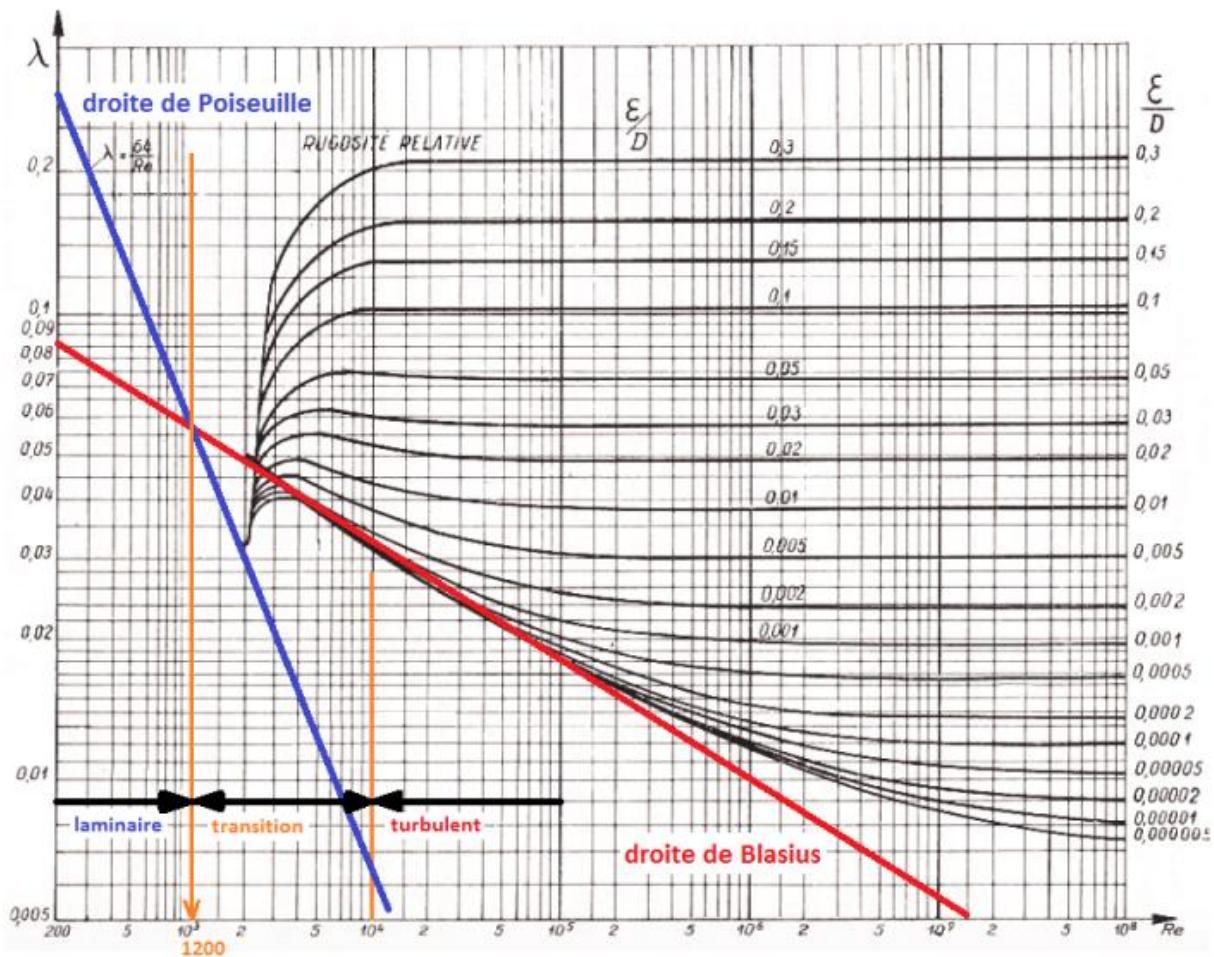


Figure.6.22. Diagramme de Moody

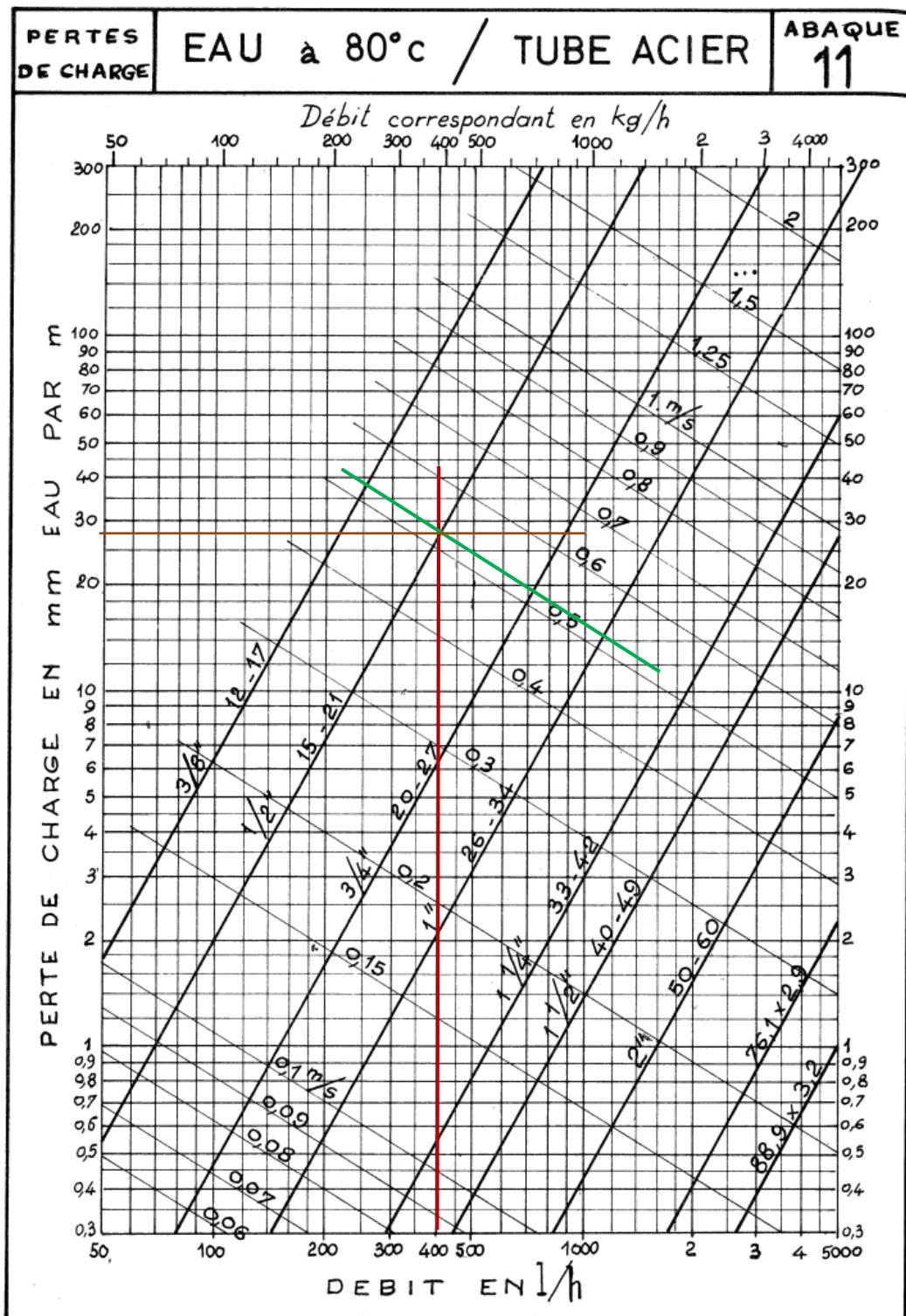
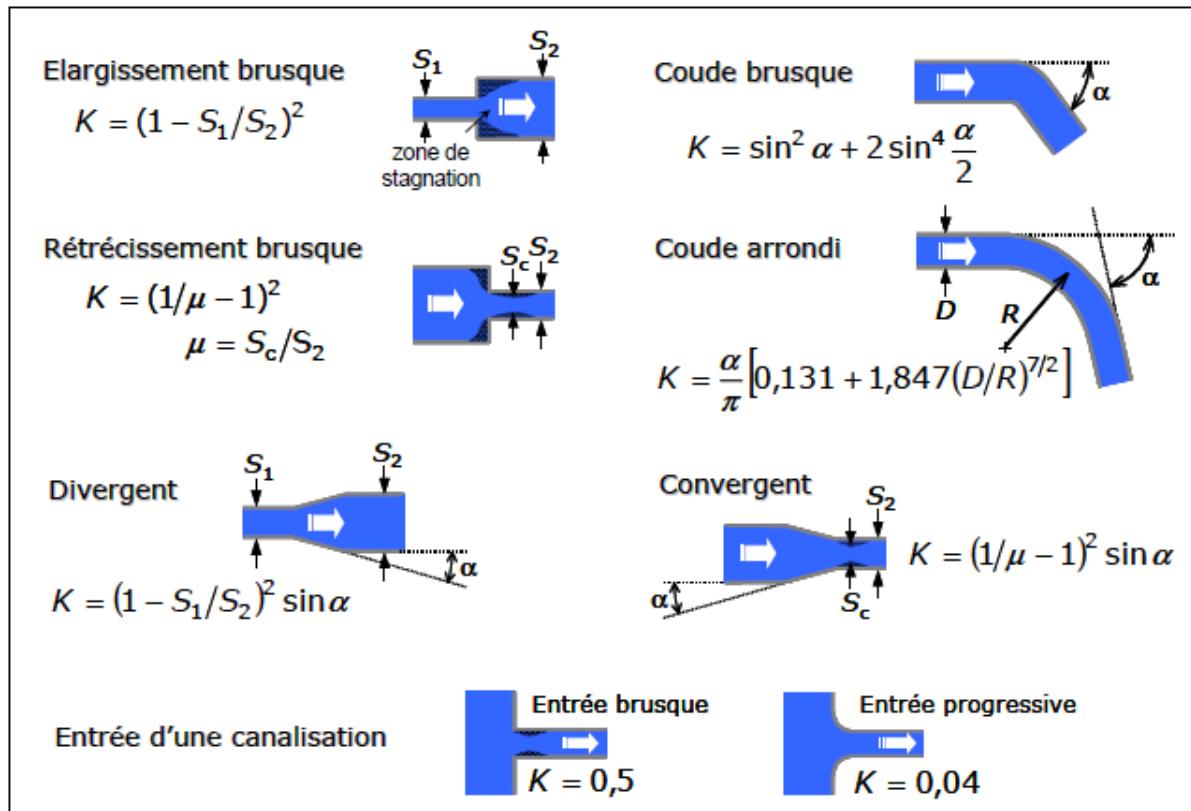


Figure 6.23. Abaques de pertes de charge linéaires

**Figure 6.24.** Abaque du coefficient « K »

Remarque

En pratique, les constructeurs conseillent de rajouter une certaine longueur de canalisation correspondant aux pertes de charge à travers chaque accessoire. Par exemple pour les coudes, clapets de retenue, clapet de pied, crêpine, ils comptent deux (2) mètres de longueur fictive de tuyau pour chaque accessoire.

#### II.4.4. Théorème de Bernoulli : écoulement d'un fluide réel

Soit une installation ne comportant pas de machine hydraulique telles que : pompe ou turbine. Il peut y avoir des pertes de charge entre les points (A) et (B) : la relation de Bernoulli s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2) + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A) + (p_B - p_A) = -\Delta p \quad (33)$$

$\Delta p$  : Représente l'ensemble des pertes de charge entre le point (A) et le point (B) exprimées en « Pascal ».

Dans le cas d'une installation comportant une (ou des) machine(s) hydraulique(s), la relation de Bernoulli devient :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2) + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A) + (p_B - p_A) = -\Delta p + \frac{P}{q_v} \quad (34)$$

P : Représente la puissance échangée entre le fluide et la machine hydraulique.

$\Delta p$  : Représente l'ensemble des pertes de charge entre (A) et (B) exprimées en « Pascal ».

## Applications

**Application 1.** Un jet d'eau est alimenté à partir d'un réservoir de grandes dimensions au moyen d'une pompe centrifuge de débit volumique de 2 litres par seconde, à travers une conduite de longueur 15m et de diamètre intérieur de 3cm. La conduite présente un coude de 90°  $\mu_{\text{eau}} = 10^{-3}$  Pa  $K_{\text{coude}} = 0.3$ ,

1. Calculer la vitesse de l'écoulement
2. Calculer le nombre de Reynolds et préciser la nature de l'écoulement
3. Calculer le coefficient de perte de charge
4. Calculer la perte de charge totale dans le circuit

## Solution

1. Calcul de la vitesse : v

$$q_v = S \cdot v \Rightarrow v = \frac{q_v}{S}, S = \pi \cdot r^2 \text{ donc: } v = \frac{q_v}{\pi \cdot r^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{3.14 \times 0.015^2} = 2.83 \text{ m/s}$$

2. Calcul du nombre de Reynolds : Re

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} : Re = \frac{1000 \times 2.83 \times 0.03}{10^{-3}} = 84925.69 \approx 84926$$

$Re > 3000$  donc le régime est turbulent

3. Calcul du coefficient de perte de charge

$$\Delta P_{\text{linéaires}} = \lambda \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \quad (\text{Pa})$$

$$R > 2320 \rightarrow \lambda = 0.3164 \cdot \text{Re}^{-0.25}$$

$$\Delta P_{\text{linéaires}} = (0.3164 / \sqrt[4]{84925.69}) \frac{1000 \cdot (2.83)^2}{2} \cdot \frac{15}{0.03} = 37109.88 \text{ Pa}$$

4. Calcul de la perte de charge totale dans le circuit

$$\Delta P = \sum \Delta P_{\text{linéaires}} + \sum \Delta P_{\text{singulières}}$$

$$\Delta P_{\text{singulières}} = k \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} = 0.3 \times \frac{1000 \cdot 2.83^2}{2} = 1201.335 \text{ (Pa)}$$

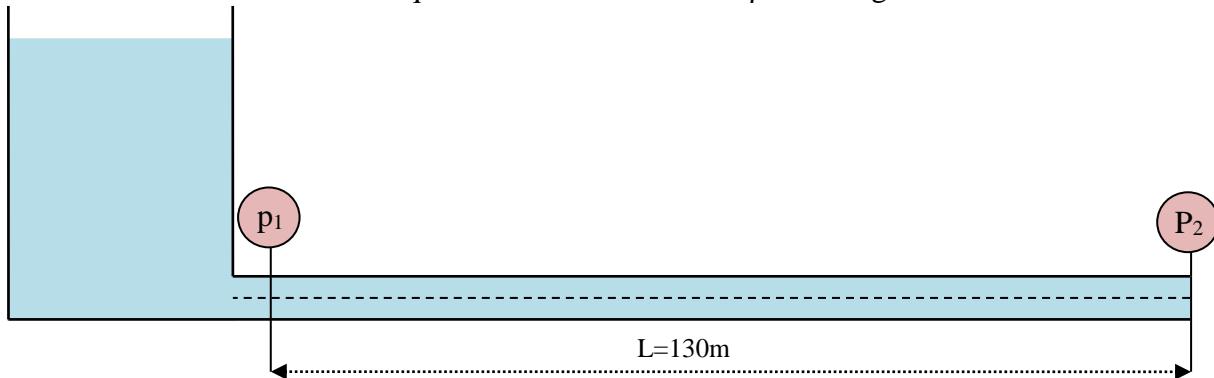
Donc :

$$\Delta P = 37109.88 + 1201.335 = 38311.21 \text{ Pa}$$

**Application 2.** A partir d' un réservoir de très grande section ouvert à l' air libre, et à une vitesse :  $V=1,5 \text{ m/s}$  une quantité d'eau s'écoule dans une conduite horizontale de diamètre :  $d = 120 \text{ mm}$ . Au dessus de ce tube sont installés deux manomètres distants de :  $L = 130 \text{ m}$ . On enregistre une chute de pression :  $\Delta p = p_1 - p_2 = 1,5 \text{ bar}$  (figure.6.25).

1. En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la valeur du coefficient de pertes de charge linéaire «  $\lambda$  » en fonction de  $\Delta P$ ,  $\rho$ ,  $L$ ,  $d$  et  $V$ .

2. Supposons que l'écoulement est laminaire, calculer le nombre de Reynolds en fonction de  $\lambda$ . En déduire la viscosité cinétique du fluide. On donne :  $\rho = 961 \text{ kg/m}^3$ .



**Figure.6.25.** Ecoulement de l'eau du réservoir dans une conduite horizontale

### Solution

1. Suivant la loi de Bernoulli nous avons :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = -\Delta p$$

$$p_2 = p_1, \quad V_2 = V_1, \quad z_2 = z_1, \quad -\Delta p = -\Delta p_{linéaire}$$

$$-\Delta p = -\lambda \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

$$\lambda = \frac{\Delta p \cdot 2}{\rho \cdot v^2} \cdot \frac{D}{L} = \frac{150000 \cdot 2}{961 \cdot (1.5)^2} \cdot \frac{0.12}{130} = 12.8 \times 10^{-2}$$

2. Suivant la loi de poiseuille :

$$Re = \frac{64}{\lambda} = \frac{64}{0.128} = 500$$

on peut donc déduire que :

$$Re = \frac{\nu \cdot D}{v} \Rightarrow \nu = \frac{\nu \cdot D}{Re} = \frac{1.5 \cdot 0.12}{500} = 3.6 \times 10^{-4}$$

**Application 3.** On considère un pipe-line horizontal de longueur «  $L$  », de diamètre «  $d$  » = 25 cm est destiné à acheminer du pétrole ( $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0,267 \text{ Pa.s}$ ) brut d'une station « A » vers une station « B » avec un débit massique :  $q_m = 18 \text{ kg/s}$ . (figure.6.26).

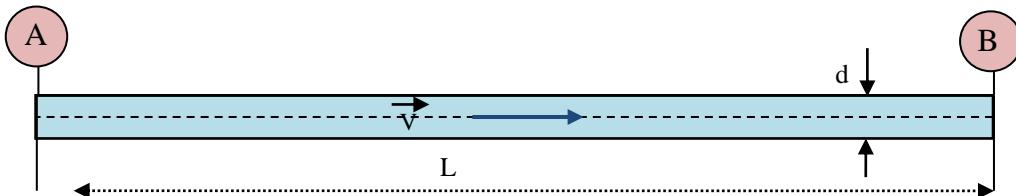
1. Calculer le débit volumique «  $q_v$  » du pétrole, et déterminer sa vitesse d'écoulement «  $V$  ».

2. Calculer le nombre de Reynolds «  $Re$  », déduire la nature de l'écoulement.

3. Calculer la valeur du coefficient de perte de charge linéaire «  $\lambda$  ».

4. Donner l'équation de Bernoulli entre « A » et « B ». Préciser les conditions d'application et simplifier.

5. Déterminer la longueur maximale entre la station « A » et la station « B » à partir de laquelle l'écart de la pression ( $P_A - P_B$ ) dépasse 3 bar.



**Figure 6.26.** Un pipe-line horizontal

### Solution

1. Calcul du débit volumique «  $q_v$  » du pétrole :

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{18}{900} = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Détermination de sa vitesse d'écoulement « V »

$$q_v = S \times V = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times V \Rightarrow V = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \times 0.02}{3.14 \times 0.25^2} = 0.407 \text{ m/s}$$

2. Calcul du nombre de Reynolds «  $Re$  »

$$Re = \frac{V \cdot d}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{0.407 \times 0.25}{\frac{0.267}{900}} = 350.862$$

«  $Re$  » est inférieur à 2000 ; on déduit que l'écoulement est laminaire.

3. Calcul de la valeur du coefficient de perte de charge linéaire «  $\lambda$  ».

Suivant la loi de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{350.862} = 0.182$$

4. L'équation de Bernoulli entre « A » et « B » :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2) + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A) + (p_B - p_A) = \Delta p_l$$

$V_B = V_A$ ,  $Z_B = Z_A$  L'équation de Bernoulli entre « A » et « B » devient :

$$p_B - p_A = \Delta p_l$$

5. Détermination de la longueur maximale entre « A » et « B » si  $(P_A - P_B)$  dépasse 3 bar.

$$\Delta P_{linéaires} = \lambda \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{d} \Rightarrow L = \frac{2 \cdot d \cdot \Delta p}{\lambda \cdot \rho \cdot v^2} = \frac{2 \times 0.25 \times 3 \times 10^5}{0.182 \times 900 \times 0.407^2} = 5528 \text{ km}$$

## Chapitre 7

### Thermodynamique

#### Introduction

Pour toute transformation de la matière, il existe deux façons : une transformation physique telle que la fusion, et l'ébullition et une transformation chimique telle que les réactions chimiques. Chacune de ces deux transformations se fait à deux niveaux :

- Microscopique, et non observable à l'œil nu ; celle des atomes et des molécules.
- Macroscopique et observable à l'œil nu : comme la variation de pression, de volume.

La thermodynamique est la branche de la physique qui s'intéresse aux échanges d'énergie entre systèmes **macroscopiques**. Elle traite des principes gouvernant le transfert de la chaleur, d'un lieu à un autre, et la transformation de l'énergie d'une forme à une autre, elle prévoit donc l'évolution d'un système en s'appuyant sur deux notions : **l'énergie** et **l'entropie**. De ce fait une claire définition d'un système thermodynamique est nécessaire ; des variables comme le volume, la température, la pression, l'énergie interne, l'enthalpie et l'entropie permettent de définir son état. Les changements de ces variables modifient les systèmes thermodynamiques.

L'étude thermodynamique porte essentiellement sur les caractéristiques de l'état initial ( $E_1$ ) et l'état final ( $E_2$ ) du système qui évolue. Cette étude ne tient pas compte du paramètre de temps ( $t$ ) ni du chemin suivi au cours d'une transformation donnée.

#### 1. Définition du système

Un système est la quantité macroscopique de matière. C'est la partie de l'espace que l'on étudie; ce qui n'est pas le système est le milieu extérieur. En thermodynamique pour décrire un système, il est indispensable de délimiter ses frontières (réelle ou fictive) par rapport au milieu extérieur, déterminer les variables de son état. Donc on peut définir le système comme étant la partie de matière (de masse donnée) délimitée par rapport au milieu extérieur. L'ensemble du système et du milieu extérieur constitue l'univers. (figure.7.1).

**Exemple** : quand on effectue une réaction chimique dans un tube à essais, le tube à essai et son contenu constituent le système, le reste de l'univers est le milieu extérieur.

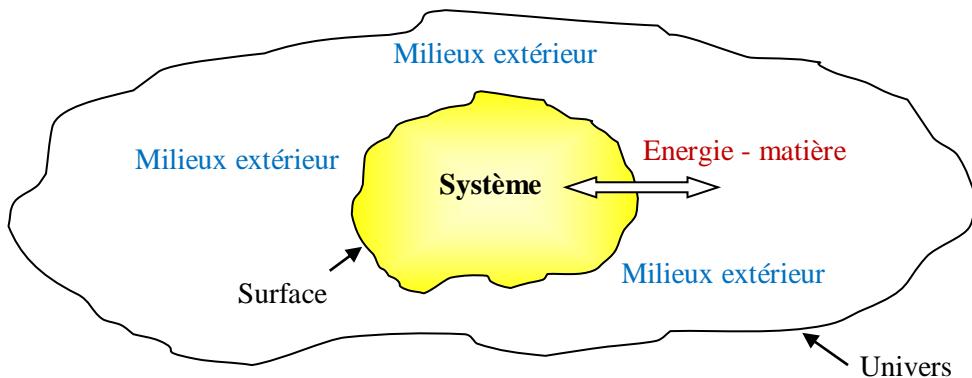
**NB:** Le milieu extérieur est le reste de l'espace entourant le système.

Il existe différents types de systèmes thermodynamiques qui sont :

##### 1.1. Système ouvert

Un système est dit **ouvert** s'il permet des échanges **d'énergie et de matière** avec le milieu extérieur.

**Exemple** : Casserole d'eau bouillante, Feu de bois

**Figure.7.1.**Délimitation d'un système

## 1.2. Système fermé

Un système est dit **fermé** s'il permet un échange d'**énergie**, mais pas de **matière** avec le milieu extérieur.

**Exemple :** Un tube à essai hermétiquement clos, un radiateur, un réfrigérateur.

## 1.3. Système isolé

Un système est dit **isolé** s'il ne peut échanger ni de **matière**, ni d'**énergie** avec le milieu extérieur.

**Exemple :** Un calorimètre qui est une bouteille thermos qui empêche les échanges de chaleur avec le milieu extérieur (sa paroi est adiabatique). Elle est soigneusement fermée par un bouchon qui empêche les échanges de matière avec le milieu extérieur (sa paroi est indéformable).

**Remarque :** Un système isolé est souvent utilisé pour mesurer les chaleurs de réaction.

## 1.4. Etat d'un système

L'état d'un système est déterminé par des variables qui le caractérisent à chaque instant telles que : la pression « P », la température « T » et le volume « V » sont des variables d'état.

### 1.4.a. Variables extensives

Les variables extensives sont des variables proportionnelles à la quantité de matière telle que la masse « m », le volume « V » l'énergie interne « U ».

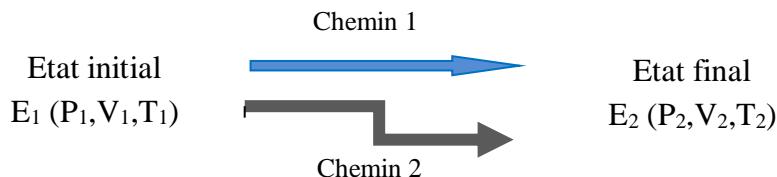
### 1.4.b. Variables intensives

Les variables intensives sont des variables indépendantes de la masse telle que la température « T » la pression « P » la concentration.

**Exemple :** Pour un fluide homogène, une transformation modifiera au moins une des trois variables : P, V ou T

### 1.5.Fonction d'état

La fonction d'état est une fonction qui ne dépend que de l'état macroscopique du système et donc sa variation ne dépend donc pas du chemin suivi, elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final. (figure.7.2).



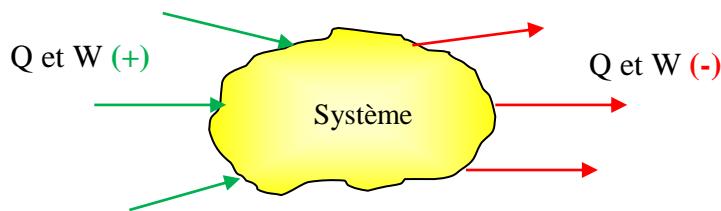
**Figure.7.2.** Etats et chemins suivis d'une transformation

### 1.6. Etat d'équilibre d'un système

On dit qu'un système est en équilibre lorsque toutes ses variables d'état demeurent constantes lors d'une transformation et au cours du temps. Il est en équilibre thermique si la température est constante ( $T=cst$ ), en équilibre mécanique si la pression est constante ( $P=cst$ ) et il est en équilibre chimique si sa composition demeure la même.

### 1.7.Transferts échangés par le système

Lors d'une transformation, le système échange de la chaleur « Q » et du travail « W » avec son environnement (milieu extérieur). Q et W sont positifs (+) s'ils sont fournis au système. Ils sont négatifs (-) s'ils sont extraits du système (cédés au milieu extérieur).



**Figure.7.3.** Echange (système –environnement)

## 2. Transformation

Une transformation est une opération qui modifie l'état d'un système, le faisant évoluer d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final.

### 2.1. Différents types de transformations

### 2.1.a. Transformations isobare à pression constante

Une transformation isobare est une transformation à pression constante :

$$P_{\text{initiale}} = P_{\text{finale}}$$

### 2.1.b. Transformations isotherme

Une transformation isotherme est une transformation à température constante :

$$T_{\text{initiale}} = T_{\text{finale}}$$

### 2.1.c. Transformations isochore

Une transformation isochore est une transformation à volume constant :

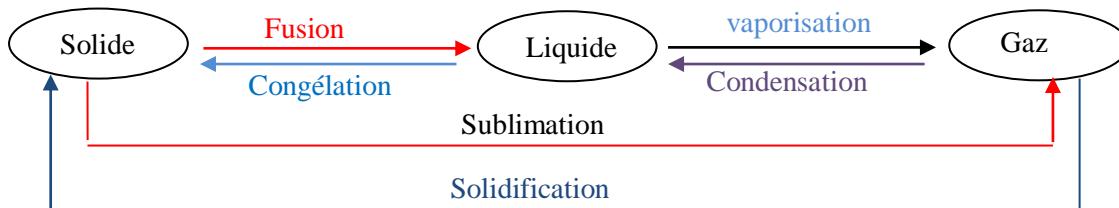
$$V_{\text{initial}} = V_{\text{final}}$$

### 2.1.d. Transformations adiabatique

Une transformation adiabatique est une transformation au cours de laquelle l'échange de chaleur avec le milieu extérieur est inexistant (quantité de la chaleur est nulle) :  $Q = 0$

## 2.2. Transformation physique

La transformation physique est une transformation avec un changement d'état qui s'effectue à pression et à température constantes.



**Figure 7.4.** Différentes transformations physiques

### 2.2.1. Transformations irréversibles

Lors d'une transformation non quasi-statique, par exemple lors de la compression brutale d'un gaz dans une enceinte, des turbulences apparaissent et sont sources de non uniformités : on en déduit qu'une transformation non quasi-statique est forcément irréversible. Les principales causes d'irréversibilité sont :

- Les frottements ; phénomènes dissipatifs (mécaniques, effet Joule)
- La non uniformité des grandeurs intensives (température, pression, concentration de particules), qui donnent lieu à des phénomènes de diffusion.
- Réactions chimiques.

## 2.2.2. Transformations réversible

En terme d'équilibre thermodynamique, pour qu'une transformation soit réversible, il faut qu'on puisse réaliser exactement la transformation inverse dans les mêmes conditions. La transformation d'un système est réellement liée aux contraintes imposées par l'extérieur. Une transformation réversible est donc une transformation pour laquelle à chaque instant le système est en équilibre thermodynamique interne et externe.

Une transformation quasi-statique n'est pas forcément réversible : transformation avec frottements qui sont infiniment lentes, pour lesquelles le système se situe toujours au voisinage de l'équilibre interne, et pour autant non réversible. Le voisinage de l'équilibre interne est donc une condition nécessaire mais non suffisante de la réversibilité.

**Remarque :** Les transformations réelles sont toujours irréversibles.

- Transformation non quasi-statique  $\Rightarrow$  Transformation irréversible.
- Transformation réversible  $\Rightarrow$  transformation quasi-statique.

## 3. Gaz parfait

Un gaz parfait est un gaz constitué d'entités ne présentant aucune interaction intermoléculaire, et dont le volume propre du gaz contenu est négligeable devant le volume du contenant. Le gaz parfait est un modèle thermodynamique décrivant le comportement des gaz réels à basse pression et il obéit une équation d'état appelée « Equation d'état d'un gaz parfait »

### 3.1. Équation d'état

$$PV = nRT \quad (1)$$

P : la pression à l'intérieur du système en pascal (Pa)

T : la température du système en Kelvin (K)

V : le volume et la quantité de matière Volume du système en mètre cube ( $m^3$ )

n : Nombre de mole de gaz du système en moles

R = la constante des gaz parfaits.  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Dans les conditions normales de température et pression (CNTP)  $P = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et  $T = 0^\circ\text{C}$   
on peut calculer  $V_{\text{molaire}} = 22,4 \text{ l.mol}^{-1}$

1 bar = 1 atm =  $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

$0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$ .

### 3.2. Masse volumique

$$\rho = \frac{M \cdot P}{R \cdot T} \quad (2)$$

$\rho$ : Masse volumique ( $\text{Kg.m}^{-3}$ )

M: masse molaire ( $\text{Kg. Mol}^{-1}$ )

P: pression du gaz (Pa)

R: constante des gaz parfaits ( $\text{J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )

T: température absolue (K)

On donne la masse molaire moyenne de l'air  $M_{air} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$

### 3.3. Densité

La densité d'un gaz est définie comme étant le rapport de sa masse volumique à la masse volumique de l'air.

$$d = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_{air}} = \frac{M_{gaz}}{M_{air}} \quad (3)$$

## 4. Différentes lois des gaz parfaits

### 4.1. Loi de Boyle Mariotte

A température constante, la pression d'une masse d'un gaz parfait est inversement proportionnelle à son volume.

$$PV = cst \Rightarrow P_i \cdot V_i = P_f \cdot V_f \quad (4)$$

### 4.2. Loi de Gay –Lussac

A pression constante, le volume d'une masse d'un gaz parfait est proportionnel à sa température.

$$\frac{V}{T} = cst \Rightarrow \frac{V_i}{T_f} = \frac{V_f}{T_f} \quad (5)$$

### 4.3. Loi de Charles

A volume constant, la pression d'une masse d'un gaz parfait est proportionnelle à sa température.

$$\frac{P}{T} = cst \Rightarrow \frac{P_f}{T_f} = \frac{P_f}{T_f} \quad (6)$$

## 5. Mélanges des gaz parfaits

Un mélange de gaz parfaits est considéré idéal quand toutes les particules de ce mélange ne subissent aucune interaction. La pression totale d'un mélange idéal ne dépend que de la quantité totale de matière et pas de la nature des gaz présents.

### 5.1. Quantité de matière

La quantité de matière totale dans le mélange se calcule comme suit :

$$n_t = \sum n_i \quad (7)$$

### 5.2. Fraction molaire du constituant d'un mélange

La fraction molaire de chaque constituant est donc :

$$x_i = \frac{n_i}{n_t} \quad (8)$$

### 5.3. Masse molaire moyenne d'un mélange

La masse molaire moyenne d'un mélange est définie par :

$$m_{mélange} = \frac{masse_{totale}}{n_{totale}} = \frac{m_t}{n_t} = \sum x_i m_i \quad (9)$$

### 5.4. Masse volumique d'un mélange

$$\rho = \frac{P \cdot M_{mélange}}{R \cdot T} \quad (10)$$

### 5.5. Densité d'un mélange

$$d_{mélange} = \frac{M_{mélange}}{M_{air}} \quad (11)$$

### 5.5. Pressions partielles

-Loi de Dalton

A la même température on considère « Pi » la pression partielle d'un gaz dans un mélange de gaz, la pression que ce gaz exerce sur les parois du récipient s'il était seul à occuper.

$$P_t = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \sum_{i=1}^n P_i \quad (12)$$

Pour un gaz, on a

$$P_i V = n_i R T \dots \dots \dots (a)$$

Et pour le mélange

$$P_t V = n_t R T \dots \dots \dots (b)$$

De la relation (a) et (b), on a :

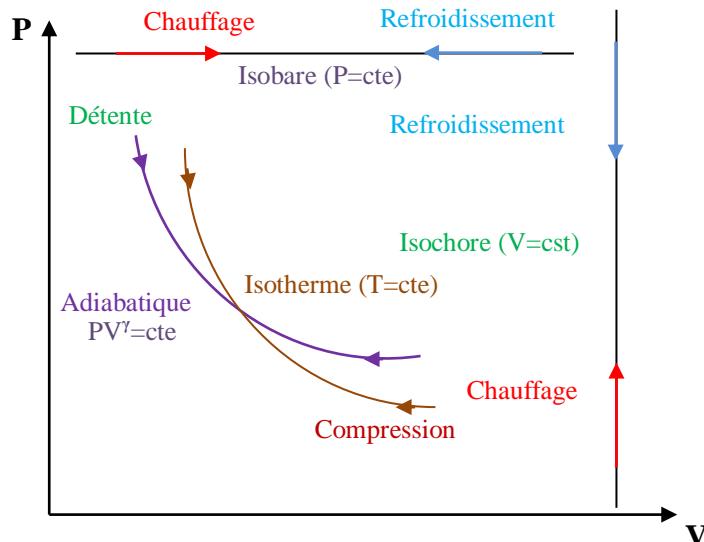
$$\frac{P_i}{P_t} = \frac{n_i}{n_t}$$

On obtient donc :

$$P_i = x_i P_t \quad (x_i = \frac{n_i}{n_t}) \quad (13)$$

### 6. Diagramme de Clapeyron

Ce diagramme représente l'évolution des transformations lorsque l'on porte la pression en ordonnée et le volume en abscisse.

**Figure 7.5.** Diagramme de Clapeyron

## 7. Température

Comme la chaleur est une grandeur physique mesurable, la température est la quantité physique qui caractérise la quantité de chaleur contenue dans un corps. La température possède différentes unités de mesure ou échelles de température. Notée «  $t$  » elle se mesure en degrés Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ). À la pression atmosphérique,  $0\ ^{\circ}\text{C}$  et  $100\ ^{\circ}\text{C}$  sont respectivement les points de congélation et d'ébullition de l'eau. L'échelle absolue de température « Kelvin » a été établie suite à la proportionnalité de la pression avec la température lors du refroidissement d'un gaz à masse et volume constants. Pour un gaz idéal, la pression sera nulle ( $p=0$ ) à une température de ( $t = -273,15\ ^{\circ}\text{C}$ ). Cette limite absolue et le point zéro de l'échelle Kelvin (K) qui est l'unité de mesure de température absolue ( $T$ ). Une relation existe entre l'échelle Kelvin et l'échelle degrés Celsius :

$$T(K) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15 \quad (14)$$

## 8. Énergie interne

La thermodynamique s'intéresse aux échanges d'énergie entre systèmes macroscopiques. On dit d'un corps qu'il possède de l'énergie, si l'on peut en tirer un travail. L'énergie interne est l'une des variables qui caractérisent l'état d'un système thermodynamique. Elle est l'énergie totale qu'il contient. Elle se compose de :

### 8.1. Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'une molécule dépend de son déplacement, plus sa vitesse est grande, plus elle possède d'énergie cinétique.

### 8.2. Énergie potentielle

L'énergie potentielle est l'énergie emmagasinée contenue dans la dispersion des molécules, représentant ainsi l'interaction de ces particules entre elles.

-L'énergie interne est désignée par « U » et se mesure en joules (J) dans le Système international (SI).

-L'énergie interne constitue l'énergie potentielle des molécules. Elle est l'énergie totale que peut fournir un corps à son environnement extérieur en conservant sa masse.

- «  $\Delta U$  » est la variation d'énergie interne, elle est égale à la chaleur « Q » si le corps n'a cédé ou absorbé de l'énergie que sous forme de chaleur.

-La chaleur « Q » que peut perdre un corps (au maximum) est égale à son énergie interne : « U ».

## 9. Chaleur

La chaleur est une forme d'énergie, lorsque aucun travail n'est effectué, la chaleur est la mesure d'un changement d'énergie interne aussi égale à la variation de l'enthalpie d'un système thermodynamique. Lorsque l'on effectue du travail, la variation d'énergie interne est la somme du travail et de la chaleur. Représentée par la lettre Q, la chaleur est mesurée en kilojoules (kJ).

## 10. Enthalpie

L'enthalpie « H » est une variable utile et importante d'un système thermodynamique. Elle défini comme étant la somme de l'énergie interne et du produit de la pression par le volume du système. L'enthalpie se mesure en joules (J) dans le Système international.

$$H = U + P \times V \quad (15)$$

L'enthalpie contenue dans 1 kg de matière est appelée «enthalpie spécifique ou massique» désignée par « h ». Sa valeur dépend de la substance, de la pression qu'elle subit, de sa température et de sa phase. Elle est mesurée en « kJ/kg ». La valeur de l'enthalpie « H » peut donc être définie, en multipliant l'enthalpie massique « h » par la masse « m »:

$$H = m \times h \quad (16)$$

## 11. Travail

Une pompe à vélo permet de définir simplement la notion de travail en thermodynamique. Si l'on déplace le piston, le travail «W» est le produit de la force «F» par le déplacement «d» :

$$W = F \times d = p \times S \times d \quad (17)$$

Comme le changement de volume «  $\Delta V$  » équivaut à «  $S \times d$  » le travail mesuré en Joule en thermodynamique se calcule comme suit :

$$\Delta V = S \times d \Rightarrow W = p \times \Delta V \quad (18)$$

Le travail peut être positif ( $W > 0$ ) si l'énergie est fournie au système (cas d'une pompe qui fournit de l'énergie au fluide).

Le travail est négatif ( $W < 0$ ) si l'énergie est prise du système (cas d'une turbine qui récupère l'énergie cinétique d'un fluide pour mettre en mouvement l'arbre de transmission).

## 12. Premier principe de la thermodynamique

Ce principe concerne la reformulation d'une loi générale de la physique, pour les processus thermodynamiques, cette loi est la loi de conservation de l'énergie. Lors d'une transformation, la variation de l'énergie interne d'un système est égal à la somme du travail et de la chaleur échangée entre le système et son environnement :

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q \quad (19)$$

$\Delta Q$  et  $\Delta W$  sont positifs si le travail et la chaleur sont fournis au système. Ils sont négatifs s'ils sont extraits du système, cela signifie que :

- L'énergie interne peut augmenter lorsque de la chaleur ou un travail est apporté au système, la variation de l'énergie interne sera alors positive.
- L'énergie interne peut diminuer lorsque de la chaleur ou un travail est apporté par le système à ce qui l'entoure, la variation de l'énergie interne sera alors négative.

### -Cas particulier

Dans un cycle, le système retourne à son état initial, donc à la même valeur d'énergie interne ( $\Delta U=0$ ). Dans ce cas, le travail fourni par le système est égal à la chaleur échangée par le système. Ce qui s'exprime :

$$\Delta W = -\Delta Q \quad (20)$$

## 13. Deuxième principe de la thermodynamique

D'après le premier principe de la thermodynamique, l'énergie ne peut être ni créée ni détruite, elle peut seulement se transformer en différentes formes. Ce principe permet également de prévoir la quantité d'énergie échangée par un système avec son environnement sans savoir le sens de cet échange, donc il n'explique pas l'irréversibilité de certaines transformations que ce soit spontanées ou naturelles. Afin d'éclaircir cette ambiguïté l'introduction du deuxième principe de la thermodynamique a été nécessaire et ainsi pouvoir prévoir les évolutions des systèmes pour préciser la nature d'une transformation (réversible, irréversible). dit aussi **principe d'évolution** déduit des faits expérimentaux à travers une nouvelle fonction d'état extensive appelée **entropie (S)**.

### 13.1. Entropie

Physiquement, l'entropie est une grandeur abstraite qui mesure le degré de désordre d'un système à l'échelle microscopique, et décrit son comportement par sa maximalisation, dont les variations sont exprimées par :

$$\Delta S = S_f - S_i = \int \frac{\partial Q}{T} \quad (21)$$

### 13.2. Propriétés

-L'entropie ne dépend que de l'état initial (**i**) et l'état final (**f**). Il ne dépend pas du chemin suivi.

-L'entropie d'un système thermodynamique peut être calculée selon le type et la nature de la transformation qu'il subit, telles que : Transformation réversible isotherme, isobare, isotherme, isochore et adiabatique.

## Références

- [1] Horst Stocker , Franci Jundt, Georges Guillaume Toute la physique 1<sup>ier</sup> et 2<sup>ième</sup> cycle écoles d'ingénieurs 2<sup>ième</sup> tirage corrigé DUNOD.
- [2] Eugène Rouché, éléments de statique graphique, librairie polytechnique baudry et C<sup>ie</sup>, libraires - éditeurs 1889.
- [3] Le Système international d'unités, Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre , Bureau international des poids et mesures 8<sup>ème</sup> édition 2006.
- [4] Hassen Ghalila Physique pour l'architecte 2007.
- [5] Ouziaux R., Perrier J. Mécanique des fluides appliquée, Dunod, Bordas paris, 1978 ISBN 2-04-010143-8.
- [6] Régis Joulié Mécanique des fluides appliquée ellipse/édition marketing S.A., 1998 ISBN 2-7298-6768-6.
- [7] Nacer Halem, Thermodynamique, rappels de cours & recueil d'exercices corrigés 1<sup>ière</sup> années universitaires sciences exactes, technologie, informatique, office des publications universitaires ISBN 9961.0.06.75.5.
- [8] Catherine Botet, Thermodynamique classique, cours et exercices corrigés, ellipses, 1990 ISBN 2-7298-9090-4.

|                             |                                      |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| <b>Semestre 1</b>           | <a href="#">(Revenir au tableau)</a> |
| <b>Unité d'enseignement</b> | <b>UET 1</b>                         |
| <b>Matière</b>              | <b>Physique</b>                      |
| <b>Coefficient</b>          | <b>1</b>                             |
| <b>Crédit</b>               | <b>1</b>                             |

**Objectifs de la matière :**

Ces enseignements constituent une matrice pour la compréhension du comportement statique et dynamique de la construction sous ses différents aspects. Ils consacrent l'approche de phénomènes physiques liés directement ou indirectement à l'acte de bâtir.

Les principaux objectifs ciblés en sont :

1. Préparation de l'étudiant aux matières techniques (sciences de l'ingénieur) participant du cursus de formation ;
2. Développement de la logique dans l'interprétation des phénomènes physiques dans le bâtiment ;
3. familiarisation avec le langage de l'ingénieur.

**Contenu de la matière**

- Notions générales ;
- Unités de mesure : le système international SI ;
- Les forces (statiques) : équilibre, composition décomposition ;
- Polygone des forces et polygone funiculaire ;
- Statique analytique ;
- La statique des solides : les conditions d'équilibre des corps solides (analytiquement et graphiquement) pour différentes forces.
- Le travail et l'énergie : la quantité de mouvement, travail, énergie cinétique, énergie potentielle, énergie mécanique totale.
- Vibration et ondes : Vibration, ondes, périodes et forces d'inertie.
- Mécanique des fluides : hydrostatique, théorème de Pascal, hydrodynamique , théorème de Bernoulli et pertes de charges
- Thermodynamique : Premier et deuxième principe

**Références**

À définir par l'enseignant en chaque début de semestre.