

Notes de cours

Commande prédictive

Professeur Salim Labiod

Département d'Automatique

Faculté des Sciences et de la Technologie

Université de Jijel

Version 2022

Introduction à la commande prédictive

1.1 Introduction

Les industries de production du type pétrole, chimie, pharmacie, agro-alimentaire, métallurgie, énergie, fours, etc., utilisent, classiquement, depuis longtemps le régulateur PID. Mais ce régulateur a des limites : processus difficiles, prise en compte de contraintes, performances limitées, compromis de réglage, etc.

La commande prédictive peut être utilisée pour commander des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et sorties où le simple régulateur PID est insuffisant. Cette technique est particulièrement intéressante lorsque les systèmes possèdent des retards importants, des réponses inverses et de nombreuses perturbations.

Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du système à l'intérieur du contrôleur en temps réel afin de prédire le comportement futur du système. La commande prédictive fait partie alors des techniques de commande à modèle interne.

La commande prédictive est un terme général qui désigne un ensemble d'approches de commande différentes (DMC, GPC, PFC, NLMPC, ...). Néanmoins, toutes ces techniques se basent sur le même principe de fonctionnement. Elles utilisent explicitement un modèle du système à commander afin d'obtenir le signal de commande par la minimisation d'une fonction de coût.

1.2 Applications industrielles

Depuis le début de son application dans les années 1970, l'utilisation de la commande prédictive basée sur le modèle s'est répandue industriellement à travers plusieurs champs d'application :

- 1979 Dynamic Matrix Control (DCM) : industrie pétrolière
- Plus de 4000 applications répertoriées en début des années 2000.
- Robots, machines-outils, raffinerie de pétrole et industrie chimique, industrie chimique ou biochimique, agroalimentaire, aéronautique, métallurgie, l'industrie du ciment, bâtiment intelligent ...
- Exemple : régulation de vitesse des ascenseurs de la tour Eiffel.

1.3 Historique

- Début à la fin des années 70
- Améliorations dans les années 90 : faisabilité, stabilité en boucle fermée
- Maturité depuis le début des années 2000 : commande prédictive robuste, solutions explicites, commande prédictive des systèmes hybrides et non-linéaires, applications aux systèmes rapides
- 2010 : commande prédictive stochastique, distribuée, décentralisée, ...

1.4 Différentes approches de la commande prédictive

- DMC (Dynamic Matrix Control)
 - Utilise la réponse indicielle du système
 - Processus stable et sans intégrateur
- MAC (Model Algorithmic Control)
 - Utilise la réponse impulsionnelle
- PFC (Predictive Functional Control)
 - Utilise un modèle d'état du système ou une fonction de transfert

- Peut s'appliquer aux systèmes non linéaires
- GPC (Generalized Predictive Control)
 - Utilise un modèle CARIMA
 - La méthode de commande prédictive la plus répandue
- Commande prédictive à base de modèle d'état
 - Utilise un modèle d'état du système.
 - Peut s'appliquer aux systèmes non linéaires

1.5 Principe de fonctionnement

La philosophie de la commande prédictive se résume à utiliser un modèle du système pour prédire le comportement du système et choisir le signal de commande par la minimisation d'un certain coût tout en respectant les contraintes.

La commande prédictive réalise à chaque période d'échantillonnage les étapes suivantes :

1. Calcul des prédictions des variables de sortie à des instants futurs (notion d'horizon de prédiction) grâce à un modèle du système et les entrées, sorties et variables d'état déjà mesurés.
2. Calcul des actions optimales de commande à appliquer au système par la minimisation d'un critère le plus souvent quadratique incluant l'erreur de poursuite et l'effort de commande (notion d'horizon de commande).
3. Seul le premier élément de la loi de commande calculée est réellement appliqué au système.

Toutes ces étapes se répètent ensuite, c'est le principe de l'horizon fuyant (horizon glissant) qui se résume comme suit :

- le premier élément de la séquence de commande « optimale » calculée est appliqué sur le système,
- les séquences sont décalées,
- une nouvelle sortie est mesurée,
- la procédure complète est répétée.

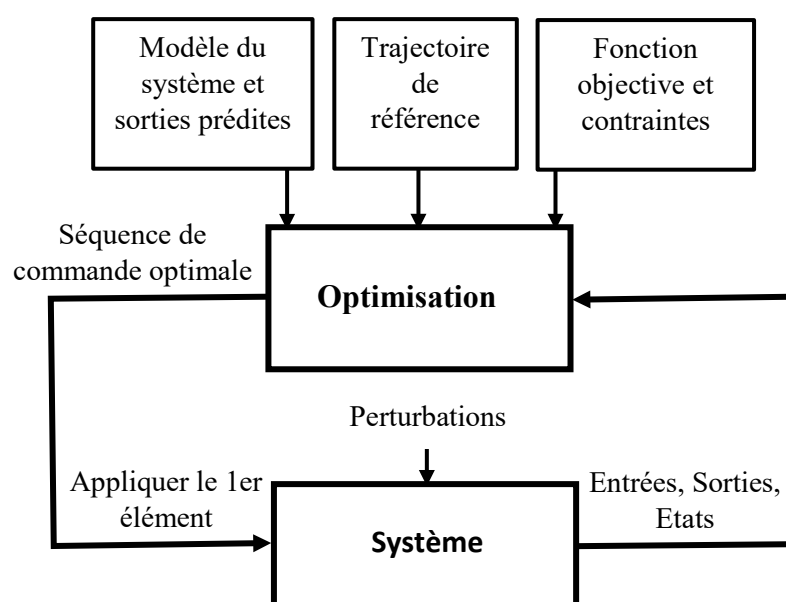


Figure 1.1 : Structure générale de la commande prédictive

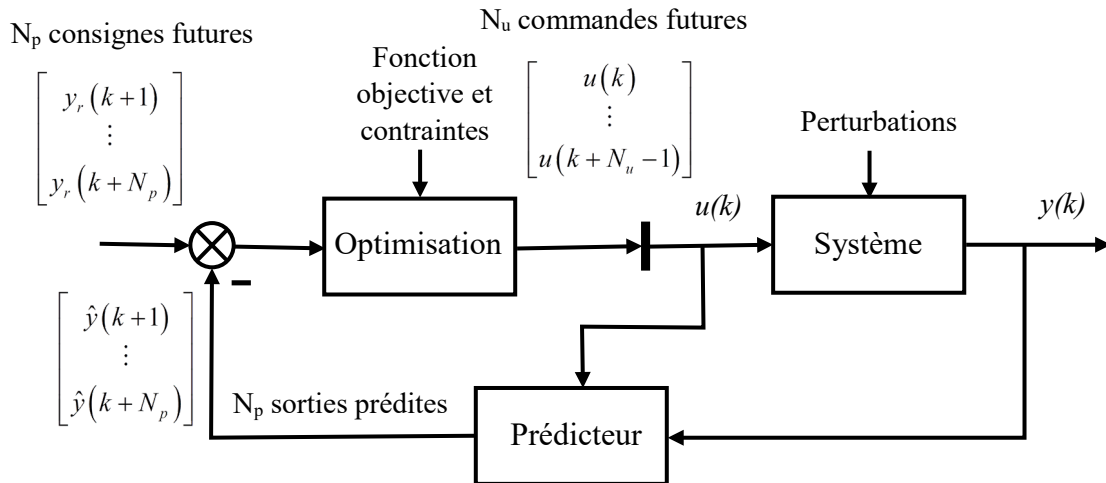


Figure 1.2 : Structure de base de la commande prédictive

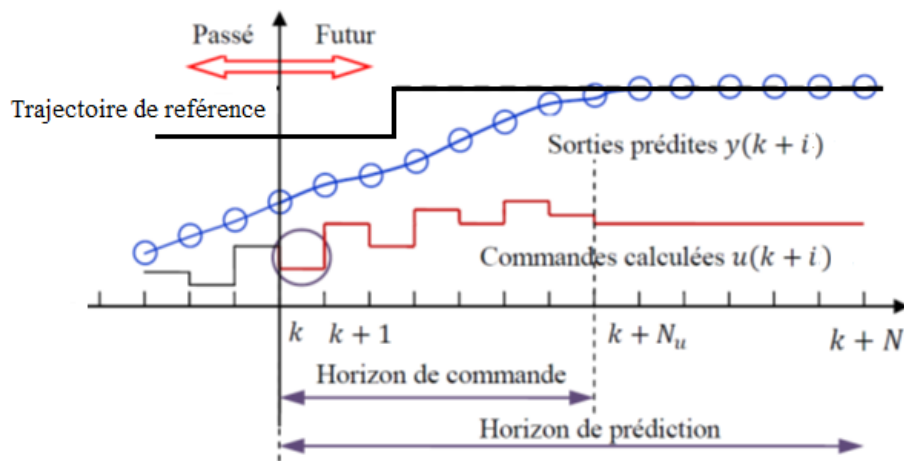


Figure 1.3 : Principe de la commande prédictive

Pour ce faire, la stratégie de commande prédictive s'articule autour des points suivants :

- Choix d'un modèle du système à commander sur lequel est basée la prédiction de la sortie,
- Spécification de la trajectoire de référence que doit suivre la sortie du système,
- Formulation d'un problème d'optimisation traduisant les objectifs de commande,
- Utilisation d'une méthode de résolution pour le problème d'optimisation aboutissant aux commandes futures à appliquer au système,
- Application du premier élément de la séquence de commande au système et réitération à l'instant suivant.

Les paramètres de réglages qu'on retrouve dans la majorité des approches de commande prédictives sont :

- L'horizon de prédiction de la sortie.
- L'horizon de commande.

- Les pondérations intervenant dans le critère de performance sur les erreurs de poursuite et sur l'effort de commande.

1.6 Avantages et inconvénients de la commande prédictive

Les principaux avantages de la commande prédictive sont les suivants :

- L'idée générale est intuitive et facile à comprendre.
- Permet de respecter les contraintes sur les variables d'entrées et de sorties.
- Evite des variations excessives sur les variables d'entrées, la commande est plus douce. Cela permet une meilleure utilisation des actionneurs (vérins, vannes, moteurs) et leur temps de vie est ainsi augmenté.
- En cas de perturbations mesurables, le système s'adapte automatiquement.
- S'applique à tout type de systèmes, des plus simples aux plus complexes (systèmes instables, avec retards, non minimum de phase, très peu amortis, multivariables, non linéaires).
- Technique bien adaptée aux problèmes de suivi de trajectoire sans/sous contraintes (entrées, sorties, états), pour lesquels la trajectoire à suivre est parfaitement connue à l'avance et planifiée.
- Numériquement stable.
- Permet en général un réel gain financier.

Parmi les inconvénients, on cite :

- L'inconvénient principal de la commande MPC est le temps d'exécution, de ce fait la méthode trouve son application beaucoup plus dans le domaine des procédés chimiques qui sont en général des systèmes lents à grande période d'échantillonnage où l'application des méthodes numériques ne pose pas de problème.
- De plus, il n'y a pas de règles définies permettant de choisir les paramètres, sauf quelque compromis entre les différentes caractéristiques déduit par expérience dans le domaine.
- Elle nécessite une modélisation précise (difficulté scientifique). Mise en place du modèle : nécessité de connaître un modèle précis du système à commander.

Commande prédictive par matrice dynamique

Dynamic Matrix Control (DMC)

2.1 Modèle du système

La commande par matrice dynamique est basée sur le modèle à réponse indicielle.

Soit un système linéaire stable en boucle ouverte de fonction de transfert $H(s)$ avec y la sortie du système et u son entrée de commande.

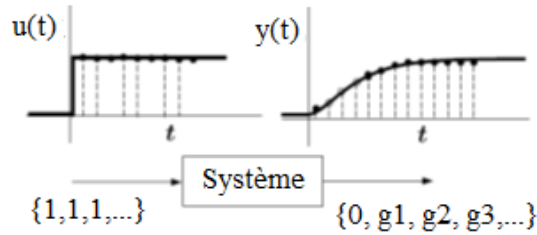


Figure 2.1 : Réponse indicielle du système

Avec des conditions initiales nulles, la réponse indicielle d'un système linéaire monovariante stable peut être donnée par :

$$g(s) = \frac{H(s)}{s} \text{ où } H(s) \text{ est la fonction de transfert du système.}$$

La réponse du système à une entrée $u(t)$ est donnée par :

$$y(s) = H(s)u(s) = \left[\frac{H(s)}{s} \right] [su(s)]$$

$$\text{On a : } g(t) = L^{-1} \left[\frac{H(s)}{s} \right] \text{ la réponse indicielle du système et } \dot{u}(t) = L^{-1} [su(s)]$$

La réponse $y(t)$ peut être donnée par le produit de convolution

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) \dot{u}(t-\tau) d\tau$$

En utilisant la méthode des rectangles, cette intégrale peut être approchée comme suit :

$$y(kT_e) \approx T_e \sum_{j=0}^{\infty} g(jT_e) \dot{u}((k-j)T_e)$$

où T_e est la période d'échantillonnage. La dérivée du signal de commande peut être approchée numériquement comme suit :

$$\dot{u}((k-j)T_e) = \frac{u((k-j)T_e) - u((k-j-1)T_e)}{T_e} = \frac{\Delta u((k-j)T_e)}{T_e}$$

Il vient alors :

$$y(kT_e) \approx \sum_{j=0}^{\infty} g(jT_e) \Delta u((k-j)T_e)$$

Pour simplifier l'écriture, on prendra $y(kT_e) = y(k)$, $\Delta u((k-j)T_e) = \Delta u(k-j)$, $g(jT_e) = g_j$ et avec $g(0) = 0$, on obtient :

$$y(k) \approx \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u(k-j)$$

g_j : Coefficients de la réponse indicielle

$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$: Variation de la commande

Dans la commande prédictive par matrice dynamique, *le système est supposé stable en boucle ouverte*. Alors, les coefficients g_j de la réponse indicielle tend à une valeur constante après N période d'échantillonnage où $NT_e \geq t_r$ (temps de réponse). C'est-à-dire, $g_{N+i} = g_N, \forall i \geq 0$. Alors, on suppose que les valeurs de la réponse indicielle $\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ sont données.

La commande par matrice dynamique est basée sur la prédiction de la sortie du système jusqu'à l'instant futur $k + N_p$ (N_p est appelé horizon de prédiction sur la sortie), et sur la prédiction de l'incrément de commande sur un horizon N_u (N_u est appelé horizon de prédiction sur la commande).

2.2 Structure du prédicteur optimal

La prédiction de la sortie à l'instant future $k+i$ (prédiction à i pas) à partir des données entrée-sortie connues, c'est-à-dire, à partir des valeurs de la sortie jusqu'à l'instant k et des valeurs de la commande (ou l'incrément de commande) jusqu'à l'instant $k-1$, est donnée par :

$$\hat{y}(k+i) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u(k+i-j) + \hat{d}(k+i)$$

où $\hat{d}(k+i)$ est un terme de correction et qui représente une estimation des erreurs de modélisation et des perturbations.

On peut décomposer la prédiction de sortie suivant les effets des entrées passées et futures :

$$\hat{y}(k+i) = \underbrace{\sum_{j=1}^i g_j \Delta u(k+i-j)}_{\text{Effet des entrées futures}} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{\infty} g_j \Delta u(k+i-j)}_{\text{Effet des entrées passées}} + \underbrace{\hat{d}(k+i)}_{\text{Effet des perturbation prédite}}$$

En effectuant des changements de variable convenables (pour les indices), on peut récrire cette équation sous la forme

$$\hat{y}(k+i) = \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-j} \Delta u(k+j) + \sum_{j=1}^{\infty} g_{i+j} \Delta u(k-j) + \hat{d}(k+i)$$

On suppose que le terme $\hat{d}(k)$ est constant le long de l'horizon de prédiction, c'est-à-dire,

$$\hat{d}(k+N_p) = \dots = \hat{d}(k+1) = \hat{d}(k) = y(k) - \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u(k-j)$$

Cette supposition signifie que les perturbations entrent dans le système comme des perturbations de sortie constantes. Cependant, une détérioration des performances peut résulter de cette représentation car, en pratique, les perturbations peuvent agir sur le système d'une autre manière.

Alors, la sortie prédite peut s'écrire comme suit :

$$\hat{y}(k+i) = \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-j} \Delta u(k+j) + \sum_{j=1}^{\infty} (g_{i+j} - g_j) \Delta u(k-j) + y(k)$$

Etant donné que le système est supposé stable en boucle ouverte. Alors, les coefficients g_j de la réponse indicielle tend à une valeur constante après N période d'échantillonnage où $NT_e \geq t_r$, alors on peut considérer que $g_{i+j} - g_j \approx 0, j \geq N$ ou $g_{N+i} = g_N, i \geq 0$.

Ainsi, la prédiction de la sortie devient :

$$\hat{y}(k+i) = \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-j} \Delta u(k+j) + \sum_{j=1}^N (g_{i+j} - g_j) \Delta u(k-j) + y(k), i = 1, \dots, N_p$$

On a pour $j = N, g_{i+N} - g_N = 0$, ainsi l'équation de la prédiction de la sortie peut être écrite sous la forme :

$$\hat{y}(k+i) = \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-j} \Delta u(k+j) + \sum_{j=1}^{N-1} (g_{i+j} - g_j) \Delta u(k-j) + y(k)$$

Cette forme met en évidence que la sortie prédite à l'instant $(k+i)$ est composé de deux parties :

- $\sum_{j=0}^{i-1} g_{i-j} \Delta u(k+j)$: Réponse forcée, c'est la partie qui ne dépend que des valeurs présente et futures de l'incrément de commande (terme inconnu).
- $\sum_{j=1}^{N-1} (g_{i+j} - g_j) \Delta u(k-j) + y(k)$: Réponse libre, c'est la partie qui est complètement disponible à l'instant k (terme connu).

Rappelons qu'on veut prédire la sortie du système sur un horizon de prédiction N_p , c'est-à-dire, on veut calculer le vecteur des sorties futures : $\hat{y}_f = [\hat{y}(k+1), \dots, \hat{y}(k+N_p)]^T$. Pour le signal de commande, le but est de déterminer les futures incréments de commande sur un

horizon N_u , c'est-à-dire, le vecteur des futures incréments de commande $\Delta u_f = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k + N_u - 1)]^T$.

En commande prédictive, on suppose que $N_u \leq N_p$ et que $\Delta u(k + N_u + j) = 0, j \geq 0$, c'est-à-dire au-delà de l'horizon de commande N_u , l'entrée de commande est supposée constante.

Alors, la forme du prédicteur devient :

$$\hat{y}(k+i) = \sum_{j=0}^{\min(i-1, N_u-1)} g_{i-j} \Delta u(k+j) + \sum_{j=1}^{N-1} (g_{i+j} - g_j) \Delta u(k-j) + y(k)$$

D'où la forme matricielle pour l'équation de prédiction :

$$\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + G_p \Delta u_p + \Lambda_s y(k) = G_f \Delta u_f + y_L$$

avec

$y_L = G_p \Delta u_p + \Lambda_s y(k)$: représente la réponse libre

$$\hat{y}_f = [\hat{y}(k+1), \dots, \hat{y}(k+N_p)]^T, \Delta u_f = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_u-1)]^T,$$

$$\Delta u_p = [\Delta u(k-1), \dots, \Delta u(k-N+1)]^T, \Lambda_s = [1, \dots, 1]^T \in R^{N_p},$$

$$G_f = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_i & g_{i-1} & g_{i-2} & \cdots & g_{i-N_u+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_p} & g_{N_p-1} & g_{N_p-2} & \cdots & g_{N_p-N_u+1} \end{bmatrix} \in R^{N_p \times N_u},$$

$$G_p = G_{p1} - G_{p2}, G_{p1} = \begin{bmatrix} g_2 & g_3 & g_4 & \cdots & g_N \\ g_3 & g_4 & g_5 & \cdots & g_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{i+1} & g_{i+2} & g_{i+3} & \cdots & g_{N+i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_p+1} & g_{N_p+2} & g_{N_p+3} & \cdots & g_{N+N_p+1} \end{bmatrix} \in R^{N_p \times (N-1)}, g_{N+i} = g_N, \forall i \geq 0,$$

$$G_{p2} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{N-1} \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{N-1} \end{bmatrix} \in R^{N_p \times (N-1)}.$$

Remarque :

- G_f est une matrice de dimension $N_p \times N_u$ qui est appelée matrice dynamique (Dynamic Matrix).
- G_p, G_{p1}, G_{p2} sont des matrices de dimension $N_p \times (N-1)$.
- Λ_s est un vecteur colonne de dimension N_p à éléments égaux à 1.

2.3 Loi de commande DMC

Le calcul de la commande dans l'approche DMC s'effectue à partir de la minimisation d'un critère quadratique à horizon fini portant sur les erreurs futures entre la sortie de référence (sortie désirée) et la sortie prédite avec un terme de pondération sur la variation de la commande.

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} (y_r(k+i) - \hat{y}(k+i))^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta u(k+i)^2$$

$\lambda \geq 0$: Pondération des variations de la commande $\Delta u(k+i)$, $i = 0, \dots, N_u - 1$.

Ce critère peut être également écrit sous la forme matricielle suivante :

$$J = (y_R - \hat{y}_f)^T (y_R - \hat{y}_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f \quad \text{où } y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_p) \end{pmatrix}$$

Etant donné que : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$, on obtient :

$$J = (y_R - G_f \Delta u_f - y_L)^T (y_R - G_f \Delta u_f - y_L) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = ((y_R - y_L)^T - \Delta u_f^T G_f^T) ((y_R - y_L) - G_f \Delta u_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = \Delta u_f^T (\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 \Delta u_f^T G_f^T (y_R - y_L) + (y_R - y_L)^T (y_R - y_L)$$

La minimisation du critère par rapport au vecteur des commandes futures donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u_f} = 0 \Rightarrow 2(\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2G_f^T (y_R - y_L) = 0$$

L'expression du vecteur de commande résultant de la minimisation du critère est la suivante :

$$\Delta u_f = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - y_L) = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - G_p \Delta u_p - \Lambda_s y(k))$$

Posons : $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$ la matrice de gain et g_c^T la première ligne de cette matrice, la loi de commande à horizon fuyant (glissant) associée s'obtient alors comme suit :

$$\Delta u(k) = g_c^T (y_R - y_L) = g_c^T (y_R - G_p \Delta u_p - \Lambda_s y(k))$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T (y_R - y_L) = u(k-1) + g_c^T (y_R - G_p \Delta u_p - \Lambda_s y(k))$$

Bien qu'une séquence de commandes $\Delta u_f = [\Delta u(k) \quad \dots \quad \Delta u(k + N_u - 1)]^T$ soit obtenue à l'instant k par la minimisation du critère quadratique, en pratique, seule la première composante du vecteur Δu_f est implantée. A l'instant d'échantillonnage suivant $k+1$, on répète la même procédure, c'est-à-dire qu'on recalcule une nouvelle séquence de commande dont la première composante sera effectivement appliquée au système et ainsi de suite (c'est le principe de la commande à horizon glissant).

Remarque :

Soit $A \in R^{n \times n}$, $X \in R^n$ et $Y \in R^n$, les règles de la dérivation matricielle sont donnés par :

$$\frac{\partial(Y^T X)}{\partial X} = Y; \quad \frac{\partial(X^T Y)}{\partial X} = Y; \quad \frac{\partial(X^T A X)}{\partial X} = (A + A^T)X; \quad \frac{\partial(X^T A X)}{\partial X} = 2AX, \text{ si } A = A^T.$$

2.4 Principe de l'horizon fuyant (glissant)

Seul le premier élément de la séquence de commande « optimale » précédente est appliqué sur le système. Tous les autres éléments peuvent être oubliés car à la période d'échantillonnage suivante, les séquences sont décalées, une nouvelle sortie est mesurée et la procédure complète est répétée. Ce procédé repose sur le principe de l'horizon fuyant ou glissant.

- Seulement le premier élément de la séquence de commande « optimale » précédente est appliqué sur le système
- Les séquences sont décalées
- Une nouvelle sortie est mesurée
- La procédure complète est répétée.

Remarque :

La commande prédictive par matrice dynamique peut être synthétisée aussi à partir du modèle tronquée de la réponse indicielle défini par :

$$y(k) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u(k-j) = \sum_{j=1}^{N-1} g_j \Delta u(k-j) + g_N \sum_{j=N}^{\infty} \Delta u(k-j)$$

$$\sum_{j=N}^{\infty} \Delta u(k-j) = \Delta u(k-N) + \Delta u(k-N-1) + \Delta u(k-N-2) + \dots$$

$$\sum_{j=N}^{\infty} \Delta u(k-j) = u(k-N) - u(k-N-1) + u(k-N-1) - u(k-N-2) + u(k-N-2) - u(k-N-3) + \dots$$

$$\Rightarrow y(k) = \sum_{j=1}^{N-1} g_j \Delta u(k-j) + g_N u(k-N)$$

2.5 Exemple 1

A partir de la réponse indicielle d'un système, on a relevé les points suivants :

i	1	2	3	4	5	6	7
g_i	0.32	0.43	0.47	0.49	0.5	0.5	0.5

On donne : Horizon de prédiction : $N_p = 3$; Horizon de commande : $N_u = 1$; Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.2$

- 1) Donner l'expression de la solution optimale de la méthode de commande DMC.
- 2) Définir les vecteurs Δu_f , Δu_p et y_R .
- 3) Donner les matrices G_f et G_p , et le vecteur Λ_s .
- 4) Calculer la matrice du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$.
- 5) Ecrire la loi de commande résultante $u(k)$? Est-ce que celle-ci représente une loi de commande par rétroaction ? Justifier votre réponse.

Solution :

- 1) La solution optimale de la méthode de commande DMC ($N_p = 3$, $N_u = 1$, $N = 5$ parce que la réponse indicielle est constante pour $k \geq 5$)

$$\Delta u_f = G_c (y_R - G_p \Delta u_p - \Lambda_s y(k)) \text{ avec } G_c = (G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} G_f^T$$

- 2) Définition des vecteurs : Δu_f , Δu_p et y_R

$$\Delta u_f = [\Delta u(k)]^T = \Delta u(k) ; \Delta u_p = [\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \Delta u(k-3), \Delta u(k-4)]^T$$

$$y_R = [y_r(k+1), y_r(k+2), y_r(k+3)]^T$$

- 3) Donner les matrices G_f et G_p , et le vecteur Λ_s

$$G_f = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.43 \\ 0.47 \end{pmatrix} ; \Lambda_s = [1, 1, 1]^T,$$

$$G_p = G_{p1} - G_{p2} = \begin{pmatrix} g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \\ g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11 & 0.04 & 0.02 & 0.01 \\ 0.15 & 0.06 & 0.03 & 0.01 \\ 0.17 & 0.07 & 0.03 & 0.01 \end{pmatrix}$$

- 4) Calcul du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$

$$G_f^T G_f = 0.5082, \quad \lambda I + G_f^T G_f = 0.7082,$$

$$G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T = \begin{pmatrix} 0.4518 & 0.6072 & 0.6637 \end{pmatrix} \Rightarrow g_c^T = \begin{pmatrix} 0.4518 & 0.6072 & 0.6637 \end{pmatrix}$$

- 5) Loi de commande résultante $u(k)$

$$\Delta u(k) = g_c^T y_R - (g_c^T \times G_p) \Delta u_p - (g_c^T \times \Lambda_s) y(k)$$

$$u(k) = u(k-1) + 0.4518 y_r(k+1) + 0.6072 y_r(k+2) + 0.6637 y_r(k+3) - 0.2536 \Delta u(k-1) - 0.1010 \Delta u(k-2) - 0.0472 \Delta u(k-3) - 0.0172 \Delta u(k-4) - 1.7227 y(k)$$

C'est une commande par rétroaction car $u(k)$ dépend de la sortie du système $y(k)$.

2.6 Exemple 2

A partir de la réponse indicielle d'un système, on a relevé les points suivants :

i	1	2	3	4	5	6
g_i	0.44	0.80	0.93	0.98	0.99	1

On donne : $N_p = 2$, $N_u = 2$, facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.5$

- 1) Donner l'expression de la solution optimale de la méthode de commande DMC.

- 2) Définir les vecteurs Δu_f , Δu_p et y_R .
- 3) Donner les matrices G_f et G_p , et le vecteur Λ_s .
- 4) Calculer la matrice du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$.
- 5) Ecrire la loi de commande résultante $u(k)$?
- 6) Calculer les valeurs $u(0)$ et $u(1)$ si $y_r(k)=1$, $y(0)=0$ et le système est régi par :

$$y(k+1) = 0.446y(k) - 0.05y(k-1) + 0.442u(k) + 0.16u(k-1).$$

Solution :

- 1) La solution optimale de la méthode de commande DMC ($N_p = 2$, $N_u = 2$, $N = 6$)

$$\Delta u_f = G_c (y_R - G_p \Delta u_p - \Lambda_s y(k)) \text{ avec } G_c = (G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} G_f^T$$

- 2) Définition des vecteurs : Δu_f , Δu_p et y_R

$$\Delta u_f = [\Delta u(k), \Delta u(k+1)]^T ;$$

$$\Delta u_p = [\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \Delta u(k-3), \Delta u(k-4), \Delta u(k-5)]^T$$

$$y_R = [y_r(k+1), y_r(k+2)]^T$$

- 3) Donner les matrices G_f et G_p , et le vecteur Λ_s

$$G_f = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0 \\ 0.80 & 0.44 \end{pmatrix} ; \Lambda_s = [1, 1]^T,$$

$$G_p = G_{p1} - G_{p2} = \begin{pmatrix} g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \\ g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{pmatrix}$$

$$G_p = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.13 & 0.05 & 0.01 & 0.01 \\ 0.49 & 0.18 & 0.06 & 0.02 & 0.01 \end{pmatrix}$$

- 4) Calcul du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$

$$G_f^T G_f = \begin{pmatrix} 0.8336 & 0.3520 \\ 0.3520 & 0.1936 \end{pmatrix}, \quad \lambda I + G_f^T G_f = \begin{pmatrix} 1.3336 & 0.3520 \\ 0.3520 & 0.6936 \end{pmatrix},$$

$$(\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8658 & -0.4394 \\ -0.4394 & 1.6648 \end{pmatrix}$$

$$G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T = \begin{pmatrix} 0.3810 & 0.4993 \\ -0.1933 & 0.3810 \end{pmatrix} \Rightarrow g_c^T = (0.3810 \quad 0.4993)$$

- 5) Loi de commande résultante $u(k)$

$$\Delta u(k) = g_c^T y_R - (g_c^T \times G_p) \Delta u_p - (g_c^T \times \Lambda_s) y(k)$$

$$u(k) = u(k-1) + 0.381y_r(k+1) + 0.4993y_r(k+2) - 0.388\Delta u(k-1) - 0.1394\Delta u(k-2) \\ - 0.049\Delta u(k-3) - 0.0138\Delta u(k-4) - 0.0088\Delta u(k-5) - 0.8803y(k)$$

- 6) Calcul de $u(0)$: $u(0) = 0.381y_r(k+1) + 0.4993y_r(k+2) = 0.8803$

$$\text{Calcul de } y(1) : y(1) = 0.446y(0) - 0.05y(-1) + 0.442u(0) + 0.16u(-1) = 0.3891$$

$$\text{Calcul de } u(1) : u(1) = u(0) + 0.381 + 0.4993 - 0.388\Delta u(0) - 0.8803y(1) = 1.0765$$

Commande Prédictive Généralisée

Generalized Predictive Control (GPC)

3.1 Modèle du système

La synthèse d'une loi de commande prédictive passe d'abord par une phase de modélisation du système à commander. Le modèle doit être capable de représenter le comportement dynamique du système, tout en ayant une complexité compatible avec les moyens de calcul de la loi de commande. En ce qui concerne la commande GPC, elle considère la classe des systèmes dont le comportement dynamiques peut être représenté par le modèle CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average) ou ARIMAX (AutoRegressive Integrated Moving Average with eXogenous inputs) donné par :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})}v(k)$$

$y(k)$: Sortie du système

$u(k)$: Entrée du système

$v(k)$: Signal de perturbation considéré aléatoire et de moyenne nulle.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}, \quad B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}, \quad \Delta(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

L'introduction de $\Delta(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ dans le modèle du bruit apporte une action intégrale dans le correcteur qui permet l'annulation de toute erreur statique vis-à-vis d'une consigne ou d'une perturbation constante.

Ce modèle est utilisé pour générer une séquence de prédictions de la sortie sur plusieurs pas (horizon de prédiction de la sortie). Une séquence d'entrée est ensuite calculée, de manière à minimiser l'écart entre les sorties prédites et les sorties de références (désirées) correspondantes. Le principe de la commande à horizon glissant est également appliqué.

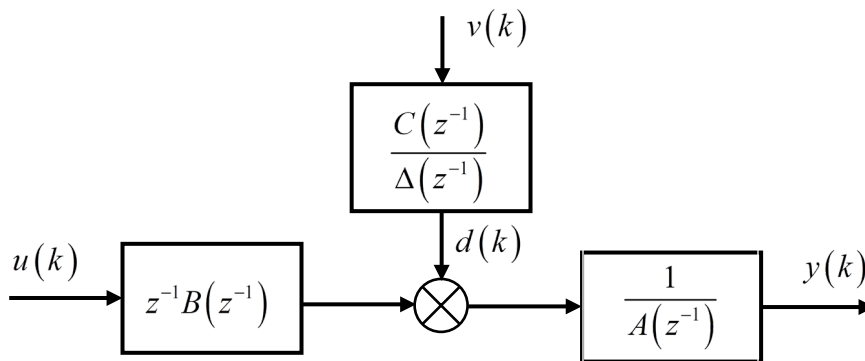


Figure 3.1 : Modèle CARIMA

3.2 Structure du prédictor optimal

En utilisant le modèle du système, la sortie du système à l'instant $k+i$ est donnée par :

$$y(k+i) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k+i-1) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta(z^{-1})}v(k+i)$$

On introduit la première équation diophantienne suivante :

$$\Delta(z^{-1})A(z^{-1})Q_i(z^{-1}) + z^{-i}F_i(z^{-1}) = C(z^{-1})$$

$$\deg[Q_i] = i-1 \Rightarrow Q_i(z^{-1}) = q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_{i-1}z^{-(i-1)}$$

$$\deg[F_i] = n_f = \max(n_a, n_c - i) \Rightarrow F_i(z^{-1}) = f_{i0} + f_{i1}z^{-1} + \dots + f_{in_f}z^{-n_f}$$

En utilisant cette équation, on obtient :

$$y(k+i) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k+i-1) + \frac{\Delta(z^{-1})A(z^{-1})Q_i(z^{-1}) + z^{-i}F_i(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta(z^{-1})}v(k+i)$$

$$y(k+i) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k+i-1) + \frac{z^{-i}F_i(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta(z^{-1})}v(k+i) + Q_i(z^{-1})v(k+i)$$

avec $z^{-i}F_i(z^{-1})v(k+i) = F_i(z^{-1})v(k)$, il vient :

$$y(k+i) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k+i-1) + \frac{F_i(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta(z^{-1})}v(k) + Q_i(z^{-1})v(k+i)$$

A partir des mesures disponibles à l'instant k , on peut se servir du modèle du système pour estimer le terme $v(k)$ comme suit :

$$v(k) = \frac{A(z^{-1})\Delta(z^{-1})}{C(z^{-1})} \left(y(k) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k-1) \right),$$

On obtient alors :

$$y(k+i) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k+i-1) + \frac{F_i(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) - \frac{F_i(z^{-1})B(z^{-1})}{C(z^{-1})A(z^{-1})}u(k-1) + Q_i(z^{-1})v(k+i)$$

On a : $u(k-1) = z^{-i}u(k+i-1)$, alors, il vient :

$$y(k+i) = \frac{F_i(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})C(z^{-1})} \left(C(z^{-1}) - z^{-i}F_i(z^{-1}) \right) u(k+i-1) + Q_i(z^{-1})v(k+i)$$

De l'équation diophantienne : $C(z^{-1}) - z^{-i}F_i(z^{-1}) = \Delta(z^{-1})A(z^{-1})Q_i(z^{-1})$, on a alors :

$$y(k+i) = \frac{F_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1})Q_i(z^{-1})\Delta(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k+i-1) + Q_i(z^{-1})v(k+i)$$

On a : $\Delta(z^{-1})u(k+i-1) = (1-z^{-1})u(k+i-1) = u(k+i-1) - u(k+i-2) = \Delta u(k+i-1)$

$$y(k+i) = \frac{F_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1})Q_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} \Delta u(k+i-1) + Q_i(z^{-1})v(k+i)$$

On suppose que $Q_i(z^{-1})v(k+i) = 0$ (terme inconnu à l'instant k), alors la prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ avec $i=1, \dots, N_p$ où N_p est l'horizon de prédiction, est donnée par :

$$\hat{y}(k+i) = \frac{F_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1})Q_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} \Delta u(k+i-1)$$

On introduit une deuxième équation diophantienne :

$$C(z^{-1})G_i(z^{-1}) + z^{-i}H_i(z^{-1}) = B(z^{-1})Q_i(z^{-1})$$

$$\deg[G_i] = i-1 \Rightarrow G_i(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{i-1} z^{-(i-1)}$$

$$\deg[H_i] = n_h = \max(n_b - 1, n_c - 1) \Rightarrow H_i(z^{-1}) = h_{i0} + h_{i1} z^{-1} + \dots + h_{in_h} z^{-n_h}$$

$$\text{On a : } \frac{B(z^{-1})Q_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} = G_i(z^{-1}) + \frac{z^{-i}H_i(z^{-1})}{C(z^{-1})}, \text{ ce qui donne :}$$

$$\hat{y}(k+i) = \frac{F_j(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + G_i(z^{-1})\Delta u(k+i-1) + \frac{z^{-i}H_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} \Delta u(k+i-1)$$

Étant donné que : $z^{-i}\Delta u(k+i-1) = \Delta u(k-1)$, il vient :

$$\hat{y}(k+i) = \underbrace{\frac{F_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{H_i(z^{-1})}{C(z^{-1})} \Delta u(k-1)}_{\text{réponse libre (passé)}} + \underbrace{G_i(z^{-1}) \Delta u(k+i-1)}_{\text{réponse forcée (futur)}}, \quad i=1, \dots, N_p$$

En commande prédictive, on a toujours la supposition suivante : au-delà de l'horizon de commande, la variation de la commande future est nulle, $\Delta u(k+i) = 0$ pour $i \geq N_u$. C'est-à-dire, la loi de commande est calculée en admettant que le système est remis en chaîne ouverte à partir de l'instant $k+N_u$ (commande en boucle ouverte). Cette contrainte permet de réduire considérablement le volume de calcul.

3.3 Forme matricielle de l'équation de prédiction

En considérant l'ensemble des prédictions pour $i=1, \dots, N_p$, on obtient une séquence de prédictions qui peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{y}_f = \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{F} y(k) + \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{H} \Delta u(k-1) + G_f \Delta u_f$$

Les vecteurs \hat{y}_f , Δu_f , \bar{F} , \bar{H} et la matrice G_f sont définis comme suit :

$$\hat{y}_f = \begin{pmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_p) \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \quad \Delta u_f = \begin{pmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{pmatrix} \in R^{N_u}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_1(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{N_p}(z^{-1}) \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} H_1(z^{-1}) \\ \vdots \\ H_{N_p}(z^{-1}) \end{pmatrix} \in R^{N_p}$$

$$G_f = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{N_u-1} & g_{N_u-2} & g_{N_u-3} & \cdots & g_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{N_p-1} & g_{N_p-2} & g_{N_p-3} & \cdots & g_{N_p-N_u} \end{pmatrix} \in R^{N_p \times N_u}$$

On peut la mettre également sous la forme compacte :

$$\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L \quad \text{avec} \quad y_L = \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{F} y(k) + \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{H} \Delta u(k-1)$$

3.4 Loi de commande GPC

La loi de commande est obtenue par minimisation d'un critère de performance. Ce critère a pour expression :

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} (y_r(k+i) - \hat{y}(k+i))^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta u(k+i)^2$$

Ce critère de performance est composé de deux termes. Le premier terme est l'accumulation, sur l'horizon de prédiction, des carrés des écarts de poursuite. Le deuxième terme représente la somme des carrés des valeurs successives de l'incrément de commande, sur l'horizon de commande, cette somme étant pondérée par un facteur λ .

Pour déterminer la loi de commande, on réécrit le critère quadratique sous la forme vectorielle suivante :

$$J = (y_R - \hat{y}_f)^T (y_R - \hat{y}_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f \quad \text{où} \quad y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_p) \end{pmatrix}$$

Etant donné que : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$, on obtient :

$$J = (y_R - G_f \Delta u_f - y_L)^T (y_R - G_f \Delta u_f - y_L) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = ((y_R - y_L)^T - \Delta u_f^T G_f^T) ((y_R - y_L) - G_f \Delta u_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = \Delta u_f^T (\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 \Delta u_f^T G_f^T (y_R - y_L) + (y_R - y_L)^T (y_R - y_L)$$

La minimisation du critère par rapport à Δu_f donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u_f} = 0 \Rightarrow 2(\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2G_f^T (y_R - y_L) = 0$$

L'expression du vecteur de commande résultant de la minimisation du critère est la suivante :

$$\Delta u_f = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - y_L) = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T \left(y_R - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{F} y(k) - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{H} \Delta u(k-1) \right)$$

Posons : $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$ la matrice de gain et g_c^T la première ligne de cette matrice, la loi de commande à horizon fuyant (glissant) associée s'obtient alors comme suit :

$$\Delta u(k) = g_c^T (y_R - y_L) = g_c^T \left(y_R - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{F} y(k) - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{H} \Delta u(k-1) \right)$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T (y_R - y_L) = u(k-1) + g_c^T \left(y_R - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{F} y(k) - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{H} \Delta u(k-1) \right)$$

Bien qu'une séquence de commandes $\Delta u_f = [\Delta u(k) \ \dots \ \Delta u(k + N_u - 1)]^T$ soit obtenue à l'instant k par la minimisation du critère quadratique, en pratique, on applique seulement la première commande $\Delta u(k)$ au système. A la période d'échantillonnage suivante $k+1$, on répète la même procédure, c'est-à-dire qu'on recalcule une nouvelle séquence de commande dont la première valeur sera effectivement appliquée au système et ainsi de suite (c'est le principe de la commande à horizon glissant).

3.5 Résolution récursive des équations diophantiennes

Le modèle du système est donné par :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})}v(k)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}, \quad B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}, \quad \Delta(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

On considère la première équation diophantienne suivante :

$$\Delta(z^{-1})A(z^{-1})Q_i(z^{-1}) + z^{-i}F_i(z^{-1}) = C(z^{-1})$$

$$\deg[Q_i] = i - 1 \Rightarrow Q_i(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{i-1} z^{-(i-1)}$$

$$\deg[F_i] = n_f = \max(n_a, n_c - i) \Rightarrow F_i(z^{-1}) = f_{i0} + f_{i1} z^{-1} + \dots + f_{in_f} z^{-n_f}$$

- L'algorithme de calcul récursif des polynômes $Q_i(z^{-1})$ et $F_i(z^{-1})$ est donné par :

Pour $i = 1$ $n_f = \max(n_a, n_c - 1)$ $q_0 = 1$ $f_{1j} = c_{j+1} - q_0(a_{j+1} - a_j), j = 0, \dots, n_f$	Pour $i = 2, \dots, N_p$ $n_f = \max(n_a, n_c - i)$ $q_{i-1} = f_{(i-1)0}$ $f_{ij} = f_{(i-1)(j+1)} - q_{i-1}(a_{j+1} - a_j), j = 0, \dots, n_f$
---	---

On considère maintenant la deuxième équation diophantienne :

$$C(z^{-1})G_i(z^{-1}) + z^{-i}H_i(z^{-1}) = B(z^{-1})Q_i(z^{-1})$$

$$\deg[G_i] = i - 1 \Rightarrow G_i(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{i-1} z^{-(i-1)}$$

$$\deg[H_i] = n_h = \max(n_b - 1, n_c - 1) \Rightarrow H_i(z^{-1}) = h_{i0} + h_{i1} z^{-1} + \dots + h_{in_h} z^{-n_h}$$

- L'algorithme de calcul récursif des polynômes $G_i(z^{-1})$ et $H_i(z^{-1})$ est donné par :

Pour $i = 1$ $g_0 = q_0 b_0$ $h_{1j} = q_0 b_{j+1} - c_{j+1} g_0, j = 0, \dots, n_h$	Pour $i = 2, \dots, N_p$ $g_{i-1} = h_{(i-1)0} + q_{i-1} b_0$ $h_{ij} = h_{(i-1)(j+1)} - c_{j+1} g_{i-1} + q_{i-1} b_{j+1}, j = 0, \dots, n_h$
--	--

Remarque : Si $n_b = 0$ et $n_c = 0$, on a : $H_i(z^{-1}) = 0$ et $G_i(z^{-1}) = b_0 Q_i(z^{-1})$

3.6 Exemple 1

Soit un système décrit par la fonction de transfert discrète suivante :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})}v(k)$$

avec $A(z^{-1}) = 1 + 0.9z^{-1}$; $B(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1}$; $C(z^{-1}) = 1$

On donne : Horizons de prédiction sur la sortie : $N_p = 2$

Horizon de prédiction sur la commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.4$

- 1) Calculer les polynômes : $Q_i(z^{-1})$, $F_i(z^{-1})$, $G_i(z^{-1})$ et $H_i(z^{-1})$.
- 2) Calculer la matrice du gain $G_c = (G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} G_f^T$.
- 3) Donner l'expression (l'équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.
- 4) Calculer la valeur de $u(0)$ si $y_r(k) = 1$ et $y(0) = 0$.

Solution :

- 1) Calcul des polynômes : $Q_i(z^{-1})$, $F_i(z^{-1})$, $G_i(z^{-1})$ et $H_i(z^{-1})$.

Ces polynômes sont les solutions des équations diophantiennes suivantes :

$$\begin{cases} \Delta(z^{-1})A(z^{-1})Q_i(z^{-1}) + z^{-i}F_i(z^{-1}) = C(z^{-1}) \\ C(z^{-1})G_i(z^{-1}) + z^{-i}H_i(z^{-1}) = B(z^{-1})Q_i(z^{-1}) \end{cases}, \quad i=1, \dots, N_p$$

$$Q_i(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{i-1} z^{-(i-1)} ; \quad G_i(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{i-1} z^{-(i-1)}$$

$$\deg[F_i] = n_f = \max(n_a, n_c - i) = n_a = 1 ; \quad \deg[H_i] = n_h = \max(n_b - 1, n_c - 1) = 0$$

$$F_i(z^{-1}) = f_{i0} + f_{i1} z^{-1} + \dots + f_{in_f} z^{-n_f} ; \quad H_i(z^{-1}) = h_{i0} + h_{i1} z^{-1} + \dots + h_{in_h} z^{-n_h}$$

Pour $i = 1$:

$$Q_1(z^{-1}) = 1$$

$$F_1(z^{-1}) = 0.1 + 0.9 z^{-1}$$

$$G_1(z^{-1}) = 1$$

$$H_1(z^{-1}) = 0.5$$

Pour $i = 2$:

$$Q_2(z^{-1}) = 1 + 0.1 z^{-1}$$

$$F_2(z^{-1}) = 0.91 + 0.09 z^{-1}$$

$$G_2(z^{-1}) = 1 + 0.6 z^{-1}$$

$$H_2(z^{-1}) = 0.05$$

- 2) Calculer la matrice du gain: $G_c = (G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} G_f^T$

$$G_f = \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_f^T G_f = \begin{pmatrix} 1.36 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_f^T G_f + \lambda I = \begin{pmatrix} 1.76 & 0.6 \\ 0.6 & 1.4 \end{pmatrix}$$

$$(G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6654 & -0.2852 \\ -0.2852 & 0.8365 \end{pmatrix} \Rightarrow G_c = (G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} G_f^T = \begin{pmatrix} 0.6654 & 0.1141 \\ -0.2852 & 0.6654 \end{pmatrix}$$

On note la première ligne de la matrice G_c par g_c^T . Alors, on a : $g_c^T = (0.6654 \quad 0.1141)$.

- 3) Expression (équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.

$$\text{On a : } \bar{F} = \begin{pmatrix} F_1(z^{-1}) \\ F_2(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 + 0.9 z^{-1} \\ 0.91 + 0.09 z^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} H_1(z^{-1}) \\ H_2(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.05 \end{pmatrix}.$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T \left(y_R - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{F} y(k) - \frac{1}{C(z^{-1})} \bar{H} \Delta u(k-1) \right), \quad y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ y_r(k+2) \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$u(k) = u(k-1) + 0.1141 y_r(k+2) + 0.6654 y_r(k+1)$$

$$- 0.1706 y(k) - 0.6092 y(k-1) - 0.3384 \Delta u(k-1)$$

$$u(k) = 0.6616 u(k-1) + 0.3384 u(k-2) + 0.1141 y_r(k+2) + 0.6654 y_r(k+1)$$

$$- 0.1706 y(k) - 0.6092 y(k-1)$$

- 4) Valeur de $u(0)$

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0.6616u(-1) + 0.3384u(-2) + 0.1141y_r(2) + 0.6654y_r(1) \\
&\quad - 0.1706y(0) - 0.6092y(-1) \\
\Rightarrow u(0) &= 0.7798
\end{aligned}$$

3.7 Régulateur polynomial RST équivalent

Considérons la loi de commande GPC

$$\Delta u(k) = g_c^T y_R - \frac{1}{C(z^{-1})} g_c^T \bar{F} y(k) - \frac{1}{C(z^{-1})} g_c^T \bar{H} \Delta u(k-1)$$

Il est possible de déduire la représentation polynomiale du régulateur RST équivalent de la commande GPC comme indiqué dans la Figure 2. Cette structure permet l'implantation de la loi de commande GPC par une simple équation aux différences. Notons que le polynôme $T(z^{-1})$ est volontairement choisi causal (puissance de z^{-1}), en considérant que le signal de consigne est $y_r(k + N_p)$ et non pas $y_r(k)$.

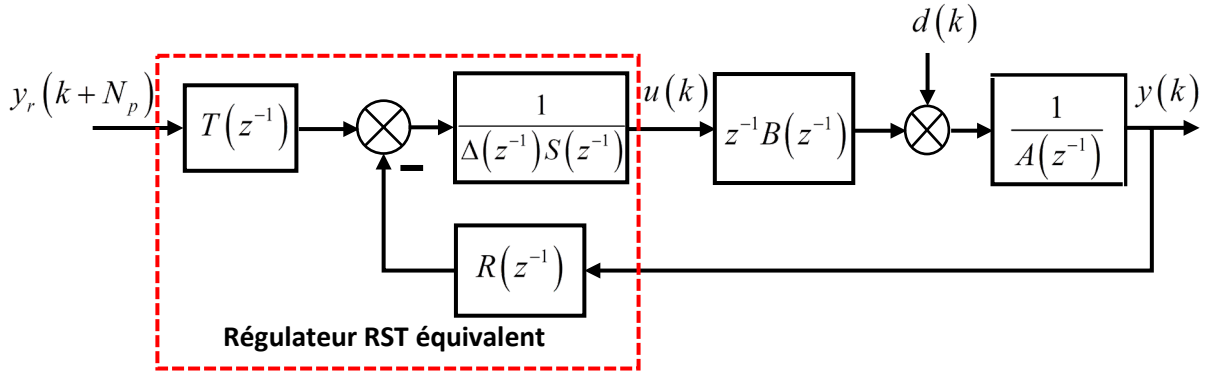


Figure 3.2 : Structure du régulateur polynomiale RST équivalent

A partir de la Figure 2, on peut écrire :

$$\Delta(z^{-1})S(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})y_r(k + N_p) - R(z^{-1})y(k)$$

Etant donné que : $\Delta(z^{-1})u(k) = (1 - z^{-1})u(k) = \Delta u(k)$, il vient :

$$S(z^{-1})\Delta u(k) = T(z^{-1})y_r(k + N_p) - R(z^{-1})y(k)$$

On a : $\Delta u(k-1) = z^{-1}\Delta u(k)$, alors la loi de commande GPC devient :

$$(C(z^{-1}) + g_c^T \bar{H} z^{-1})\Delta u(k) = C(z^{-1})g_c^T y_R - g_c^T \bar{F} y(k)$$

$$\text{En tenant compte du fait que : } y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k + N_p - 1) \\ y_r(k + N_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-N_p+1} \\ \vdots \\ z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} y_r(k + N_p), \text{ on arrive à :}$$

$$\left(C(z^{-1}) + g_c^T \bar{H} z^{-1}\right) \Delta u(k) = C(z^{-1}) g_c^T \begin{pmatrix} z^{-N_p+1} \\ \vdots \\ z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} y_r(k + N_p) - g_c^T \bar{F} y(k)$$

Par identification, les trois polynômes sont définis comme suit :

$$S(z^{-1}) = C(z^{-1}) + g_c^T \bar{H} z^{-1} = C(z^{-1}) + \sum_{i=1}^{N_p} g_{ci} H_i(z^{-1}) z^{-1}$$

$$R(z^{-1}) = g_c^T \bar{F} = \sum_{i=1}^{N_p} g_{ci} F_i(z^{-1})$$

$$T(z^{-1}) = C(z^{-1}) g_c^T \begin{pmatrix} z^{-N_p+1} \\ \vdots \\ z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = C(z^{-1}) \left[\sum_{i=1}^{N_p} g_{ci} z^{-N_p+i} \right]$$

Cette structure Figure 2 permet de déduire les fonctions de transfert entrée/sortie et perturbation/sortie. La dynamique du système en boucle fermée est décrite par :

$$\begin{cases} A(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) y(k) = B(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) z^{-1} u(k) + C(z^{-1}) v(k) \\ S(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) u(k) = T(z^{-1}) y_r(k + N_p) - R(z^{-1}) y(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(z^{-1}) A(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) y(k) = S(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) z^{-1} u(k) + S(z^{-1}) C(z^{-1}) v(k) \\ B(z^{-1}) S(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) z^{-1} u(k) = B(z^{-1}) T(z^{-1}) z^{-1} y_r(k + N_p) - B(z^{-1}) R(z^{-1}) z^{-1} y(k) \end{cases}$$

On arrive alors à :

$$\left(S(z^{-1}) A(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) + B(z^{-1}) R(z^{-1}) z^{-1}\right) y(k) = B(z^{-1}) T(z^{-1}) z^{-1} y_r(k + N_p) + S(z^{-1}) C(z^{-1}) v(k)$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donné par :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1}) S(z^{-1}) \Delta(z^{-1}) + B(z^{-1}) R(z^{-1}) z^{-1}$$

Ce polynôme permet de vérifier la stabilité de la boucle fermée.

3.8 Exemple 2

On considère le système discret suivant : $A(z^{-1}) y(k) = B(z^{-1}) u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})} v(k)$

Avec : $A(z^{-1}) = 1 - 0.6z^{-1}$; $B(z^{-1}) = 1 + 0.6z^{-1}$; $C(z^{-1}) = 1$

On donne : Horizons de prédiction sur la sortie : $N_p = 2$; Horizon de prédiction sur la commande : $N_u = 2$; Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 1$

- 1) Calculer les polynômes : $Q_j(z^{-1})$, $F_j(z^{-1})$, $G_j(z^{-1})$ et $H_j(z^{-1})$.
- 2) Calculer les polynômes : $S(z^{-1})$, $R(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.
- 3) Donner le polynôme caractéristique de la boucle fermée $P_c(z^{-1})$. Vérifier la stabilité du système en boucle fermée.
- 4) Donner l'expression (l'équation de récurrence) de la loi de commande.

Solution :

1) Calcul des polynômes : $Q_i(z^{-1})$, $F_i(z^{-1})$, $G_i(z^{-1})$ et $H_i(z^{-1})$.

Ces polynômes sont les solutions des équations diophantiennes suivantes :

$$\begin{cases} \Delta(z^{-1})A(z^{-1})Q_i(z^{-1}) + z^{-i}F_i(z^{-1}) = C(z^{-1}) \\ C(z^{-1})G_i(z^{-1}) + z^{-i}H_i(z^{-1}) = B(z^{-1})Q_i(z^{-1}) \end{cases}, \quad i=1, \dots, N_p$$

$$Q_i(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{i-1} z^{-(i-1)} ; \quad G_i(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{i-1} z^{-(i-1)}$$

$$\deg[F_i] = n_f = \max(n_a, n_c - i) = n_a = 1 ; \quad \deg[H_i] = n_h = \max(n_b - 1, n_c - i) = 0$$

$$F_i(z^{-1}) = f_{i0} + f_{i1} z^{-1} + \dots + f_{in_f} z^{-n_f} ; \quad H_i(z^{-1}) = h_{i0} + h_{i1} z^{-1} + \dots + h_{in_h} z^{-n_h}$$

Pour $i = 1$:

$$Q_1(z^{-1}) = 1$$

$$F_1(z^{-1}) = 1.6 - 0.6 z^{-1}$$

$$G_1(z^{-1}) = 1$$

$$H_1(z^{-1}) = 0.6$$

Pour $i = 2$:

$$Q_2(z^{-1}) = 1 + 1.6 z^{-1}$$

$$F_2(z^{-1}) = 1.96 - 0.96 z^{-1}$$

$$G_2(z^{-1}) = 1 + 2.2 z^{-1}$$

$$H_2(z^{-1}) = 0.96$$

2) Calcul des polynômes : $S(z^{-1})$, $R(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.

$$G_f = \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} F_1(z^{-1}) \\ F_2(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 - 0.6 z^{-1} \\ 1.96 - 0.96 z^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} H_1(z^{-1}) \\ H_2(z^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.96 \end{pmatrix}.$$

$$G_f^T G_f = \begin{pmatrix} 5.84 & 2.2 \\ 2.2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_f^T G_f + \lambda I = \begin{pmatrix} 6.84 & 2.2 \\ 2.2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2262 & -0.2489 \\ -0.2489 & 0.7738 \end{pmatrix}; \quad G_c = (G_f^T G_f + \lambda I)^{-1} G_f^T = \begin{pmatrix} 0.2262 & 0.2489 \\ -0.2489 & 0.2262 \end{pmatrix}$$

La première ligne de la matrice G_c est notée g_c^T . Alors, on a : $g_c^T = (0.2262 \quad 0.2489)$.

$$S(z^{-1}) = C(z^{-1}) + \sum_{i=1}^{N_p} g_{ci} H_i(z^{-1}) z^{-i} = 1 + 0.3747 z^{-1} ;$$

$$R(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{N_p} g_{ci} F_i(z^{-1}) = 0.8498 - 0.3747 z^{-1} ;$$

$$T(z^{-1}) = C(z^{-1}) \left[\sum_{i=1}^{N_p} g_{ci} z^{-N_p+i} \right] = 0.2489 + 0.2262 z^{-1}$$

3) Polynôme caractéristique de la boucle fermée $P_c(z^{-1})$.

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1})\Delta(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})z^{-1} = 1 - 0.3755z^{-1} + 0.1357z^{-2}$$

Les pôles du système bouclé sont : $z_{1,2} = 0.1877 \pm j0.3169$. Alors le système en BF est stable.

4) Expression (équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.

$$S(z^{-1})\Delta(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})y_r(k + N_p) - R(z^{-1})y(k)$$

$$(1 - 0.6253 z^{-1} - 0.37471 z^{-2})u(k) = (0.2489 + 0.2262 z^{-1})y_r(k + 2) - (0.8498 - 0.3747 z^{-1})y(k)$$

$$\Rightarrow u(k) = 0.6253u(k-1) + 0.3747u(k-2) + 0.2489y_r(k+2) + 0.2262y_r(k+1) \\ - 0.8498y(k) + 0.3747y(k-1)$$

3.9 Choix des paramètres N_p , N_u et λ

- L'horizon de prédiction N_p est choisi en fonction du temps de réponse désiré du système bouclé, i.e. $N_p T_e =$ temps de réponse du système bouclé. Plus la valeur de N_p est grande plus le système bouclé est stable et lent.
- Le choix de N_u dépend principalement du système à commander. Plus le système sera complexe, plus N_u doit être élevé. Cependant, ce paramètre doit être choisi le plus petit possible, car il conditionne directement le volume de calcul de la loi de commande.
- La pondération λ dépend de la valeur du gain du système. Plus λ est élevé et plus la commande fournie est douce. Si λ est faible, il peut en résulter un signal de commande très important pouvant faire diverger le système. Une relation permettant de déterminer rapidement la valeur de λ apportant au système bouclé le maximum de stabilité est donnée par $\lambda = \text{tr}(G_f^T G_f)$.

Commande prédictive basée sur le modèle d'état

4.1 Première approche

Dans cette approche, le vecteur d'état est augmenté avec l'entrée à l'instant précédent.

4.1.1 Modèle du système

La commande prédictive nécessite la connaissance d'un modèle mathématique pour prédire le comportement futur du système à commander. Le modèle doit être capable de représenter le comportement dynamique du système, tout en ayant une complexité compatible avec les moyens de calcul de la loi de commande. La loi de commande est déterminée en utilisant le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}, \quad x(k) \in R^n, \quad u(k) \in R, \quad y(k) \in R, \quad A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^n, \quad C \in R^{1 \times n}$$

Afin de garantir une erreur statique nulle dans la boucle de régulation vis-à-vis d'une consigne ou d'une perturbation constante, le modèle de prédiction pour la formulation du problème d'optimisation est construit à partir de l'incrément de la commande, ce qui va doter la loi de commande d'une action intégrale.

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$$

En considérant les deux équations précédentes, on peut établir la représentation d'état étendue (augmentée) suivante :

$$\begin{cases} x_e(k+1) = A_e x_e(k) + B_e \Delta u(k) \\ y(k) = C_e x_e(k) \end{cases}$$

$$\text{avec : } x_e(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_e = (C \quad 0)$$

Pour ce modèle d'état, le vecteur d'état est augmenté avec l'entrée à l'instant précédent. Ce modèle sera utilisé pour prédire le comportement futur du système.

4.1.2 Prédiction de la sortie

En utilisant le modèle d'état augmenté, on peut écrire

$$x_e(k+1) = A_e x_e(k) + B_e \Delta u(k)$$

$$x_e(k+2) = A_e x_e(k+1) + B_e \Delta u(k+1) = A_e^2 x_e(k) + A_e B_e \Delta u(k) + B_e \Delta u(k+1)$$

$$x_e(k+3) = A_e x_e(k+2) + B_e \Delta u(k+2) = A_e^3 x_e(k) + A_e^2 B_e \Delta u(k) + A_e B_e \Delta u(k+1) + B_e \Delta u(k+2)$$

$$\Rightarrow x_e(k+i) = A_e^i x_e(k) + \sum_{j=0}^{i-1} A_e^{i-j-1} B_e \Delta u(k+j)$$

Alors la prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ avec $i=1,\dots,N_p$ où N_p est l'horizon de prédiction, est donnée par :

$$\hat{y}(k+i) = C_e x_e(k+i) = C_e A_e^i x_e(k) + \sum_{j=0}^{i-1} C_e A_e^{i-j-1} B_e \Delta u(k+j)$$

En utilisant l'expression de la matrice A_e , on peut montrer que : $A_e^i = \left(\begin{array}{c|c} A^i & \sum_{j=0}^{i-1} A^j B \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right)$, d'où il

vient :

$$C_e A_e^i x_e(k) = \left(CA^i \quad \sum_{j=0}^{i-1} CA^j B \right) x_e(k) = CA^i x(k) + \sum_{j=0}^{i-1} CA^j B u(k-1)$$

$$C_e A_e^{i-j-1} B_e = \left(C \quad 0 \right) \left(\begin{array}{c|c} A^{i-j-1} & \sum_{\ell=0}^{i-j-2} A^\ell B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix} = CA^{i-j-1} B + \sum_{\ell=0}^{i-j-2} CA^\ell B = \sum_{\ell=0}^{i-j-1} CA^\ell B$$

La prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ devient :

$$\hat{y}(k+i) = CA^i x(k) + \sum_{j=0}^{i-1} CA^j B u(k-1) + \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\ell=0}^{i-j-1} CA^\ell B \Delta u(k+j)$$

En commande prédictive, on suppose que $N_u \leq N_p$ et que $\Delta u(k+N_u+j) = 0$, $j \geq 0$, c'est-à-dire, au-delà de l'horizon de commande N_u , l'entrée de commande est supposée constante.

4.1.3 Forme matricielle de l'équation de prédiction

En considérant l'ensemble des prédictions pour $i=1,\dots,N_p$, on obtient une séquence de prédictions qui peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{y}_f = \Psi_p x(k) + \Phi_p u(k-1) + G_f \Delta u_f$$

Les vecteurs \hat{y}_f , Δu_f et Φ_p et les matrices G_f et Ψ_p sont définis comme suit :

$$\hat{y}_f = \begin{pmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_p) \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \quad \Delta u_f = \begin{pmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{pmatrix} \in R^{N_u}, \quad \Phi_p = \begin{pmatrix} \Sigma_0 \\ \Sigma_1 \\ \vdots \\ \Sigma_{N_p-1} \end{pmatrix} \in R^{N_p},$$

$$\Psi_p = \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{pmatrix} \in R^{N_p \times n}, \quad G_f = \begin{pmatrix} \Sigma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Sigma_1 & \Sigma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Sigma_{N_u-1} & \Sigma_{N_u-2} & \Sigma_{N_u-3} & \cdots & \Sigma_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Sigma_{N_p-1} & \Sigma_{N_p-2} & \Sigma_{N_p-3} & \cdots & \Sigma_{N_p-N_u} \end{pmatrix} \in R^{N_p \times N_u}, \quad \Sigma_i = C \sum_{j=0}^i A^j B$$

On peut la mettre également sous la forme compacte suivante :

$$\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L \quad \text{avec} \quad y_L = \Psi_p x(k) + \Phi_p u(k-1)$$

4.1.4 Elaboration de la commande

La fonction objective à minimiser à chaque instant d'échantillonnage est exprimée en fonction de l'erreur entre la sortie prédite et la trajectoire de référence sur un horizon de prédiction en plus des variations du signal de commande, elle est souvent donnée par la forme quadratique suivante :

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} (y_r(k+i) - \hat{y}(k+i))^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta u(k+i)^2, \quad \lambda > 0$$

Cette fonction objective peut être formulée sous forme matricielle comme suit :

$$J = (y_R - \hat{y}_f)^T (y_R - \hat{y}_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f \quad \text{avec} \quad y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_p) \end{pmatrix}$$

En utilisant l'équation : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$, il vient :

$$J = (y_R - G_f \Delta u_f - y_L)^T (y_R - G_f \Delta u_f - y_L) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = ((y_R - y_L)^T - \Delta u_f^T G_f^T) ((y_R - y_L) - G_f \Delta u_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = \Delta u_f^T (\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 \Delta u_f^T G_f^T (y_R - y_L) + (y_R - y_L)^T (y_R - y_L)$$

La minimisation du critère par rapport à la séquence de commande future Δu_f donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u_f} = 0 \Rightarrow 2(\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 G_f^T (y_R - y_L) = 0$$

L'expression du vecteur de commande résultant de la minimisation du critère est la suivante :

$$\Delta u_f = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - y_L) = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - \Psi_p x(k) - \Phi_p u(k-1))$$

Posons : $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$ la matrice de gain et g_c^T la première ligne de cette matrice. En utilisant le principe de l'horizon fuyant (glissant), seul le premier élément de la séquence de commande optimale obtenue est appliqué au système à l'instant d'échantillonnage courant :

$$\Delta u(k) = g_c^T (y_R - y_L) = g_c^T (y_R - \Psi_p x(k) - \Phi_p u(k-1))$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T (y_R - y_L) = u(k-1) + g_c^T (y_R - \Psi_p x(k) - \Phi_p u(k-1))$$

A l'instant d'échantillonnage suivant, l'horizon de prédiction glisse d'un pas et la procédure d'optimisation est répétée de la même façon.

4.1.5 Exemple 1

On considère le modèle d'état discret suivant :
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 0.1x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -0.4x_1(k) + x_2(k) - 0.1u(k) \end{cases}$$

avec l'équation de sortie : $y(k) = x_2(k)$.

Déterminer l'expression de la loi de commande prédictive $u(k)$ si $N_p = 3$, $N_u = 1$ et $\lambda = 0.25$.

Solution

On a les matrices du modèle d'état : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1]$.

Etant donné que $N_u = 1$, la séquence des commandes futures contient alors un seul élément qui est $\Delta u_f = \Delta u(k)$.

$$\Delta u_f = G_c (y_R - \Psi_p x(k) - \Phi_p u(k-1)) \text{ , } G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T (y_R - \Psi_p x(k) - \Phi_p u(k-1))$$

$$\Sigma_0 = CB = -0.1 \quad , \quad \Sigma_1 = CAB + CB = -0.6 \quad , \quad \Sigma_2 = CA^2B + CAB + CB = -1.496 \quad ,$$

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} \Sigma_0 \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.6 \\ -1.496 \end{bmatrix} \quad , \quad G_f = \begin{bmatrix} \Sigma_0 \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.6 \\ -1.496 \end{bmatrix} \quad , \quad \Psi_p = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ -0.8 & 0.96 \\ -1.184 & 0.88 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$y_R = \begin{bmatrix} y_r(k+1) \\ y_r(k+2) \\ y_r(k+3) \end{bmatrix} .$$

$$(\lambda I + G_f^T G_f) = 2.858; \quad G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T = \begin{bmatrix} -0.035 & -0.2099 & -0.5234 \end{bmatrix}$$

$$g_c^T = [-0.035 \quad -0.2099 \quad -0.5234] ; g_c^T \Psi_p = [0.8017 \quad -0.6972] ; g_c^T \Phi_p = 0.9125$$

$$u(k) = 0.0875u(k-1) - 0.0350y_r(k+1) - 0.2099y_r(k+2) - 0.5234y_r(k+3) \\ - 0.8017x_1(k) + 0.6972x_2(k)$$

4.2 Deuxième approche

Dans cette approche, pour doter la loi de commande d'une action intégrale, le nouveau vecteur d'état augmenté sera composé de la variation du vecteur d'état et de la sortie du système.

4.2.1 Modèle du système

La loi de commande est déterminée en utilisant le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_d d_x \\ y(k) = Cx(k) \end{cases},$$

avec $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R$, $y(k) \in R$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^n$, $C \in R^{1 \times n}$, et d_x est une perturbation constante.

Pour supprimer l'effet de la perturbation constante, on définit l'incrément du vecteur d'état :

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$$

Ce qui donne

$$\Delta x(k+1) = A \Delta x(k) + B \Delta u(k) ; \quad \Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

On considère aussi la variation de la sortie :

$$\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k) = Cx(k+1) - Cx(k) = C \Delta x(k+1)$$

$$\Delta y(k+1) = CA \Delta x(k) + CB \Delta u(k)$$

D'où il vient :

$$y(k+1) = y(k) + CA \Delta x(k) + CB \Delta u(k)$$

Maintenant, on peut établir la représentation d'état augmentée (étendue) suivante :

$$\begin{cases} x_a(k+1) = A_a x_a(k) + B_a \Delta u(k) \\ y(k) = C_a x_a(k) \end{cases}$$

$$\text{avec : } x_a(k) = \begin{pmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}, A_a = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ CA & 1 \end{pmatrix}, B_a = \begin{pmatrix} B \\ CB \end{pmatrix}, C_a = (\mathbf{0} \quad 1)$$

Pour ce modèle d'état, le vecteur d'état augmenté est constitué de la variation du vecteur d'état et de la sortie du système. Ce modèle sera utilisé pour prédire le comportement futur du système.

4.2.2 Prédiction de la sortie

En utilisant le modèle d'état augmenté, on peut écrire

$$x_a(k+1) = A_a x_a(k) + B_a \Delta u(k)$$

$$x_a(k+2) = A_a x_a(k+1) + B_a \Delta u(k+1) = A_a^2 x_a(k) + A_a B_a \Delta u(k) + B_a \Delta u(k+1)$$

$$x_a(k+3) = A_a x_a(k+2) + B_a \Delta u(k+2) = A_a^3 x_a(k) + A_a^2 B_a \Delta u(k) + A_a B_a \Delta u(k+1) + B_a \Delta u(k+2)$$

$$\Rightarrow x_a(k+i) = A_a^i x_a(k) + \sum_{j=0}^{i-1} A_a^{i-j-1} B_a \Delta u(k+j)$$

Alors la prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ avec $i=1, \dots, N_p$ où N_p est l'horizon de prédiction, est donnée par :

$$\hat{y}(k+i) = C_a x_a(k+i) = C_a A_a^i x_a(k) + \sum_{j=0}^{i-1} C_a A_a^{i-j-1} B_a \Delta u(k+j)$$

En utilisant l'expression de la matrice A_a , on peut montrer que : $A_a^i = \left(\begin{array}{c|c} A^i & \mathbf{0} \\ \hline C \sum_{j=1}^i A^j & 1 \end{array} \right)$, d'où il

vient :

$$C_a A_a^i x_a(k) = \left(C \sum_{j=1}^i A^j \quad 1 \right) x_a(k) = C \sum_{j=1}^i A^j \Delta x(k) + y(k)$$

$$C_a A_a^{i-j-1} B_a = (\mathbf{0} \quad 1) \left(\begin{array}{c|c} A^{i-j-1} & \mathbf{0} \\ \hline C \sum_{\ell=1}^{i-j-1} A^\ell & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} B \\ CB \end{pmatrix} = \sum_{\ell=1}^{i-j-1} C A^\ell B + CB = \sum_{\ell=0}^{i-j-1} C A^\ell B$$

La prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ devient :

$$\hat{y}(k+i) = C \sum_{j=1}^i A^j \Delta x(k) + y(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\ell=0}^{i-j-1} C A^\ell B \Delta u(k+j)$$

En commande prédictive, on suppose que $N_u \leq N_p$ et que $\Delta u(k+N_u+j) = 0$, $j \geq 0$, c'est-à-dire, au-delà de l'horizon de commande N_u , l'entrée de commande est supposée constante.

4.2.3 Forme matricielle de l'équation de prédiction

En considérant l'ensemble des prédictions pour $i=1, \dots, N_p$, on obtient une séquence de prédictions qui peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{y}_f = \Psi_p \Delta x(k) + \Lambda_s y(k) + G_f \Delta u_f$$

Les vecteurs \hat{y}_f , Δu_f et Λ_s et les matrices G_f et Ψ_p sont définis comme suit :

$$\hat{y}_f = \begin{pmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_p) \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \Delta u_f = \begin{pmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{pmatrix} \in R^{N_u}, \Lambda_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \Psi_p = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N_p} \end{pmatrix} \in R^{N_p \times n}$$

$$, \psi_i = C \sum_{j=1}^i A^j, G_f = \begin{pmatrix} \Sigma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Sigma_1 & \Sigma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Sigma_{N_u-1} & \Sigma_{N_u-2} & \Sigma_{N_u-3} & \cdots & \Sigma_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Sigma_{N_p-1} & \Sigma_{N_p-2} & \Sigma_{N_p-3} & \cdots & \Sigma_{N_p-N_u} \end{pmatrix} \in R^{N_p \times N_u}, \Sigma_i = C \sum_{j=0}^i A^j B$$

On peut la mettre également sous la forme compacte suivante :

$$\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L \quad \text{avec} \quad y_L = \Psi_p \Delta x(k) + \Lambda_s y(k)$$

4.2.4 Elaboration de la commande

La fonction objective doit contenir un terme qui évalue l'écart de la sortie réelle du système par rapport à la sortie de référence et un autre terme qui évalue la variation de l'effort de commande utilisé. Le problème d'optimisation consiste alors à minimiser la fonction quadratique suivante :

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} (y_r(k+i) - \hat{y}(k+i))^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta u(k+i)^2, \quad \lambda > 0$$

Cette fonction objective peut être formulée sous forme matricielle comme suit :

$$J = (y_R - \hat{y}_f)^T (y_R - \hat{y}_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f \quad \text{avec} \quad y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_p) \end{pmatrix}$$

En utilisant l'équation : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$, il vient :

$$J = (y_R - G_f \Delta u_f - y_L)^T (y_R - G_f \Delta u_f - y_L) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = ((y_R - y_L)^T - \Delta u_f^T G_f^T) ((y_R - y_L) - G_f \Delta u_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = \Delta u_f^T (\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 \Delta u_f^T G_f^T (y_R - y_L) + (y_R - y_L)^T (y_R - y_L)$$

La minimisation du critère par rapport à la séquence de commande future Δu_f donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u_f} = 0 \Rightarrow 2(\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 G_f^T (y_R - y_L) = 0$$

L'expression du vecteur de commande résultant de la minimisation du critère est la suivante :

$$\Delta u_f = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - y_L) = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T (y_R - \Psi_p \Delta x(k) - \Lambda_s y(k))$$

Posons : $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$ la matrice de gain et g_c^T la première ligne de cette matrice. Etant donné que seul le premier élément du vecteur de commande optimal correspondant à l'instant d'échantillonnage actuel est appliqué au système, alors la loi de commande prédictive est donnée par :

$$\Delta u(k) = g_c^T (y_R - y_L) = g_c^T (y_R - \Psi_p x(k) - \Lambda_s y(k))$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T (y_R - y_L) = u(k-1) + g_c^T (y_R - \Psi_p x(k) - \Lambda_s y(k))$$

A l'instant d'échantillonnage suivant, l'horizon de prédiction glisse d'un pas et la procédure d'optimisation est répétée de la même façon.

4.2.5 Exemple 2

On considère le modèle d'état discret suivant :
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 0.1x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -0.4x_1(k) + x_2(k) - 0.1u(k) \end{cases}$$

avec l'équation de sortie : $y(k) = x_2(k)$.

Déterminer l'expression de la loi de commande prédictive $u(k)$ si $N_p = 3$, $N_u = 1$ et $\lambda = 0.25$.

Solution

On a les matrices du modèle d'état : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1]$.

On a : $N_u = 1$, alors $\Delta u_f = \Delta u(k)$

$$\Delta u_f = G_c (y_R - \Psi_p \Delta x(k) - \Lambda_s y(k)) \text{ , } G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$$

$$u(k) = u(k-1) + g_c^T (y_R - \Psi_p \Delta x(k) - \Lambda_s y(k))$$

$$\Sigma_0 = CB = -0.1 \text{ , } \Sigma_1 = CAB + CB = -0.6 \text{ , } \Sigma_2 = CA^2B + CAB + CB = -1.496 \text{ , } \Lambda_s = [1, 1, 1]^T$$

$$G_f = \begin{bmatrix} \Sigma_0 \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.6 \\ -1.496 \end{bmatrix} \text{ , } \Psi_p = \begin{bmatrix} CA \\ C(A + A^2) \\ C(A + A^2 + A^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ -1.2 & 1.96 \\ -2.384 & 2.84 \end{bmatrix} \text{ , } y_R = \begin{bmatrix} y_r(k+1) \\ y_r(k+2) \\ y_r(k+3) \end{bmatrix}.$$

$$(\lambda I + G_f^T G_f) = 2.858; \quad G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T = [-0.035 \quad -0.2099 \quad -0.5234]$$

$$g_c^T = [-0.035 \quad -0.2099 \quad -0.5234] \text{ ; } g_c^T \Psi_p = [1.5137 \quad -1.9327] \text{ ; } g_c^T \Lambda_s = -0.7683$$

$$u(k) = u(k-1) - 0.0350y_r(k+1) - 0.2099y_r(k+2) - 0.5234y_r(k+3) \\ - 1.5137\Delta x_1(k) + 1.9327\Delta x_2(k) + 0.7683y(k)$$

Commande Prédicative fonctionnelle

Predictive Functional Control (PFC)

Cette méthode est proposée par Richalet et ces collaborateurs en 1978 et elle est basée sur les quatre principes suivants :

- Modèle interne.
- Trajectoire de référence.
- Structure et séquence future de la commande.
- Principe de l'horizon fuyant (glissant).

5.1 Modèle interne

La synthèse d'une loi de commande prédictive passe d'abord par une phase de modélisation du système à commander. Le modèle choisi doit être capable de représenter le comportement dynamique du système, tout en ayant une complexité compatible avec les moyens de calcul de la loi de commande. En commande PFC, le modèle interne de prédiction de la sortie du système est choisi linéaire sous forme de fonction de transfert ou de modèle d'état. Dans le cadre de ce cours, le système est représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}, \quad x(k) \in R^n, u(k) \in R, y(k) \in R, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, C \in R^{1 \times n}$$

Ainsi, le modèle interne utilisé par la technique PFC est donné par :

$$\begin{cases} x_M(k+1) = Ax_M(k) + Bu(k) \\ y_M(k) = Cx_M(k) \end{cases},$$

avec $x_M(k) \in R^n$ vecteur d'état du modèle, $y_M(k) \in R$ sortie du modèle, $u(k) \in R$ entrée de commande. Ce modèle interne est en évolution libre, c'est-à-dire, il évolue de façon indépendante de l'évolution du système.

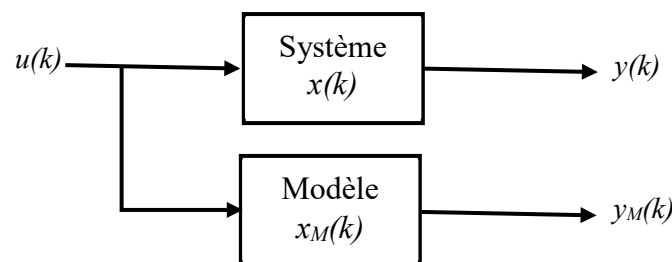


Figure 5.1 : Modèle interne

5.2 Prédiction de la sortie

La prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ avec $i=1, \dots, N_p$ où N_p est l'horizon de prédiction, est donnée par :

$$x_M(k+1) = Ax_M(k) + Bu(k)$$

$$\begin{aligned}
x_M(k+2) &= A x_M(k+1) + B u(k+1) = A^2 x_M(k) + A B u(k) + B u(k+1) \\
x_M(k+3) &= A x_M(k+2) + B u(k+2) = A^3 x_M(k) + A^2 B u(k) + A B u(k+1) + B u(k+2) \\
x_M(k+i) &= A^i x_M(k) + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B u(k+j)
\end{aligned}$$

$$y_M(k+i) = C x_M(k+i) = C A^i x_M(k) + \sum_{j=0}^{i-1} C A^{i-j-1} B u(k+j)$$

Pour améliorer la qualité de la prédiction à cause des erreurs de modélisation et des perturbations externes, on introduit un terme de correction $\hat{d}(k+i)$

$$\hat{y}_M(k+i) = C A^i x_M(k) + \sum_{j=0}^{i-1} C A^{i-j-1} B u(k+j) + \hat{d}(k+i)$$

On suppose que la perturbation est constante tout le long de l'horizon de prédiction, il vient alors :

$$\hat{d}(k+N_p) = \dots = \hat{d}(k+2) = \hat{d}(k+1) = \hat{d}(k) \quad \text{avec} \quad \hat{d}(k) = y(k) - y_M(k)$$

La prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ devient alors :

$$\hat{y}_M(k+i) = C x_M(k+i) = C A^i x_M(k) + \sum_{j=0}^{i-1} C A^{i-j-1} B u(k+j) + \hat{d}(k)$$

En commande prédictive fonctionnelle, on suppose que $N_u = N_p$.

5.3 Forme matricielle de l'équation de prédiction

En considérant l'ensemble des prédictions pour $i=1, \dots, N_p$, on obtient une séquence de prédictions qui peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{y}_f = \Psi_p x_M(k) + \Lambda_s \hat{d}(k) + \Phi_f u_f$$

Les vecteurs \hat{y}_f , u_f et Λ_s et la matrice Φ_f sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{y}_f &= \begin{pmatrix} \hat{y}_M(k+1) \\ \vdots \\ \hat{y}_M(k+N_p) \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \quad u_f = \begin{pmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k+N_p-1) \end{pmatrix} \in R^{N_p}, N_u = N_p, \quad \Lambda_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{N_p}, \\
\Psi_p &= \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{pmatrix} \in R^{N_p \times n}, \quad \Phi_f = \begin{pmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CB \end{pmatrix} \in R^{N_p \times N_p}.
\end{aligned}$$

On peut la mettre également sous la forme compacte suivante :

$$\hat{y}_f = \Phi_f u_f + y_L \quad \text{avec} \quad y_L = \Psi_p x_M(k) + \Lambda_s \hat{d}(k)$$

5.4 Trajectoire de référence

La commande prédictive fonctionnelle utilise une trajectoire de référence pour spécifier la manière selon laquelle la sortie du système devrait rejoindre la consigne sur l'horizon de prédiction (de longueur N_p). Pour que la sortie rejoigne en douceur la consigne, la trajectoire de référence est réinitialisée à chaque instant sur la sortie réelle du système et elle est choisie selon la relation :

$$c(k+i) - y_r(k+i) = \beta^i (c(k) - y(k)), \quad 0 \leq \beta < 1, \quad i = 1, \dots, N_p$$

avec $y(k)$, $y_r(k)$ et $c(k)$ sont la sortie du système, la trajectoire de référence, et la consigne, respectivement.

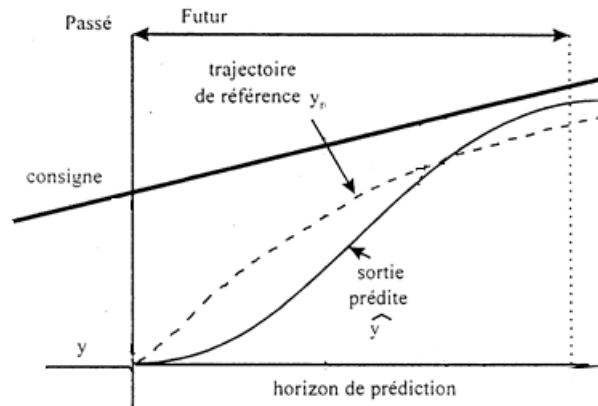


Figure 5.2 : Trajectoire de référence et horizon de prédiction

5.5 Structure de la commande future

La commande future est déterminée à partir d'une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions de base selon la relation :

$$u(k+i) = \sum_{j=1}^{N_B} \gamma_j(k) f_{B_j}(i), \quad i = 0, \dots, N_p - 1, \quad N_u = N_p$$

avec $\gamma_j(k)$ sont des coefficients inconnus et $f_{B_j}(i)$ sont des fonctions de base connues ayant souvent la forme polynomiale suivante : $f_{B_j}(i) = i^{j-1}$. Il vient alors :

$$u(k+i) = \gamma_1(k) + \gamma_2(k)i + \gamma_3(k)i^2 + \dots + \gamma_{N_B}(k)i^{N_B-1}, \quad i = 0, \dots, N_p - 1$$

Le calcul de la séquence de commande future nécessite la détermination à chaque instant d'échantillonnage des coefficients $\gamma_j(k)$, $j = 1, \dots, N_B$.

$$\text{On définit : } u_f = \Phi_B \Gamma, \quad u_f = \begin{pmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k + N_p - 1) \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(k) \\ \vdots \\ \gamma_{N_B}(k) \end{pmatrix} \in R^{N_B},$$

$$f_{B_j}(i) = i^{j-1} \Rightarrow \Phi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{N_B-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & (N_p-1) & (N_p-1)^2 & \cdots & (N_p-1)^{N_B-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p \times N_B}$$

Ainsi, l'équation de prédiction devient :

$$\hat{y}_f = \Phi_f \Phi_B \Gamma + y_L$$

Le problème de calcul des commandes futures devient un problème d'identification des coefficients $\gamma_j(k)$, c'est-à-dire, le vecteur Γ .

5.6 Calcul de la commande

La détermination des paramètres inconnus $\gamma_j(k)$ s'effectue par la minimisation d'un critère quadratique exprimé en fonction de l'écart entre la sortie prédite du système et la trajectoire de référence en certains points de l'horizon de prédiction appelés points de coïncidences (ou horizon de coïncidence) $h_i, i=1, \dots, p_c$, avec $h_{p_c} = N_p$. Le critère quadratique à minimiser s'écrit alors :

$$J = \sum_{i=1}^{p_c} (y_r(k+h_i) - \hat{y}_M(k+h_i))^2$$

Ce critère peut être formulé sous forme matricielle comme suit :

$$J = (P y_R - P \hat{y}_f)^T (P y_R - P \hat{y}_f) = (y_R - \hat{y}_f)^T P^T P (y_R - \hat{y}_f)$$

où $y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_p) \end{pmatrix}$, et P est une matrice de dimension $p_c \times N_p$ avec $P_{ih_i} = 1$, sinon 0.

Cette matrice permet de sélectionner les points de coïncidences seulement.

En utilisant l'équation de prédiction : $\hat{y}_f = \Phi_f \Phi_B \Gamma + y_L$, on peut écrire :

$$J = (y_R - \Phi_f \Phi_B \Gamma - y_L)^T P^T P (y_R - \Phi_f \Phi_B \Gamma - y_L)$$

$$J = ((y_R - y_L)^T - \Gamma^T (\Phi_f \Phi_B)^T) P^T P ((y_R - y_L) - \Phi_f \Phi_B \Gamma)$$

$$J = \Gamma^T (\Phi_f \Phi_B)^T P^T P \Phi_f \Phi_B \Gamma - 2 \Gamma^T (\Phi_f \Phi_B)^T P^T P (y_R - y_L) + (y_R - y_L)^T P^T P (y_R - y_L)$$

$$J = \Gamma^T \Phi_0^T \Phi_0 \Gamma - 2 \Gamma^T \Phi_0^T P (y_R - y_L) + (y_R - y_L)^T P^T P (y_R - y_L), \text{ avec } \Phi_0 = P \Phi_f \Phi_B$$

La minimisation du critère par rapport au vecteur Γ donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \Gamma} = 0 \Rightarrow 2\Phi_0^T \Phi_0 \Gamma - 2\Phi_0^T P(y_R - y_L) = 0$$

L'expression du vecteur des coefficients résultant de la minimisation du critère est :

$$\Gamma = (\Phi_0^T \Phi_0)^{-1} \Phi_0^T P(y_R - y_L) = (\Phi_0^T \Phi_0)^{-1} \Phi_0^T P(y_R - \Psi_p x_M(k) - \Lambda_s \hat{d}(k))$$

En utilisant le principe de l'horizon fuyant (glissant), seul le premier élément de la séquence de commande optimale obtenue est appliqué au système à l'instant d'échantillonnage courant :

$$u(k) = \sum_{j=1}^{N_B} \gamma_j(k) f_{Bj}(0)$$

$$u(k) = \gamma_1(k) \text{ si } f_{Bj}(i) = i^{j-1}$$

A l'instant d'échantillonnage suivant, l'horizon de prédiction glisse d'un pas et la procédure d'optimisation est répétée de la même façon.

5.7 Exemple

On considère le modèle d'état suivant : $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = (0.5 \quad 0.5)$

On donne : $N_p = 4$, $h_1 = 2$, $h_2 = 3$, $h_3 = 4$, $p_c = 3$, $N_B = 2$, fonctions de base $f_{Bj}(i) = i^{j-1}$, $\beta = 0.9$, consigne $c(k) = 1$.

Si à l'instant $k = 3$, $x(3) = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.133 \end{pmatrix}$ et $x_M(3) = \begin{pmatrix} 0.006 \\ 0.131 \end{pmatrix}$ calculer alors la valeur de $u(3)$.

Solution

$$\text{On a : } u_f = \Phi_B \Gamma \text{ avec } u_f = \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ u(k+3) \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(k) \\ \gamma_2(k) \end{pmatrix}, f_{Bj}(i) = i^{j-1} \Rightarrow \Phi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = (\Phi_0^T \Phi_0)^{-1} \Phi_0^T P(y_R - \Psi_p x_M(k) - \Lambda_s \hat{d}(k)), \quad \Phi_0 = P \Phi_f \Phi_B$$

$$\Phi_f = \begin{pmatrix} CB & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.455 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.410 & 0.455 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_0 = P \Phi_f \Phi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1.455 & 1.5 \\ 1.865 & 2.955 \end{pmatrix}, \quad \Psi_p = \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.5 \\ 0.005 & 0.455 \\ 0.0005 & 0.410 \\ 0.00005 & 0.3691 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{d}(k) = y(k) - y_M(k) \Rightarrow \hat{d}(3) = y(3) - y_M(3) = Cx(3) - Cx_M(3) = 0.0005$$

On a : $c(k+i) - y_r(k+i) = \beta^i (c(k) - y(k)) \Rightarrow y_r(k+i) = c(k+i) - \beta^i (c(k) - y(k))$ avec $k=3, i=1, \dots, 4, y(3) = 0.069$ et $c(k) = 1$.

$$\text{Alors, il vient : } y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ y_r(k+2) \\ y_r(k+3) \\ y_r(k+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1621 \\ 0.2459 \\ 0.3213 \\ 0.3892 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0^T \Phi_0 = \begin{pmatrix} 6.5953 & 8.1936 \\ 8.1936 & 11.232 \end{pmatrix}, \quad (\Phi_0^T \Phi_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.6177 & -1.1801 \\ -1.1801 & 0.9499 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = (\Phi_0^T \Phi_0)^{-1} \Phi_0^T P (y_R - \Psi_p x_M(k) - \Lambda_s \hat{d}(k)) = \begin{pmatrix} 0.1868 \\ -0.0028 \end{pmatrix}$$

On a : $u(k) = \gamma_1(k) \Rightarrow u(3) = 0.1868$

Commande prédictive avec contraintes

6.1 Introduction

Les approches de commande prédictive déjà présentées ne tiennent pas compte des contraintes physiques sur la commande et la sortie du système. Cependant, en pratique, les variables d'entrées, d'états et de sorties d'un système dynamique sont souvent soumises à des contraintes qui peuvent être de natures diverses :

- limitation physique des actionneurs,
- spécification de la qualité d'un produit,
- exigence de sécurité et domaine de tolérance pour une sortie, ...etc.

Si les contraintes ne sont pas prises en compte dans la conception de la commande, il peut résulter une dégradation des performances en boucle fermée et même un risque d'avoir un comportement indésirable ou une instabilité.

Les approches de la commande prédictive incorporent les contraintes pendant la phase de synthèse et d'implantation de la loi de commande, permettant ainsi de traiter le problème des contraintes d'une façon directe de sorte que l'algorithme trouve automatiquement la meilleure solution admissible.

6.2 Modélisation des contraintes

On présente les différentes contraintes et restrictions souvent considérées dans la commande prédictive des systèmes, et on présente également la forme dans laquelle ces contraintes doivent être formulées pour les prendre en compte dans l'étape d'optimisation.

6.2.1 Contraintes sur l'amplitude du signal de commande

Les contraintes sur l'amplitude du signal de la commande sont assez fréquentes en pratique pour prendre en compte les effets de la saturation des actionneurs. Par exemple, en supposant que le signal de commande a une limite supérieure u_{\max} et une limite inférieure u_{\min} . Les contraintes sur le signal de commande $u(k)$ peuvent être exprimées au moyen de l'inégalité suivante :

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}$$

Ces contraintes sont à satisfaire sur tout l'horizon de prédiction de la commande N_u :

$$u_{\min} \leq u(k+i) \leq u_{\max} \text{ pour } i = 0, \dots, N_u - 1,$$

où encore

$$\Lambda_c u_{\min} \leq u_f \leq \Lambda_c u_{\max}$$

$$\text{avec } u_f = [u(k), \dots, u(k+N_u-1)]^T \text{ et } \Lambda_c = [1, \dots, 1]^T \in R^{N_u}$$

Il convient parfois de représenter ces contraintes en fonction des incréments du signal de commande $\Delta u(k+i)$, $i = 0, \dots, N_u - 1$. Sachant que :

$$u(k+i) = \sum_{j=0}^i \Delta u(k+j) + u(k-1)$$

On peut alors avoir cette forme vectorielle :

$$u_f = T_c \Delta u_f + \Lambda_c u(k-1)$$

avec $T_c \in R^{N_u \times N_u}$ matrice triangulaire inférieure à éléments égaux à 1, et $\Delta u_f = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_u-1)]^T$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \Lambda_c u_{\min} \leq u_f \leq \Lambda_c u_{\max} \\ u_f = T_c \Delta u_f + \Lambda_c u(k-1) \end{cases} \Rightarrow \Lambda_c u_{\min} \leq T_c \Delta u_f + \Lambda_c u(k-1) \leq \Lambda_c u_{\max}$$

Ce qui permet d'établir les contraintes suivantes sur les incréments de commande :

$$\Lambda_c (u_{\min} - u(k-1)) \leq T_c \Delta u_f \leq \Lambda_c (u_{\max} - u(k-1))$$

et qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} T_c \\ -T_c \end{bmatrix} \Delta u_f \leq \begin{bmatrix} \Lambda_c (u_{\max} - u(k-1)) \\ -\Lambda_c (u_{\min} - u(k-1)) \end{bmatrix}$$

6.2.2 Contrainte sur la vitesse de variation du signal de commande

Les restrictions sur la vitesse de variation du signal de commande peuvent être exprimées au moyen de l'inégalité suivante :

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max}$$

Ces contraintes sont à satisfaire sur tout l'horizon de prédiction de la commande N_u :

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta u_{\max} \text{ pour } i = 0, \dots, N_u - 1,$$

ou encore

$$\Lambda_c \Delta u_{\min} \leq \Delta u_f \leq \Lambda_c \Delta u_{\max}$$

avec $\Delta u_f = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_u-1)]^T$ et $\Lambda_c = [1, \dots, 1]^T \in R^{N_u}$

et qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \Delta u_f \leq \begin{bmatrix} \Lambda_c \Delta u_{\max} \\ -\Lambda_c \Delta u_{\min} \end{bmatrix} \text{ avec } I \in R^{N_u \times N_u} \text{ matrice identité.}$$

6.2.3 Restrictions sur l'amplitude de la sortie

En pratique, on peut spécifier la plage de fonctionnement pour la sortie du système. Par exemple, en supposant que la sortie du système a une limite supérieure y_{\max} et une limite inférieure y_{\min} , les contraintes de sortie se traduisent par une inégalité de la forme :

$$y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max}$$

Ces contraintes sont à satisfaire sur tout l'horizon de prédiction de la sortie N_p :

$$y_{\min} \leq \hat{y}(k+i) \leq y_{\max} \text{ pour } i=1, \dots, N_p,$$

ou encore

$$\Lambda_s y_{\min} \leq \hat{y}_f \leq \Lambda_s y_{\max}$$

$$\text{avec } \hat{y}_f = [\hat{y}(k+1), \dots, \hat{y}(k+N_p)]^T \text{ et } \Lambda_s = [1, \dots, 1]^T \in R^{N_p}$$

Etant donné que $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$, une telle contrainte peut s'écrire en fonction des incréments de commande comme suit :

$$\Lambda_s y_{\min} \leq \hat{y}_f \leq \Lambda_s y_{\max} \Rightarrow \Lambda_s y_{\min} \leq G_f \Delta u_f + y_L \leq \Lambda_s y_{\max} \Rightarrow \Lambda_s y_{\min} - y_L \leq G_f \Delta u_f \leq \Lambda_s y_{\max} - y_L$$

et qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} G_f \\ -G_f \end{bmatrix} \Delta u_f \leq \begin{bmatrix} \Lambda_s y_{\max} - y_L \\ -(\Lambda_s y_{\min} - y_L) \end{bmatrix}$$

6.3 Problème d'optimisation

Selon le principe de l'horizon fuyant, il est nécessaire de résoudre un problème d'optimisation à chaque pas d'échantillonnage pour le calcul de la commande optimale qui sera injectée au système. En conséquence, le problème d'optimisation est composé d'un critère quadratique avec des contraintes associées et il est reformulé sous une forme appropriée à la programmation quadratique. Le problème d'optimisation est donné par :

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} (y_r(k+i) - \hat{y}(k+i))^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta u(k+i)^2$$

Sujet à :

$$u_{\min} \leq u(k+i) \leq u_{\max} \text{ pour } i=0, \dots, N_u-1,$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta u_{\max} \text{ pour } i=0, \dots, N_u-1,$$

$$y_{\min} \leq \hat{y}(k+i) \leq y_{\max} \text{ pour } i=1, \dots, N_p,$$

Critère quadratique :

Ce critère peut être écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$J = (y_R - \hat{y}_f)^T (y_R - \hat{y}_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f \quad \text{où } y_R = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ \vdots \\ y_r(k+N_p) \end{pmatrix}$$

Sachant que la sortie prédite peut être exprimée sous la forme : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$, il vient :

$$J = (y_R - G_f \Delta u_f - y_L)^T (y_R - G_f \Delta u_f - y_L) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = ((y_R - y_L)^T - \Delta u_f^T G_f^T) ((y_R - y_L) - G_f \Delta u_f) + \lambda \Delta u_f^T \Delta u_f$$

$$J = \Delta u_f^T (\lambda I + G_f^T G_f) \Delta u_f - 2 (G_f^T (y_R - y_L))^T \Delta u_f + (y_R - y_L)^T (y_R - y_L)$$

En posant :

$$H_c = \lambda I + G_f^T G_f$$

$$F_c = -G_f^T (y_R - y_L)$$

$$J_0 = (y_R - y_L)^T (y_R - y_L)$$

L'expression du critère devient alors :

$$J = \Delta u_f^T H_c \Delta u_f + 2 F_c^T \Delta u_f + J_0$$

Contraintes imposées :

Les différentes contraintes imposées peuvent s'exprimer sous forme condensée en fonction des incréments de commande comme suit : $A_c \Delta u_f \leq B_c$ avec

$$A_c = \begin{bmatrix} T_c \\ -T_c \\ I \\ -I \\ G_f \\ -G_f \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} \Lambda_c (u_{\max} - u(k-1)) \\ -\Lambda_c (u_{\min} - u(k-1)) \\ \Lambda_c \Delta u_{\max} \\ -\Lambda_c \Delta u_{\min} \\ \Lambda_s y_{\max} - y_L \\ -(\Lambda_s y_{\min} - y_L) \end{bmatrix}$$

Réécriture du problème d'optimisation :

Ainsi, le problème d'optimisation peut être réécrit sous la forme suivante :

$$J = \Delta u_f^T H_c \Delta u_f + 2 F_c^T \Delta u_f + J_0$$

Sujet à : $A_c \Delta u_f \leq B_c$

Ce problème représente un problème de programmation quadratique (QP) et l'implantation de la commande prédictive nécessite la résolution de ce problème QP à chaque pas

d'échantillonnage. La commande optimale appliquée au système à chaque itération sera la première composante de la solution Δu_f .

Algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalité

Le problème d'optimisation peut être réécrit sous la forme suivante :

$$J = \Delta u_f^T H_c \Delta u_f + 2F_c^T \Delta u_f + J_0$$

Sujet à : $A_c \Delta u_f \leq B_c$

A chaque instant d'échantillonnage k , le vecteur des commandes futures $\Delta u_f = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k + N_u - 1)]^T$ est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta u_f^{(i+1)} &= \Delta u_f^{(i)} - \alpha \left(2H_c \Delta u_f^{(i)} + 2F_c + A_c^T \eta^{(i)} \right) \\ \eta^{(i+1)} &= \max \left(0, \eta^{(i)} + \beta \left(A_c \Delta u_f^{(i)} - B_c \right) \right) \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\eta^{(0)} = 0$, $\Delta u_f^{(0)} = 0$ et $i = 0, \dots, i_{\max}$, i_{\max} est donné.

La commande optimale appliquée au système à chaque pas d'échantillonnage sera la première composante de la solution Δu_f .

Remarque : Dans Matlab, ce problème d'optimisation quadratique peut être résolu en utilisant la commande *quadprog* comme suit : $\Delta u_f = \text{quadprog}(H_c, F_c, A_c, B_c)$.

6.4 Exemple

Supposons que nous avons les inégalités suivantes dans un problème de commande prédictive (avec $N_u = 2$) : $-2 \leq u(k) \leq 3$ et $-1 \leq \Delta u(k) \leq 1$.

Ecrire ces contraintes sous la forme : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c .

Solution

La contrainte $-2 \leq u(k) \leq 3$ est à satisfaire sur tout l'horizon de prédiction de commande N_u .

Alors, on a : $-2 \leq u(k+i) \leq 3$ pour $i = 0, 1$, et qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} T_c \\ -T_c \end{bmatrix} \Delta u_f \leq \begin{bmatrix} \Lambda_c (3 - u(k-1)) \\ -\Lambda_c (-2 - u(k-1)) \end{bmatrix} \text{ avec } T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta u_f = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix}$$

La contrainte $-1 \leq \Delta u(k) \leq 1$ est à satisfaire sur tout l'horizon de prédiction de la commande N_u . Alors, on a : $-1 \leq \Delta u(k+i) \leq 1$ pour $i = 0, 1$, et qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \Delta u_f \leq \begin{bmatrix} \Lambda_c \Delta u_{\max} \\ -\Lambda_c \Delta u_{\min} \end{bmatrix} \text{ avec } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On peut alors avoir la forme condensée suivante : $A_c \Delta u_f \leq B_c$ avec

$$A_c = \begin{bmatrix} T_c \\ -T_c \\ I \\ -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} \Lambda_c(3-u(k-1)) \\ -\Lambda_c(-2-u(k-1)) \\ \Lambda_c \Delta u_{\max} \\ -\Lambda_c \Delta u_{\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-u(k-1) \\ 3-u(k-1) \\ -(-2-u(k-1)) \\ -(-2-u(k-1)) \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-u(k-1) \\ 3-u(k-1) \\ 2+u(k-1) \\ 2+u(k-1) \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Références

- [1] R.R. Bitmead, M. Gevers and V. Wertz, *Adaptive optimal control: The thinking man's GPC*, Prentice Hall International, 1990.
- [2] P. Boucher and D. Dumur, *La commande predictive : Avances et perspectives*, Hermes, 2006.
- [3] E.F. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*, Springer, 1999.
- [4] J.P. Corriou, *Process control: Theory and applications*, 2nd Edition, Springer, 2018.
- [5] L. Grune and J. Panneck, *Nonlinear model predictive control*, Springer, 2017.
- [6] J.M. Maciejowski, *Predictive control with constraints*, Prentice Hall, 2002.
- [7] C.S. Maniu, *Principes de la commande prédictive : Applications sous MATLAB*, Ecole d'été francophone, 2016.
- [8] J. Richalet, *Pratique de la commande predictive*, Hermes, 1993.
- [9] J. Richalet and D. O'Donovan, *Predictive functional control: Principles and industrial applications*, Springer-Verlag, 2009.
- [10] J.A. Rossiter, *Model-based predictive control: A practical approach*, CRC press, 2003.
- [11] J.A. Rossiter, *A first course in predictive control*, CRC Press, 2018.
- [12] L. Wang, *Model predictive control design and implementation using MATLAB*, Springer-Verlag, 2009
- [13] E. K. P. Chong and S. H. Zak. *An Introduction to Optimization*. John Wiley & Sons, New Jersey, 4th edition, 2013.