TD1 – Commande Prédictive

Exercice 1 :

Considérons la fonction objective suivante :

$J = \left(y_R - \hat{y}_f\right)^T Q\left(y_R - \hat{y}_f\right) + \Delta u_f^T R\,\Delta u_f$,

où Q et R sont des matrices symétriques et définies positives et $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$.

1) Montrer que cette fonction objective peut être mise sous la forme :

   $J = \Delta u_f^T H_c \Delta u_f + 2F_c^T \Delta u_f + J_0$

   Spécifier la matrice H_c, le vecteur F_c et le scalaire J_0.
2) Montrer que la solution optimale peut être écrite sous la forme :

   $\Delta u_f = G_c\left(y_R - y_L\right)$. Spécifier la matrice G_c.

Exercice 2 :

Soit un système donné par le modèle à réponse impulsionnelle finie suivant :

$y(k) = h_1 u(k-1) + h_2 u(k-2) + h_3 u(k-3) + h_4 u(k-4)$

où les h_i sont les coefficients de la réponse impulsionnelle.

1) Pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ et un horizon de commande $N_u = N_p$, mettre les sorties prédites sous la forme matricielle suivante : $\hat{y}_f = G_f u_f + y_L$. Spécifier la matrice G_f et les vecteurs u_f (vecteur des commandes futures) et y_L.
2) Refaire la question 1 si $N_u = 2$.
3) Montrer que le modèle à réponse impulsionnelle finie peut être mis sous la forme d'état suivante :

   $x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$, $y(k) = C\,x(k)$

   Spécifier les matrices du modèle A, B et C.

Exercice 3 :

Soit un système donné par le modèle à réponse indicielle finie suivant :

$y(k) = g_1 \Delta u(k-1) + g_2 \Delta u(k-2) + g_3 \Delta u(k-3) + g_4 \Delta u(k-4) + g_5 \Delta u(k-5) + g_6 u(k-6)$

où les g_i sont les coefficients de la réponse indicielle.

1) Pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ et un horizon de commande $N_u = N_p$, mettre les sorties prédites sous la forme matricielle suivante : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$. Spécifier la matrice Φ_f et les vecteurs u_f (vecteur des commandes futures) et y_L.
2) Refaire la question 1 si $N_u = 2$.

Exercice 4 :

A partir de la réponse indicielle d'un système, on a relevé les points suivants :

i	1	2	3	4	5	6
g_i	0.63	0.86	0.95	0.98	1	1

On donne : Horizon de prédiction : $N_p = 3$; Horizon de commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.25$

1) Donner l'expression de la solution optimale de la méthode de commande DMC.

2) Définir les vecteurs Δu_f, Δu_p et y_R.
3) Donner les matrices G_f et G_p, et le vecteur Λ_s.
4) Calculer la matrice du gain $G_c = \left(\lambda I + G_f^T G_f\right)^{-1} G_f^T$.
5) Ecrire la loi de commande résultante $u(k)$? Est-ce que celle-ci représente une loi de commande par rétroaction ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 :

Soit un système décrit par la fonction de transfert discrète suivante :

$$A\left(z^{-1}\right)y(k) = B\left(z^{-1}\right)u(k-1) + \frac{C\left(z^{-1}\right)}{\Delta\left(z^{-1}\right)}v(k) \ ;$$

avec $A\left(z^{-1}\right) = 1 - 0.8z^{-1}$; $B\left(z^{-1}\right) = 1 - 0.5z^{-1}$; $C\left(z^{-1}\right) = 1$

On donne : Horizons de prédiction : $N_p = 2$; Horizon de commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.5$

1) Calculer les polynômes : $Q_i\left(z^{-1}\right)$, $F_i\left(z^{-1}\right)$, $G_i\left(z^{-1}\right)$ et $H_i\left(z^{-1}\right)$.
2) Calculer la matrice du gain $G_c = \left(\lambda I + G_f^T G_f\right)^{-1} G_f^T$.
3) Donner l'expression (l'équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.
4) Calculer les polynômes : $S\left(z^{-1}\right)$, $R\left(z^{-1}\right)$ et $T\left(z^{-1}\right)$.
5) Déterminer le polynôme caractéristique de la boucle fermée $P_c\left(z^{-1}\right)$.
6) Vérifier la stabilité du système en boucle fermée.

Exercice 6 :

Soit un système décrit par la fonction de transfert discrète suivante :

$$A\left(z^{-1}\right)y(k) = B\left(z^{-1}\right)u(k-1) + \frac{C\left(z^{-1}\right)}{\Delta\left(z^{-1}\right)}v(k)$$

avec $A\left(z^{-1}\right) = 1 - 0.5z^{-1}$; $B\left(z^{-1}\right) = 1 + z^{-1}$; $C\left(z^{-1}\right) = 1 - 0.6z^{-1}$

On donne : Horizons de prédiction : $N_p = 2$; Horizon de commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 1$

1) Calculer les polynômes : $Q_i\left(z^{-1}\right)$, $F_i\left(z^{-1}\right)$, $G_i\left(z^{-1}\right)$ et $H_i\left(z^{-1}\right)$.
2) Calculer la matrice du gain $G_c = \left(\lambda I + G_f^T G_f\right)^{-1} G_f^T$.
3) Calculer les polynômes : $S\left(z^{-1}\right)$, $R\left(z^{-1}\right)$ et $T\left(z^{-1}\right)$.
4) Déterminer le polynôme caractéristique de la boucle fermée $P_c\left(z^{-1}\right)$.
5) Vérifier la stabilité du système en boucle fermée.
6) Donner l'expression (l'équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.

Exercice 7 :

Considérons le système du 1er ordre suivant : $y(k+1) = a\, y(k) + u(k)$

On veut déterminer une loi de commande simple de type MPC pour ce système. L'horizon de prédiction est 2 et l'horizon de commande est 1. Le calcul de la loi de commande est basé sur la minimisation de la fonction objective suivante :

$$J=\left(y_r\left(k+1\right)-\hat{y}\left(k+1\right)\right)^2+\beta\left(y_r\left(k+2\right)-\hat{y}\left(k+2\right)\right)^2\ ;\ \ y_r\left(k\right)=r=\mathrm{C^{te}}\ \text{ et }\ \beta\geq 0$$

1) Exprimer les sorties prédites en fonction des commandes futures.
2) Résoudre le problème d'optimisation et donner l'expression de la commande $u\left(k\right)$.
3) Déterminer les pôles du système bouclé pour $\beta=0$ et $\beta\to\infty$.

Exercice 8 :

Considérons le système du 1er ordre suivant :

$y\left(k+1\right)=a\,y(k)+u(k)+d$; la perturbation est supposée constante.

On veut déterminer une loi de commande simple de type MPC pour ce système en utilisant un modèle de prédiction qui ne dépend pas de la perturbation. L'horizon de prédiction est 2 et l'horizon de commande est 1. Le calcul de la loi de commande est basé sur la minimisation de la fonction objective suivante :

$$J=\left(y_r\left(k+1\right)-\hat{y}\left(k+1\right)\right)^2+\beta\left(y_r\left(k+2\right)-\hat{y}\left(k+2\right)\right)^2\ ;\ \ y_r\left(k\right)=r=\mathrm{C^{te}}\ \text{ et }\ \beta\geq 0$$

1) Exprimer les sorties prédites en fonction des incréments des commandes futures.
2) Résoudre le problème d'optimisation et donner l'expression de la commande $u\left(k\right)$.
3) Déterminer les pôles du système bouclé pour $\beta=0$ et $\beta\to\infty$.

Exercice 9 :

Soit le modèle d'état suivant :

$x\left(k+1\right)=A\,x\left(k\right)+B\,u\left(k\right)+B_1d_1$, $y\left(k\right)=C\,x\left(k\right)+d$ où d et d_1 sont deux perturbations constantes. Montrer comment ce modèle peut être transformé à un modèle d'état augmenté ne dépendant pas des perturbations constantes et ayant comme entrée l'incrément de commande $\Delta u\left(k\right)$.

Exercice 10 :

On considère le modèle d'état discret suivant : $\begin{bmatrix} x_1\left(k+1\right) \\ x_2\left(k+1\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & 1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\left(k\right) \\ x_2\left(k\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix}u\left(k\right)$

avec l'équation de sortie : $y\left(k\right)=-0.7x_1\left(k\right)+x_2\left(k\right)$.

Déterminer l'expression de la loi de commande prédictive $u\left(k\right)$ qui minimise le critère :

$$J=\sum_{i=1}^{2}\left(y_r\left(k+i\right)-\hat{y}\left(k+i\right)\right)^2+0.5\,\Delta u\left(k\right)^2\ .$$

NB : Utiliser les deux approches de la commande prédictive à base d'un modèle d'état.

Exercice 11 :

Soit le modèle d'état :

$x\left(k+1\right)=2x\left(k\right)+u\left(k\right)$, $y\left(k\right)=3x\left(k\right)$

et qui est soumis à la contrainte suivante : $-1 \leq y(k) \leq 2, \quad \forall k$. On considère une commande prédictive (première approche) avec $N_p = 2$ et $N_u = 1$, réécrire alors cette contrainte sous la forme suivante : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c.

Exercice 12 :

Supposons que nous avons les inégalités suivantes dans un problème de commande prédictive $(N_u = 3)$: $-1 \leq u(k) \leq 1$ et $-0.5 \leq \Delta u(k) \leq 0.5$.

Ecrire ces contraintes sous la forme d'une inégalité : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c.

Exercice 13 :

Soit le modèle d'état :

$x(k+1) = x(k) + 0.5u(k)$, $y(k) = 2x(k)$

et qui est soumis aux contraintes suivantes : $-1 \leq u(k) \leq 1$, $-0.5 \leq \Delta u(k) \leq 0.5$ et $-2 \leq y(k) \leq 1, \quad \forall k$. On considère une commande prédictive (deuxième approche) avec $N_p = 2$ et $N_u = 2$, réécrire alors ces contraintes sous la forme suivante : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c.