

TD1 – Commande Prédictive

Exercice 1 :

Considérons la fonction objective suivante :

$$J = (y_R - \hat{y}_f)^T Q (y_R - \hat{y}_f) + \Delta u_f^T R \Delta u_f,$$

où Q et R sont des matrices symétriques et définies positives et $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$.

- 1) Montrer que cette fonction objective peut être mise sous la forme :

$$J = \Delta u_f^T H_c \Delta u_f + 2F_c^T \Delta u_f + J_0$$

Spécifier la matrice H_c , le vecteur F_c et le scalaire J_0 .

- 2) Montrer que la solution optimale peut être écrite sous la forme :

$$\Delta u_f = G_c (y_R - y_L). \text{ Spécifier la matrice } G_c.$$

Exercice 2 :

Soit un système donné par le modèle à réponse impulsionnelle finie suivant :

$$y(k) = h_1 u(k-1) + h_2 u(k-2) + h_3 u(k-3) + h_4 u(k-4)$$

où les h_i sont les coefficients de la réponse impulsionnelle.

- 1) Pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ et un horizon de commande $N_u = N_p$, mettre les sorties prédites sous la forme matricielle suivante : $\hat{y}_f = G_f u_f + y_L$. Spécifier la matrice G_f et les vecteurs u_f (vecteur des commandes futures) et y_L .
- 2) Refaire la question 1 si $N_u = 2$.
- 3) Montrer que le modèle à réponse impulsionnelle finie peut être mis sous la forme d'état suivante :

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k), \quad y(k) = C x(k)$$

Spécifier le vecteur d'état $x(k)$ et les matrices du modèle A , B et C .

Exercice 3 :

Soit un système donné par le modèle à réponse indicielle finie suivant :

$$y(k) = g_1 \Delta u(k-1) + g_2 \Delta u(k-2) + g_3 \Delta u(k-3) + g_4 \Delta u(k-4) + g_5 \Delta u(k-5) + g_6 \Delta u(k-6)$$

où les g_i sont les coefficients de la réponse indicielle.

- 1) Pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ et un horizon de commande $N_u = N_p$, mettre les sorties prédites sous la forme matricielle suivante : $\hat{y}_f = G_f \Delta u_f + y_L$. Spécifier la matrice G_f et les vecteurs Δu_f (vecteur des variations des commandes futures) et y_L .
- 2) Refaire la question 1 si $N_u = 2$.
- 3) Montrer que le modèle à réponse indicielle finie peut être mis sous la forme d'état suivante :
- $$x(k+1) = A x(k) + B \Delta u(k), \quad y(k) = C x(k)$$
- Spécifier le vecteur d'état $x(k)$ et les matrices du modèle A , B et C .

Exercice 4 :

A partir de la réponse indicielle d'un système, on a relevé les points suivants :

i	1	2	3	4	5	6
g_i	0.63	0.86	0.95	0.98	1	1

On donne : Horizon de prédiction : $N_p = 3$; Horizon de commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.25$

- 1) Donner l'expression de la solution optimale de la méthode de commande DMC.
- 2) Définir les vecteurs Δu_f , Δu_p et y_R .
- 3) Donner les matrices G_f et G_p , et le vecteur Λ_s .
- 4) Calculer la matrice du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$.
- 5) Ecrire la loi de commande résultante $u(k)$? Est-ce que celle-ci représente une loi de commande par rétroaction ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 :

Soit un système décrit par la fonction de transfert discrète suivante :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})}v(k) ;$$

$$\text{avec } A(z^{-1}) = 1 - 0.8z^{-1} ; B(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1} ; C(z^{-1}) = 1$$

On donne : Horizons de prédiction : $N_p = 2$; Horizon de commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 0.5$

- 1) Calculer les polynômes : $Q_i(z^{-1})$, $F_i(z^{-1})$, $G_i(z^{-1})$ et $H_i(z^{-1})$.
- 2) Calculer la matrice du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$.
- 3) Donner l'expression (l'équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.
- 4) Calculer les polynômes : $S(z^{-1})$, $R(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.
- 5) Déterminer le polynôme caractéristique de la boucle fermée $P_c(z^{-1})$.
- 6) Vérifier la stabilité du système en boucle fermée.

Exercice 6 :

Soit un système décrit par la fonction de transfert discrète suivante :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})}v(k)$$

$$\text{avec } A(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1} ; B(z^{-1}) = 1 + z^{-1} ; C(z^{-1}) = 1 - 0.6z^{-1}$$

On donne : Horizons de prédiction : $N_p = 2$; Horizon de commande : $N_u = 2$

Facteur de pondération de la commande : $\lambda = 1$

- 1) Calculer les polynômes : $Q_i(z^{-1})$, $F_i(z^{-1})$, $G_i(z^{-1})$ et $H_i(z^{-1})$.
- 2) Calculer la matrice du gain $G_c = (\lambda I + G_f^T G_f)^{-1} G_f^T$.
- 3) Calculer les polynômes : $S(z^{-1})$, $R(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$.

- 4) Déterminer le polynôme caractéristique de la boucle fermée $P_c(z^{-1})$.
- 5) Vérifier la stabilité du système en boucle fermée.
- 6) Donner l'expression (l'équation de récurrence) de la loi de commande $u(k)$.

Exercice 7 :

Considérons le système du 1^{er} ordre suivant : $y(k+1) = a y(k) + u(k)$

On veut déterminer une loi de commande simple de type MPC pour ce système. L'horizon de prédiction est 2 et l'horizon de commande est 1. Le calcul de la loi de commande est basé sur la minimisation de la fonction objective suivante :

$$J = (y_r(k+1) - \hat{y}(k+1))^2 + \beta (y_r(k+2) - \hat{y}(k+2))^2 ; \quad y_r(k) = r = C^{te} \text{ et } \beta \geq 0$$

- 1) Exprimer les sorties prédites en fonction des commandes futures.
- 2) Résoudre le problème d'optimisation et donner l'expression de la commande $u(k)$.
- 3) Déterminer les pôles du système bouclé pour $\beta = 0$ et $\beta \rightarrow \infty$.

Exercice 8 :

Considérons le système du 1^{er} ordre suivant :

$$y(k+1) = a y(k) + u(k) + d ; \text{ la perturbation est supposée constante.}$$

On veut déterminer une loi de commande simple de type MPC pour ce système en utilisant un modèle de prédiction qui ne dépend pas de la perturbation. L'horizon de prédiction est 2 et l'horizon de commande est 1. Le calcul de la loi de commande est basé sur la minimisation de la fonction objective suivante :

$$J = (y_r(k+1) - \hat{y}(k+1))^2 + \beta (y_r(k+2) - \hat{y}(k+2))^2 ; \quad y_r(k) = r = C^{te} \text{ et } \beta \geq 0$$

- 1) Exprimer les sorties prédites en fonction des incréments des commandes futures.
- 2) Résoudre le problème d'optimisation et donner l'expression de la commande $u(k)$.
- 3) Déterminer les pôles du système bouclé pour $\beta = 0$ et $\beta \rightarrow \infty$.

Exercice 9 :

Soit le modèle d'état suivant :

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_1 d_1$, $y(k) = Cx(k) + d$ où d et d_1 sont deux perturbations constantes. Montrer comment ce modèle peut être transformé à un modèle d'état augmenté ne dépendant pas des perturbations constantes et ayant comme entrée l'incrément de commande $\Delta u(k)$.

Exercice 10 :

On considère le modèle d'état discret suivant :
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

avec l'équation de sortie : $y(k) = -0.7x_1(k) + x_2(k)$.

Déterminer l'expression de la loi de commande prédictive $u(k)$ qui minimise le critère :

$$J = \sum_{i=1}^2 (y_r(k+i) - \hat{y}(k+i))^2 + 0.5 \Delta u(k)^2 .$$

NB : Utiliser les deux approches de la commande prédictive à base d'un modèle d'état.

Exercice 11 :

Soit le modèle d'état :

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k), \quad y(k) = 3x(k)$$

et qui est soumis à la contrainte suivante : $-1 \leq y(k) \leq 2, \quad \forall k$. On considère une commande prédictive (première approche) avec $N_p = 2$ et $N_u = 1$, réécrire alors cette contrainte sous la forme suivante : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c .

Exercice 12 :

Supposons que nous avons les inégalités suivantes dans un problème de commande prédictive ($N_u = 3$) : $-1 \leq u(k) \leq 1$ et $-0.5 \leq \Delta u(k) \leq 0.5$.

Ecrire ces contraintes sous la forme d'une inégalité : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c .

Exercice 13 :

Soit le modèle d'état :

$$x(k+1) = x(k) + 0.5u(k), \quad y(k) = 2x(k)$$

et qui est soumis aux contraintes suivantes : $-1 \leq u(k) \leq 1$, $-0.5 \leq \Delta u(k) \leq 0.5$ et $-2 \leq y(k) \leq 1, \quad \forall k$. On considère une commande prédictive (deuxième approche) avec $N_p = 2$ et $N_u = 2$, réécrire alors ces contraintes sous la forme suivante : $A_c \Delta u_f \leq B_c$. Spécifier A_c et B_c .