

الفصل الثالث : التوزيعات الإحصائية المستمرة

(1) *Ditribution uniforme continue* $U(a, b)$ التوزيع المنتظم المستمر

(2) *Loi exponentielle négative* $e(a)$ التوزيع الأسّي السالب

(3) *Distribution normale* $N(\mu, \sigma^2)$ التوزيع الطبيعي

(4) *loi du chi-carré* χ^2_v توزيع كاي تربيع

(5) *Loi de student* t_v توزيع ستودنت

(6) *Loi de fisher* $F_{v1 v2}$ توزيع فيشر

(1) التوزيع المنتظم المستمر (a,b) Uniforme

متغير عشوائي مستمر X يتوزع بشكل منتظم على مجال $[a, b]$ ، إذا كانت الكثافة الاحتمالية مساوية مع طول المجال : $b - a$

كل الحالات الجزئية المتساوية في الطول داخل المجال $[a, b]$ لها احتمالات متساوية .

مثال : إذا كانت X ، طرارة بين درجتين 120 و 140 دقيقتين .

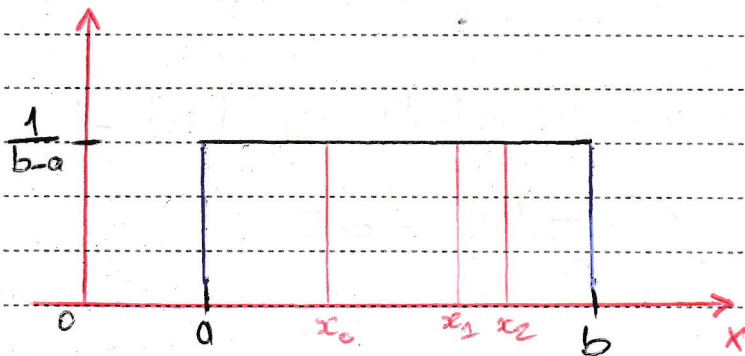
• احتمال X ، طرارة لها مجال بطول 5 دقائق : $[130 - 125]$ ،
متساوي احتمال X ، طرارة أخرى لها مجال بنفس الطول
 5 دقائق : $[135 - 130]$ ، $[125 - 120]$ ، ...

تكون كثافة الرطارة X متساوية على كل منظم درجته
كثافة الاحتمال متساوية :

$$f(x) = \frac{1}{140 - 120} = \frac{1}{20} \quad , \quad 120 \leq x \leq 140$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{أخرى} \end{cases}$$

دالة الكثافة الاحتمالية:



الخصائص:

1. $f(x) \geq 0$

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

2. $\int_a^b f(x) dx = 1$ (مطلوب)

$$F(x_0) = \Pr(X \leq x_0) = \int_a^{x_0} f(x) dx$$

$$= \frac{x}{b-a} \Big|_a^{x_0}$$

دالة التوزيع:

3. $F(x) = \Pr(X \leq x)$

4. $a \leq x_0 \leq b$

$$\Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

5. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

المتوسط الحسابي:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

التباين:

التي هي عبارة عن

$$f(x) = \frac{1}{20} \quad (120 \leq x \leq 140)$$

الحمد لله الذي هدانا لهذا الذي كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله

$$P(x \leq 130) = \frac{x}{20} \Big|_{120}^{130} = \frac{130 - 120}{20} = 0.5$$

135 & 130 Cms. 2 Ball Cms. 1/2 in.

$$Pr(130 \leq X \leq 135) = \frac{X}{20} \Big|_{130}^{135} = \frac{135 - 130}{20} = 0.25$$

$$E(X) = \frac{120 + 140}{2} = 130$$

التوقيع الرباعي :

$$V(x) = \frac{(20)^2}{12} = 33,33$$

: Cylind

التوزيع الأسي $e(x)$ Exponentielle

توزيع احتمالي مستمر ، يملك ثم الظواهر التي تحدث فيها
بطول مجال معين (زمن ، مسافة ، ...)
معدل معين وثابت .

مثال :

- (1) الوقت الذي زعم شخص ما ضربة ، أو الوقت المقام مع وصول شخص ما .
- (2) الوقت الذي زعم لضمرة زبون في بنك ، أو الوقت المقام مع وصول زبون .
- (3) المسافة المقطوعة مع عربة أو كاسيت في طريق سريع .
- (4) عدد الصفحات التي يقرأها مع صفحات مطبوعة في كتاب .

دالة الكثافة الاحتمالية :

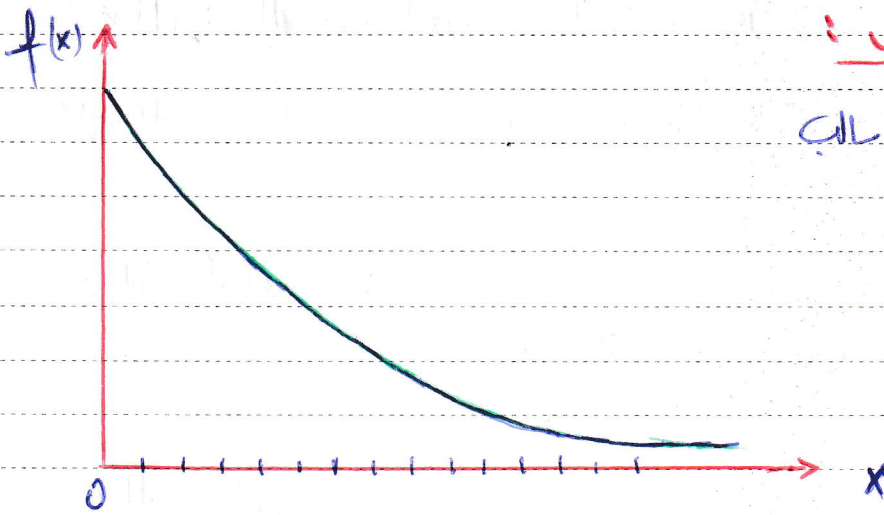
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{x}{\alpha}} & x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{وإلا} \end{cases}$$

حيث $\alpha > 0$ ثابت موجب يعبر عن الطول المتوسط
للحال : الزمن ، المسافة ، ...

$$\frac{1}{\alpha} = \lambda$$

الخصائص الأساسية:

الخصائص الأساسية = أساسيات



الخصائص الأساسية من حيث الخصائص الأساسية:

$$\int_0^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

دالة التوزيع:

دالة التوزيع = Cumulative Distribution Function

$$F(x_0) = \Pr(X \leq x_0) = \int_0^{x_0} f(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^{x_0} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot dx = -e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^{x_0} = -e^{-\frac{x_0}{\lambda}} - (-e^0)$$

$$F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0}{\lambda}} \quad x_0 \geq 0$$

$$\Pr(X \leq 0) = F(0) = 0$$

$$\Pr(X > 0) = 1 - \Pr(X \leq 0) = 1$$

المتوسط الحسابي:

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda^2$$

الخصائص:

مثال: الوقت الذي يستغرقه شخص ما ليقطع 15 كم هو $\text{Exponential}(0,25)$

X الوقت الذي يستغرقه شخص ما ليقطع 15 كم

$$\lambda = 15$$

$$f(x) = \frac{1}{15} \cdot e^{-\frac{x}{15}}$$

$$x > 0$$

دالة الكثافة:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{15}}$$

دالة التوزيع:

- احتمال وقت أقل من 6 دقائق:

$$Pr(X \leq 6) = F(6) = 1 - e^{-\frac{6}{15}} = 0,32967$$

$$Pr(X \leq 18) = F(18) = 1 - e^{-\frac{18}{15}} = 0,6988$$

- احتمال وقت بين 6 و 18 دقائق:

$$Pr(6 \leq X \leq 18) = F(18) - F(6) = 0,36913$$

- احتمال وقت أكبر من 18 دقائق:

$$Pr(X > 18) = 1 - Pr(X \leq 18) = 0,3018$$

$$E(X) = \lambda = 15$$

المتوسط الحسابي:

$$V(X) = \lambda^2 = 15^2$$

التباين:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \quad \text{Exponential } 1 \leftarrow \text{Exponential } 1 \quad \text{Exponential } 0,25 = \frac{1}{4} \leftarrow \text{Exponential } 1$$

$$\text{Exponential } 15 = 60 \times 0,25 =$$

علاقة التوزيع الأسي بتوزيع poisson

توزيع بواسون يصف عدد العناصر أو الأحداث التي تحدث في مجال . التوزيع الأسي يصف وقت لظول المجال مرة ثانية أو ثالثة . ولذلك يربط التوزيع الأسي بتوزيع بواسون كالتالي :

- في توزيع بواسون نعلم عدد العناصر في مجال واحد

- في التوزيع الأسي نعلم بطول المجال الذي يقابل مرة واحد

λ —————> مجال 1	عدد العناصر في المجال λ
$\mu = 1$ —————> x	وقت طول المجال الذي يقابل مرة واحد x

$$\lambda = \frac{1}{x}$$

مثال : عدد السيارات التي تصل إلى محطة الوقود ، من توزيع

بواسون . نعلم $\lambda = 10$ سيارات | ساعة : $f(x) = \frac{10^x \cdot e^{-10}}{x!}$

دالة المجال : دالة المجال

الوقت الذي لا يصل سيارة (الوقت الفاصل بين سيارات) :

$$x = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ ساعة للسيارة}$$

أو :

$$b = 60 \times 0,1 = 6 \text{ دقائق للسيارة}$$

الوقت الذي لا يصل سيارة ، من توزيع أسي :

$$f(x) = \frac{1}{0,1} \cdot e^{-\frac{x}{0,1}} = 10 \cdot e^{-10x} \quad \text{دالة الكثافة :}$$

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad \text{دالة الكثافة للتوزيع الأسي :}$$

(3) التوزيع الطبيعي La Distribution Normale $N(\mu, \sigma)$

توزيع! صالح... من أكثر التوزيعات استخداما في
الطول، الوزن، ضغط الدم، درجات الحرارة... (معدل، المتوسط)
الزمن، درجات الحرارة... (معدل، المتوسط)
في كثير من الحالات (مثل الطول)

دالة الكثافة الاحتمالية: Fonction de densité de probabilité:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$x \in]-\infty, +\infty[$$

أو μ المتوسط
 σ الانحراف المعياري
 $e = 2.718$ ، $\pi = 3.14$

وكتب: $X \sim N(\mu, \sigma)$ X متغير عشوائي

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

المتوقع الرياضي:

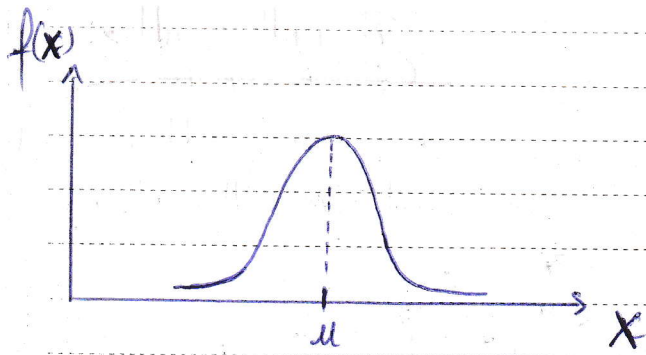
$$\sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) \cdot dx$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

التوزيع الطبيعي :

التوزيع الطبيعي له شكل جرس

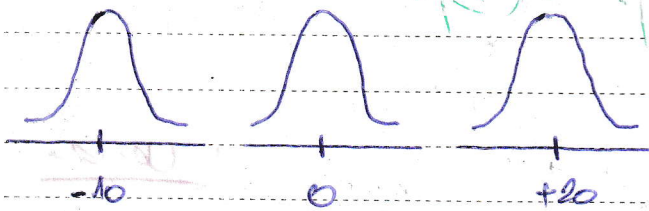


مع $\mu = M_e = M_o$: التوزيع الطبيعي

التوزيع متماثل : $f(-a) = f(a)$

التوزيع له معلمة μ : المتوسط

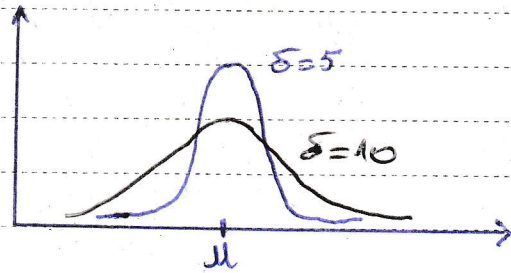
مع σ : الانحراف المعياري



التوزيع الطبيعي له معلمة σ : الانحراف المعياري

كلما كانت أكبر كلما أصبح التوزيع متسطحاً

التوزيع الطبيعي له معلمة μ : المتوسط



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

كل التوزيعات

التوزيع الطبيعي له معلمة μ : المتوسط

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = Pr(X \leq a)$$

La fonction de répartition

دالة التوزيع

دالة التوزيع هي حاصل التجميع أو عدد من القيم : مثال

دالة التوزيع هي التجميع : مثال

$$F(a) = \Pr(X \leq a)$$

مثال : X هي عدد أو مجموع قيم : مثال

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

مثال : دالة التوزيع

مثال : دالة التوزيع

خاصية دالة التوزيع :

1°) $0 \leq F(a) \leq 1$: القيمة بين 0 و 1

2°) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 0 = 1$: القيمة بين 0 و 1

مثال : a, b : القيمة بين 0 و 1

$$\begin{aligned} 3°) \Pr(a \leq X \leq b) &= \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \\ &= F(b) - F(a) = \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a) \end{aligned}$$

مثال : دالة التوزيع

$$4°) \Pr(X = a) = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = \Pr(X \leq a) - \Pr(X \leq a) = 0$$

الخاصات الأساسية : دالة الكثافة

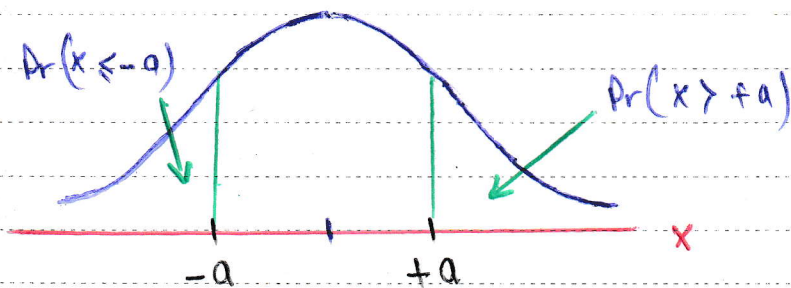
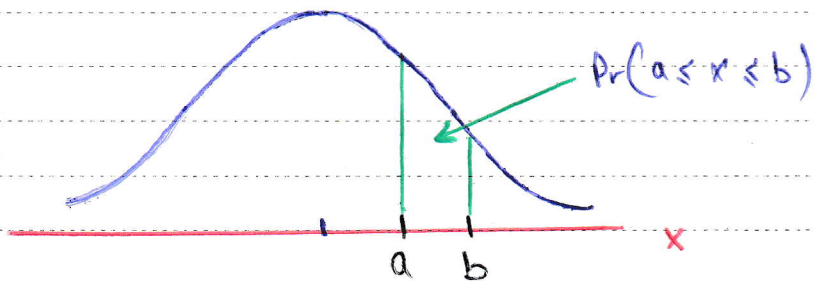
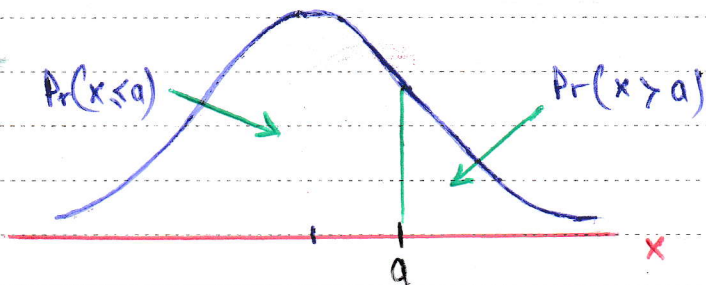
$$1^o) \Pr(X \leq a) + \Pr(X > a) = 1$$

$$2^o) \Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a)$$

$$3^o) \Pr(X \leq -a) = \Pr(X > +a) \\ = 1 - \Pr(X \leq +a)$$

$$4^o) \Pr(X = a) = 0$$

$$5^o) \Pr(X < a) = \Pr(X \leq a)$$



تجميع التوزيع الطبيعي :

تحت $X_1, X_2, \dots, X_m$: X_i

متغيرات عشوائية مستقلة X_i التوزيع الطبيعي :

μ_i : متوسط X_i

$i = 1, 2, \dots, m$

σ_i^2 : X_i التباين

$Y = \sum_{i=1}^m X_i$: المتغير العشوائي

توزيع التوزيع الطبيعي :

$\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$: متوسط Y

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$: Y التباين

مثال :

$X_1 \begin{cases} \mu_1 = 10 \\ \sigma_1^2 = 4 \end{cases}$ $X_2 \begin{cases} \mu_2 = 8 \\ \sigma_2^2 = 2 \end{cases}$: متغيرات عشوائية مستقلة

المتغير $Y = X_1 + X_2$: توزيع التوزيع الطبيعي :

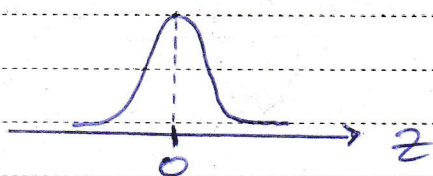
$Y \begin{cases} \mu = 18 \\ \sigma^2 = 16 + 4 = 20 \end{cases}$

la loi normale centrée réduite

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2}$$



التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كانت X متغيراً طبيعياً

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

فإن Z متغيراً طبيعيّاً معيارياً

حيث $0 \leq P(Z \leq 1) \leq 1$

والدالة هي:

$$z \in]-\infty, +\infty[$$

احتمال التوزيع

احتمال التوزيع الطبيعي المعياري هو:

$$P_1(Z \leq a) + P_1(Z > a) = 1$$

$$P_1(a \leq Z \leq b) = P_1(Z \leq b) - P_1(Z \leq a)$$

$$P_1(Z \leq -a) = P_1(Z > +a)$$

$$P_1(Z = b) = 0$$

$$P_1(Z < b) = P_1(Z \leq b)$$

$$X \sim N(10, 2)$$

مثال : X من أجل $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 2$

1) احتمال X أقل من 15 :

$$1) P_1(X < 15) = P_1\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{15 - 10}{\sqrt{2}}\right) = P_1(Z < 2.5) = 0.9938$$

2) احتمال X أكبر من 15 :

$$2) P_1(X > 15) = P_1\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{15 - 10}{\sqrt{2}}\right) = P_1(Z > 2.5) \\ = 1 - P_1(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

3) احتمال X أقل من 5 :

$$3) P_1(X < 5) = P_1\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5 - 10}{\sqrt{2}}\right) = P_1(Z < -2.5) = 0.0062$$

4) احتمال X بين 8 و 12 :

$$4) P_1(8 < X < 12) = P_1\left(\frac{8 - 10}{\sqrt{2}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{12 - 10}{\sqrt{2}}\right) \\ = P_1(-1 < Z < 1) = P_1(Z < 1) - P_1(Z < -1) \\ = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

$$3) P_1(Z < -2.5) = P_1(Z > 2.5) = 1 - P_1(Z < 2.5) = 0.0062$$

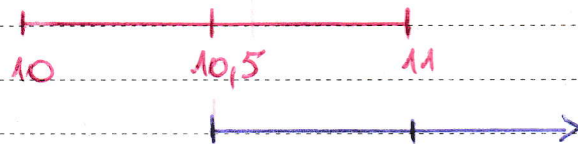
$$4) P_1(Z < -1) = P_1(Z > 1) = 1 - P_1(Z < 1) = 1 - 0.8413 \\ = 0.1587$$

$$P_1(X > 10) = P_1(X \geq 11)$$

(2)

$$\begin{aligned} P_1(X > 10,5) &= P_1\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{10,5 - 14,4}{2,94}\right) \\ &= P_1(Z > -1,326) = 1 - P_1(Z \leq -1,326) \\ &= 1 - 0,0934 = 0,9066 \end{aligned}$$

نوع التوزيع: 0,5

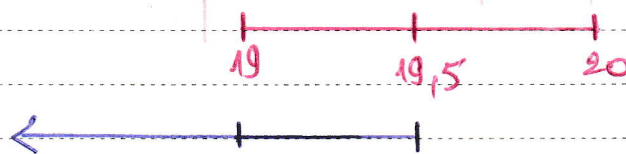


$$P_1(X \leq 20) = P_1(X \leq 19)$$

(3)

$$\begin{aligned} P_1(X \leq 19,5) &= P_1\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{19,5 - 14,4}{2,94}\right) \\ &= P_1(Z \leq 1,734) = 0,9582 \end{aligned}$$

نوع التوزيع: 0,5



$$P_1(X \leq 20) = 0,9808$$

Normale

$$P_1(X = 20) = C_{36}^{20} 0,4^{20} 0,6^{16} = 0,0226$$

Binomiale

$$P_1(X \leq 20) - P_1(X = 20) = 0,9808 - 0,0226 = 0,9582 = P_1(X < 20)$$

Normale

$$\begin{aligned} P_1(X = 20) &= P_1(19,5 \leq X \leq 20,5) = P_1\left(\frac{19,5 - 14,4}{2,94} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{20,5 - 14,4}{2,94}\right) \\ &= P_1(1,736 \leq Z \leq 2,074) \\ &= 0,9808 - 0,9582 = 0,0226 \end{aligned}$$