Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d’Informatique

Rappel calcul matriciel

M1 SIAD & ILM

Définitions, notations

Les matrices sont un outil de calcul et de représentation des applications linéaires.

- Une **matrice de format (n,m)** est un tableau rectangulaire de nxm **éléments**, rangés en n **lignes** et m **colonnes.**

- On utilise aussi la notation $n \times m$ pour le format. Lorsque m = n, on dit plutôt : **matrice carrée** d'ordre **n**. Si n = 1, on parle de **matrice-ligne** d'ordre **m**, et si m = 1, on parle de **matrice-colonne** d'ordre **n**.

Définitions, notations

- Les éléments sont nommés en utilisant deux indices, le premier est **l'indice de ligne**, le second est **l'indice de colonne**. On note alors, par exemple : $\mathbf{A = [a_{i,j}]}$.

- Deux matrices de même format, $[a_{i,j}]$ et $[b_{i,j}]$, sont **égales** ssi : $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout couple (i, j).

Opérations/ Transposition

. La **transposée** d'une matrice $A = [a_{i,j}]$ est la matrice $\mathbf{A^t = [a_{j,i}]}$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

- Si A est de format (n, m), alors A^t est de format (m, n). En particulier, si A est carrée d'ordre n, alors A^t a le même format.

- La transposée d'une matrice-colonne est une matrice-ligne, et réciproquement.

Opérations/ Transposition

. $(A^t)^t = A$ pour toute matrice A.

- $\det(A^t) = \det(A)$

- Une matrice carrée A est dite ***symétrique*** si elle vérifie : $\mathbf{A^t = A}$.

Opérations/ Produit par un nombre

- Le **produit** d'une matrice $A = [a_{i,j}]$ par le nombre λ est la matrice : $\lambda A = [\lambda a_{i,j}]$. On dit aussi que λA est le produit de A par le scalaire λ.

- Pour chaque format (n, m), on note $0_{n,m}$ la matrice nulle, dont tous les éléments sont nuls. Si le format est sous-entendu, on la note simplement 0.

Opérations/ Produit par un nombre

- **Propriétés**

- Les matrices A et λA ont toujours le même format. De plus : $\lambda(A^t) = (\lambda A)^t$.

- Pour toute matrice A et tous scalaires λ et μ, on a : $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A$.

- Si $\lambda = 1$, on a bien entendu : $1 A = A$, et si $\lambda = 0$, on obtient la matrice nulle.

- Le produit λA n'est nul que si l'un des facteurs est nul : $\lambda A = 0$ si est seulement si $\lambda = 0$ ou $A = 0$.

Opérations/ Somme

- La somme de deux matrices de même format est définie par : $[a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}]$.

- **Propriétés** Pour A, B, C de même format, et des scalaires λ, μ :

  - **A + (B + C) = (A + B) + C** (la somme est associative)
  - A + B = B + A (la somme est commutative)
  - **A + 0 = 0 + A = A** (la matrice 0 est l'élément neutre)
  - Toute matrice admet une opposée, **−A = (−1) A**

Opérations/ Somme

- $\boldsymbol{\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B}$, et $\boldsymbol{(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A}$ (le produit par un scalaire est distributif par rapport à la somme des matrices et par rapport à la somme des scalaires)

- $\boldsymbol{(A + B)^t = A^t + B^t}$ (la transposée d'une somme est la somme des transposées)

Opérations/ Produit de deux matrices

- Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Si A est de format (n, m), et si B est de format (m, p), le produit C = AB est la matrice de format (n, p) définie par : chaque élément $c_{i,j}$ de C est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. Autrement dit
-
- si $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$, alors, pour tout (i, j) :

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,m}b_{m,j} .$$

Opérations/ Produit de deux matrices

Propriétés Pour A, B, C (telles que les produits existent), et des scalaires λ, μ :

- **A(BC) = (AB)C**. (le produit est associatif)
- **AB ≠ BA** en général. (le produit n'est pas commutatif)
- **A0 = 0** et **0A = 0** (chaque matrice nulle est un élément absorbant)
- **λ(AB) = (λA)B = A(λB**) (associativité généralisée)

Opérations/ Produit de deux matrices

Propriétés

- **$(AB)^t = B^tA^t$**
- **$A(B + C) = AB + AC$** et **$(A + B)C = AC + BC$** (le produit est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme)
- Le produit **AB** peut être **nul** avec **$A \neq 0$** et **$B \neq 0$**.
- **$AC = BC$ n'implique pas** nécessairement **$A = B$** (l'hypothèse équivaut à $(A - B)C = 0$))

Matrices carrées

- Pour deux matrices carrées de même ordre A et B, la somme A + B et les produits AB et BA existent toujours (on n’a plus à se soucier des conditions d’existence). Toutes les propriétés vues ci-dessus sont encore vraies, et le calcul matriciel ressemble beaucoup au calcul algébrique ordinaire, à l’exceptions près : **le produit n’est pas commutatif**,

Matrices carrées/Matrices identités

- On appelle matrice identité d'ordre n la matrice notée I_n définie par : $I_n = [\delta_{i,j}]$, avec : $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.
- Autrement dit, I_n n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Si l'ordre est implicite, on la note simplement I.
- **Exemple :** $\mathbf{I_3} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

Matrices carrées/Matrices identités

- **Propriétés**

- La matrice I_n est élément neutre du produit des matrices carrées d'ordre n : pour toute matrice carrée A d'ordre n, $A\, I_n = I_n\, A = A$.

- Plus généralement, pour toute matrice A de format (n, p) : $I_n\, A = A$, et, pour toute matrice B de format (m, n) : $B\, I_n = B$.

Matrices carrées/Matrices inverses

- On dit qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B (de même format) telle que : $A\,B = B\,A = I$.
- B est alors appelée l'inverse de A , et est notée $\mathbf{A^{-1}}$.
- **Propriétés**

- Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

- $(A^{-1})^{-1} = A$, autrement dit, A^{-1} est inversible, d'inverse A.

- Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Si A est inversible, alors A^t l'est aussi, et : $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Matrices carrées/Matrices inverses

- **Théorème1.** Soit A une matrice carrée d'ordre n, et soient X et B deux matrices-colonnes d'ordre n. Si A est inversible, alors le système $AX = B$ admet une solution unique, donnée par : $X = A^{-1}B$, quelle que soit la matrice-colonne B .

Matrices carrées/Matrices inverses

- Réciproquement, si le système $AX = B$ n'admet qu'une seule solution, pour une matrice-colonne quelconque B, alors A est inversible (et la solution est $X = A^{-1}B$).

- On en déduit une méthode pratique pour calculer l'inverse d'une matrice, en résolvant un système d'équations.

Matrices carrées/Matrices triangulaires et diagonales

- La ***diagonale*** d'une matrice $[a_{i,j}]$ est l'ensemble des éléments $\mathbf{a_{i,i}}$.

- Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ est **triangulaire supérieure** si tous les éléments en-dessous de la diagonale sont nuls : $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

- Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ est **triangulaire inférieure** si tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls : $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$.

Matrices carrées/Matrices triangulaires et diagonales

- Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ est diagonale si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls : $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. (elle est donc à la fois triangulaire supérieure et inférieure).

- Exemple: $A = \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$ est triangulaire supérieure

$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix}$ est triangulaire inférieure

Matrices carrées/Matrices triangulaires et diagonales

- et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonale.

- **Propriétés**

  Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale A est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, $det(I_n) = 1$.

Matrices carrées/Valeurs propres et vecteurs propres

Soit $A \in Mn(K)$ une matrice carrée. Un vecteur $x \in Kn$, $x \neq 0$ est un vecteur propre, et $\lambda \in K$ est une valeur propre, si **$Ax = \lambda x$.**

Matrices carrées/ Polynôme caractéristique

- Le polynôme caractéristique d’une matrice carrée A $\in M_n(K)$, notée P_A ou juste P, est le polynôme de degré n défini par $\mathbf{P_A (z) = det (A - z I_n)}$.
- **Remarques :**

  - Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

  - Si x est un vecteur propre alors tout multiple *kx* l'est aussi.

Matrices carrées/ Polynôme caractéristique

- **λ est valeur propre de A si et seulement si PA (λ) = 0.**

- **Remarque :** Il est possible que p(λ) possède une racine de multiplicité supérieure à 1. Dans ce cas, il est possible que plusieurs vecteurs propres soient associés à cette valeur propre.

Matrices carrées/ Diagonaliser une matrice

- Supposons que la matrice A de taille n × n. Si λ est une valeur propre de A alors il y a deux points de vue :

  - Géométrique : il existe des vecteurs non nuls tels que A**x = λx.**

  - Algébrique : **det (A – λI) = 0**.

- Ceci correspond à deux nombres :

  - Multiplicité géométrique (MG) : le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés `a *λ*.

  - Multiplicité algébrique (MA) : la multiplicité de *λ* *comme racine du polynôme caractéristique p(λ).*

Matrices carrées/ Diagonaliser une matrice

- Pour chaque valeur propre d'une matrice on a MG ≤ MA. Si MG < *MA alors la matrice n'est pas diagonalisable.*

- Supposons que la matrice *A de taille n × n possède n vecteurs propres linéairement indépendants* ***x1, x2, . . . , xn et soit S =[x1 x2 · · · xn]. On a alors :***

- $S^{-1}AS = \Lambda :=$ $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Matrices carrées/ Diagonaliser une matrice

- où *$\lambda 1, \ldots, \lambda n$ sont les valeurs propres de A.*
- Ce théorème affirme que la matrice A peut être diagonalisée si ses vecteurs propres sont linéairement indépendants.

- Des vecteurs propres **x1, x2, . . . , xk d'une matrice qui correspondent à des valeurs propres distinctes (non égales) λ1, λ2, . . . , λk sont linéairement indépendants.**