سلسلة 5

تمرين 1

ليكن التوزيع المعرف بالدالة : $f(x) = {}^{1}/_{60}$

إذا كان $20 \leq x \leq 80$

1°) بين أن f(x) دالة كثافة إحتمالية ، و أرسم المنحنى البياني .

2°) أحسب التوقع الرياضي و التباين .

3°) أحسب الإحتمالات : $pr(x > 65)$ $pr(x \leq 50)$ $pr(x = 70)$

تمرين 2

لتكن دالة كثافة التوزيع المنتظم : $f(x) = {}^{1}/_{2}$

إذاكان $a \leq x \leq b$

1°) إذا علمت أن $\mu = 3$, أوجد a , b

2°) أوجد التباين .

تمرين 3

في بنك تقدم الخدمة بمعدل 0.2 ساعة (12 دقيقة) للزبون , x متغير عشوائي أسي يمثل زمن خدمة زبون .

1°) أوجد دالة الكثافة الإحتمالية .

2°) أوجد دالة التوزيع .

3°) أحسب إحتمال زمن الخدمة أقل أو يساوي 15 دقيقة . 4°) أقل أو يساوي 30 دقيقة .

5°) محصور بين 12 و 30 دقيقة .

تمرين 4

مدة صلاحية مصابيح كهربائية بالأيام متغير أسي x , بمتوسط α يوم .

1°) إذا علمت أن $pr(x > 60) = 0.36788$, أوجد α .

2°) أحسب إحتمال $pr(30 \leq x \leq 60)$

3°) إذا كان $pr(x > b) = 0.22313$, أوجد b .

تمرين 5

كتاب مكون من 300 صفحة ,و به 600 خطأ مطبعي.عدد الصفحات التي تفصل بين خطأين متغير أسي .

1°) أوجد دالة الكثافة الإحتمالية بإستخدام λ معلمة poisson .

2°) أوجد دالة التوزيع .

3°) ماهو إحتمال أن تفصل بين خطأين أكثر من ثلاثة أرباع الصفحة .

4°) ماهو إحتمال أن تفصل بين خطأين , مابين ربع صفحة و صفحة واحدة .

تمرين 6

أثناء فحص إنجاز طريق تؤخذ مسافات عشوائية , ويتم حساب إحتمالين :

_الإحتمال الأول : إحتمال مسافة عيب واحد أقل أو تساوي 10 كم .

_الإحتمال الثاني : إحتمال مسافة عيب واحد محصورة بين 10 و 20 كم .

إذا كان الإحتمال الأول اكبر من الإحتمال الثاني يرفض الإنجاز .

_ إذا علمت أن طول الطريق 6000 كم و به 500 عيب , هل يرفض أم يقبل الإنجاز .

تمرين 7

في مصلحة يصل المرضى بمعدل 15 في الساعة , ويتم في العادة فحص 15 في الساعة ، بحيث لا يوجد إنتظار .

1°) ماهو إحتمال وجود شخص في الإنتظار .

2°) ماهو إحتمال أن ينتظر شخص بين 4 دقائق و 10 دقائق .

3°) أوجد التوقع الرياضي و التباين .

تمرين 8

في معبر حدودي يصل المسافرون بمعدل 4 في الساعة , ويتم التفتيش بمعدل 4 في الساعة , بحيث لايوجد طابور (إنتظار) .

_ماهو إحتمال وجود طابور , إستخدم توزيعين : exponentielle , poisson

1) تعريف

$f(x) = \frac{1}{60}$ $\quad 20 \leq x \leq 80$: الدالة المعرفة على المجال

1) حساب التوقع الرياضياتي : $E(X)$

$$\int_{20}^{80} f(x)\,dx = \int_{20}^{80} \frac{1}{60}\,dx = \frac{x}{60}\Big|_{20}^{80}$$

$$= \frac{80 - 20}{60} = \frac{60}{60} = 1$$

2) حساب التوقع : $E(X)$

$$E(X) = \int_{20}^{80} x \cdot f(x)\,dx = \int_{20}^{80} \frac{x}{60}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2 \cdot 60}\Big|_{20}^{80} = \frac{80^2 - 20^2}{2 \cdot 60} = \frac{6000}{2 \cdot 60} = \frac{100}{2} = 50 \qquad \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

3) حساب التباين : $V(X)$

$$V(X) = \int_{20}^{80} (x-50)^2 f(x)\,dx = \int_{20}^{80} \frac{(x-50)^2}{60}\,dx$$

$$= \frac{(x-50)^3}{3 \cdot 60}\Big|_{20}^{80} = \frac{(80-50)^3 - (20-50)^3}{3 \cdot 60} = \frac{54000}{3 \cdot 60} = 300$$

$$\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

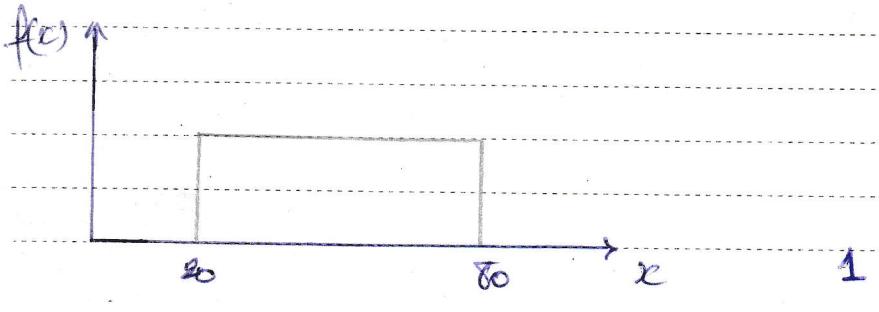
3) حساب الاحتمال :

$$P_r(X = 70) = \int_{70}^{70} \frac{1}{60}\,dx = \frac{x}{60}\Big|_{70}^{70} = 0$$

$$P_r(X \leq 50) = \int_{20}^{50} \frac{1}{60}\,dx = \frac{x}{60}\Big|_{20}^{50} = \frac{50 - 20}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$P_r(X > 65) = \int_{65}^{80} \frac{1}{60}\,dx = \frac{x}{60}\Big|_{65}^{80} = \frac{80 - 65}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

المنحنى البياني :



تمرين 2

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & a\le x\le b \quad \text{ailleurs} \\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

1) نبين أن: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{2}\,dx = 1$

$$\frac{x}{2}\Big|_a^b = \frac{b-a}{2} = 1$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = 3$$

$$\frac{b-a}{2} = 1 \Rightarrow b-a = 2$$

$$\frac{a+b}{2} = 3 \Rightarrow a+b = 6$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$a = 2$$

2) حساب: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

تمرين 3

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{-x}{\alpha}}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} \cdot e^{\frac{-x}{12}}$$

: الدالة الأصلية لـ f هي F_1

$\alpha = 12$: لدينا

$x \in [0, +\infty[$

$F(x) = Pr(X \leq x)$: الدالة الأصلية لـ f هي F_2

$$F(x) = \int_0^x f(x).dx = \int_0^x \frac{1}{12} \cdot e^{-\frac{x}{12}} \cdot dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{12}} \Big|_0^x = -e^{-\frac{x}{12}} - (-e^0) = 1 - e^{-\frac{x}{12}}$$

: 15 دقيقة هي X احتمال أن F_3

$$Pr(X \leq 15) = 1 - e^{-\frac{15}{12}} = 0,713495$$

: 30 دقيقة هي X احتمال أن F_4

$$Pr(X \leq 30) = 1 - e^{-\frac{30}{12}} = 0,917915$$

: 30 و 12 بين X احتمال أن F_5

$$Pr(12 \leq X \leq 30) = F(30) - F(12)$$

$$= 1 - e^{-\frac{30}{12}} - \left(1 - e^{-\frac{12}{12}}\right) = e^{-1} - e^{-\frac{30}{12}}$$

$$= 0,285794$$

4 تمرين

$Pr(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}$: X قانون أسي

$x \in [0, +\infty[$

$Pr(X > 60) = 0,36788$: نحسب α (1

$Pr(X > 60) = 1 - Pr(X \leq 60) = 1 - 1 + e^{\frac{-60}{\alpha}}$

$e^{\frac{-60}{\alpha}} = 0,36788 \Rightarrow \ln e^{\frac{-60}{\alpha}} = \ln 0,36788$

$\Rightarrow \frac{-60}{\alpha} = \ln 0,36788 \Rightarrow \alpha = \frac{-60}{\ln 0,36788} = 60,00$

$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{60}}$: الدالة المطلوبة $\alpha = 60$

$Pr(30 \leq X \leq 60) = F(60) - F(30)$: نحسب (2

$= 1 - e^{\frac{-60}{60}} - 1 + e^{\frac{-30}{60}} = e^{-0,5} - e^{-1} = 0,23865$

$Pr(X > b) = 0,22313$: نحسب (3

$Pr(X > b) = 1 - Pr(X \leq b) = 1 - 1 + e^{\frac{-b}{60}}$

$e^{\frac{-b}{60}} = 0,22313 \Rightarrow \ln e^{\frac{-b}{60}} = \ln 0,22313$

$\Rightarrow \frac{-b}{60} = \ln 0,22313 \Rightarrow b = -60 \times \ln 0,22313$

$b = 90,00$

تمرين 5

- معدل الوفاة في الساعة : 600 في 600 ساعة ← 300 في 300 ساعة ← 1 في 1 ساعة

$$\lambda = \frac{600}{300} = 2$$

1) دالة الكثافة الاحتمالية لـ X بمعلم λ : $\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}}$

$$f(x) = \lambda . e^{-\lambda x} = 2 . e^{-2x} \qquad x \in [0, +\infty[$$

2) دالة التوزيع :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda . x} = 1 - e^{-2.x}$$

3) احتمال أن تعطل آلة من 4 آلات بعد $\frac{3}{4}$ ساعة :

$$Pr(X > 0,75) = 1 - Pr(X \leq 0,75) = 1 - 1 + e^{-2(0,75)} = e^{-1,5} = 0,223130$$

4) احتمال أن تعطل آلة بين الساعة 1 والساعة $\frac{1}{4}$:

$$Pr(0,25 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0,25) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-2(0,25)} = e^{-0,5} - e^{-2} = 0,471195$$

تمرين 6

- إيجاد العدد α :

6000	500
α	1

$$\alpha = \frac{6000}{500} = 12$$

- دالة التوزيع :

X متغير عشوائي يمثل المسافة التي تفصل بين سيارتين ، ومنه متغير أسي :

$$\Pr(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{12}} \qquad x \in [0, +\infty[$$

- الاحتمال الأول :

$$\Pr(X \leq 10) = 1 - e^{-\frac{10}{12}} = 0{,}565401$$

- الاحتمال الثاني :

$$\Pr(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10)$$
$$= 1 - e^{-\frac{20}{12}} - 1 + e^{-\frac{10}{12}} = e^{-\frac{10}{12}} - e^{-\frac{20}{12}}$$
$$= 0{,}245722$$

- الاحتمال الأول أكبر من الثاني ، لأن المسافة أقرب .

تمرين 7

إيجاد الوسط :

60 دقيقة ← 15 عميل

α دقيقة ← 1 عميل

$$\alpha = \frac{60}{15} = 4$$

دالة التوزيع : زمن الفحص يتبع قانون أسي :

$$Pr(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$$

$$x \in [0, +\infty[$$

1°) احتمال وجود عميل في الانتظار :

عميل في الانتظار ، إذا كان زمن فحص العميل السابق أكبر من 4 دقائق :

احتمال فحص عميل في زمن أكبر من 4 :

$$Pr(X > 4) = 1 - Pr(X \leq 4) = 1 - 1 + e^{-\frac{4}{4}} = 0,367879$$

2°) احتمال أن ينتظر عميل بين 4 و 10 دقائق :

احتمال فحص عميل في زمن بين 4 و 10 :

$$Pr(4 \leq X \leq 10) = F(10) - F(4)$$

$$= 1 - e^{-\frac{10}{4}} - 1 + e^{-\frac{4}{4}} = e^{-1} - e^{-\frac{10}{4}} = 0,285794$$

3°) الأمل الرياضي ، التباين :

$$E(X) = \alpha = 4$$

$$V(X) = \alpha^2 = 4^2$$

تمرين 8

- توزيع Poisson :

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$f(x) = \frac{4^x \cdot e^{-4}}{x!}$$

معدل الوصول $\lambda = 4$

$x = 0, 1, 2 \ldots\ldots$

احتمال وجود طابور = احتمال وصول أكثر من 4 أشخاص في الساعة :

$$Pr(X > 4) = 1 - Pr(X \leq 4) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) - f(3) - f(4)$$

$$= 1 - e^{-4} - 4.e^{-4} - \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2} - \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{6} - \frac{4^4 \cdot e^{-4}}{24}$$

$$= 1 - e^{-4}\left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3}\right)$$

$$= 1 - e^{-4} \cdot \frac{103}{3} = 0,3711163$$

- توزيع Exponentielle :

المعطيات : معدل الخدمة : λ

ساعة 60 = دقيقة 1 ⟵ 4

x ⟵ 1

$$\lambda = \frac{60}{4} = 15 \text{ دقيقة}$$

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\lambda}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{15}}$$

$x \in [0, +\infty[$

احتمال وجود طابور = احتمال خدمة أكثر من 15 دقيقة :

$$Pr(X > 15) = 1 - Pr(X \leq 15) = 1 - 1 + e^{\frac{-15}{15}}$$

$$= 0,367879$$