Laboratoire de Physique Théorique

Notes de Cours

Mécanique Quantique RELATIVISTE

Salah Haouat

Master 1 Physique Théorique

2022/2023

Table des matières

Chapitre 1

Rappel

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions nécessaires pour développer un cours de mécanique quantique relativiste. En premier lieu nous rappelons succinctement quelques notions de la relativité restreinte. Nous allons introduire la formulation covariante de la relativité restreinte qui permet de traiter les problèmes relativistes d'une façon particulièrement aisée. Ensuite nous montrons comment dériver, à partir du principe de correspondance, l'équation de Schrödinger et l'équation de continuité correspondante qui permet l'interprétation probabiliste à la fonction d'onde.

1.1 Transformation de Lorentz et espace de Minkowski

1.1.1 Transformation de Lorentz

Selon le principe de la relativité restreinte, les lois de la nature doivent être invariantes lors d'une transformation d'un référentiel inertiel à un autre. De point de vue mathématique ceci s'incarne dans l'invariance des lois physiques sous la transformation de Lorentz.

Tout événement est, dans un référentiel donné $\mathcal{R}$, décrit par sa position (3 coordonnées spatiales ; x, y, z) et le temps où il se produit (une coordonnée temporelle ; t).

Dans un référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ le long de l'axe (ox) par rapport à $\mathcal{R}$, nous avons les transformations de Lorentz standard

$$\begin{cases} ct' = \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' = \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{1.1}$$

où β et γ sont donnés par

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sous forme matricielle cette transformation peut s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Norme invariante et espace de Minkowski

Il est bien claire que, sous cette transformation, la longueur $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ n'est pas conservée

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq x^2 + y^2 + z^2.$$

La quantité conservée (invariante sous la transformation de Lorentz) est

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

ce qui nous incite à penser à l'unification de l'espace et du temps en une variété d'espace-temps à quatre dimensions, c'est l'espace de Minkowski. Dans une base *orthonormée* $\hat{\boldsymbol{e}}_\mu$, avec $\mu = 0, 1, 2, 3$, nous définissons le *quadri-vecteur* $\boldsymbol{x} = x^\mu \hat{\boldsymbol{e}}_\mu$, où

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Les composantes x^μ sont dites **composantes contravariantes** du quadrivecteur $\boldsymbol{x}$. La *norme* invariante

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

est définie par la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{1.3}$$

où $\eta_{00} = 1$ et $\eta_{ii} = -1$, avec $i = 1, 2, 3$. Les éléments $\eta_{\mu\nu}$ avec $\mu \neq \nu$ sont nuls. Formellement nous écrivons

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Evidemment, cette métrique ne reporduit pas une norme définie positive. Un vecteur est dit de genre lumière si sa norme est nulle. Il est de genre temps si $\|\boldsymbol{x}\|^2 > 0$ et de genre espace si $\|\boldsymbol{x}\|^2 < 0$.
Il est à noter que le positionnement des indices n'est pas arbitraire, une fois que nous avons adobté la convention que les coordonnées contravariantes sont notées avec un indice en haut. Nous donnons à l'indice en haut le nom d'indice contravariant et à l'indice inférieur le nom d'indice covariant. L'équation (1.3) montre que la somme porte sur des indices répétés, une fois contravariant et une fois covariant. **C'est toujours le cas ; un indice répété, une fois contravariant et une fois covariant, dans un même terme sera toujours sommé**. Nous avons donc la convention de sommation d'Einstein, avec laquelle nous laissons tomber le symbole de somme et nous écrivons simplement

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \tag{1.4}$$

Par la suite, cette convention de sommation sur les indices répétés sera utilisée. Ca va alléger considérablement nos équations. Avec cette notation la transformation de Lorentz s'écrit

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.5}$$

où les éléments $\Lambda^\mu{}_\nu$ sont les éléments de la matrice

$$[\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Sous forme matricielle l'équation (1.5) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

1.1.3 Composantes covariantes

Nous definissons les composantes **covariantes** par

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \tag{1.8}$$

Pour l'espace-temps de Minkowski, nous avons $x_0 = x^0$ et $x_i = -x^i$ avec $i = 1, 2, 3$. D'un point de vue purement technique, l'interprétation de la relation (1.8) est claire ; l'application de la métrique avec les indices en bas transforme une coordonnée contravariante (indice haut) en une coordonnée covariante (indice bas). Le passage des coordonnées covariantes aux coordonnées contravariante se fait par l'introduction de la métrique $\eta^{\mu\nu}$, avec les indices en haut, où la matrice $[\eta^{\mu\nu}]$ est l'inverse de la matrice $[\eta_{\mu\nu}]$

$$[\eta^{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \tag{1.9}$$

Cela nous conduit à la régle d'abaissement et d'élevation d'indices à l'aide de la métrique ; voir la section tenseurs. La métrique vérifie alors la propriété

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu \tag{1.10}$$

où $\delta^\mu{}_\nu$ est le symbole de Kronecker

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{pour} \quad \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.11}$$

L'écriture du produit scalaire peut être rendue plus compacte encore en introduisant les coordonnées covariantes. La norme définie dans (1.3) s'écrit alors

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = x^\mu x_\mu \tag{1.12}$$

Comme la norme est invariante sous la transformation de Lorentz, nous pouvons écrire

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu = x^\nu x_\nu \tag{1.13}$$

Notons ici que le nom de l'indice muet n'a aucune importance dans l'écriture. En remplaçant x'^μ par sa loi de transformation, nous obtenons

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu x'_\mu = x^\nu x_\nu \Rightarrow x_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$$

D'où nous tirons la loi de transformation des composantes covariante

$$x'_\mu = \Lambda^\alpha{}_\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu x'_\alpha = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \Lambda^\alpha{}_\nu x'_\alpha = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu x_\nu$$

Nous avons alors

$$x'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu x_\nu \tag{1.14}$$

Notons que la forme matricielle de la dernière équation s'écrit

$$\mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T \mathbf{\Lambda}^{-1}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^T &= \begin{pmatrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}^T &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda^{-1})^0{}_0 & (\Lambda^{-1})^0{}_1 & (\Lambda^{-1})^0{}_2 & (\Lambda^{-1})^0{}_3 \\ (\Lambda^{-1})^1{}_0 & (\Lambda^{-1})^1{}_1 & (\Lambda^{-1})^1{}_2 & (\Lambda^{-1})^1{}_3 \\ (\Lambda^{-1})^2{}_0 & (\Lambda^{-1})^2{}_1 & (\Lambda^{-1})^2{}_2 & (\Lambda^{-1})^2{}_3 \\ (\Lambda^{-1})^3{}_0 & (\Lambda^{-1})^3{}_1 & (\Lambda^{-1})^3{}_2 & (\Lambda^{-1})^3{}_3 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Transformation inverse $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

Partons du produit scalaire (invariant)

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \tag{1.15}$$

En remplaçant dans cette équation x'^μ par $\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$ et x'^ν par $\Lambda^\nu{}_\beta x^\beta$, nous obtenons

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \tag{1.16}$$

ce qui implique que

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \tag{1.17}$$

Maintenat, en tenant compte du fait que $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta$ et $\eta^{\rho\alpha}\eta_{\alpha\beta} = \delta^\rho{}_\beta$, nous pouvons écrire

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \left(\Lambda^{-1}\right)^\beta{}_\nu \tag{1.18}$$

ou bien

$$\left(\Lambda^{-1}\right)_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha} \tag{1.19}$$

et

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\beta = \Lambda_\beta{}^\alpha. \tag{1.20}$$

1.2 Scalaire, vecteur et tenseur

1.2.1 Les scalaires (selon Lorentz)

Toute quantité invariante par transformation de Lorentz est dite scalaire. Le premier exemple des scalaires est la norme $x^\mu x_\mu$.

1.2.2 Les (quadri-)vecteurs

On appele vecteur (ou bien quadri-vecteur) toute quantité qui a 4 composantes se transformant sous une transformation de Lorentz comme les composantes du vecteur $\boldsymbol{x}$, c-à-d :

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \tag{1.21}$$

et (pour les covecteurs)

$$A'_{\mu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} A_{\nu} \tag{1.22}$$

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ par

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu} = A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu}$$

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A^0 B^0 - \vec{A}.\vec{B} = A^0 B^0 - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z$$

Exemples de vecteurs

1) Quadri-vitesse et quadri-impulsion Nous définissons le quadrivecteur vitesse par ses composantes contravariantes

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \tag{1.23}$$

où τ est le temps propre défini par

$$cd\tau = \sqrt{c^2dt^2 - d\vec{x}^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\vec{x}^2}{dt^2}} = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ou tout simplement

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \tag{1.24}$$

Nous avons alors les composantes

$$U^0 = \gamma c \quad \text{et} \quad U^i = \gamma \frac{dx^i}{dt}.$$

Evidement, les U^{μ} se transforment comme les x^{μ}. De plus, la norme carrée $U^{\mu}U_{\mu}$ est invariante

$$U^{\mu}U_{\mu} = c^2.$$

A partir du quadri-vitesse nous définissons le quadrivecteur énergie-impulsion

$$p^{\mu} = mU^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \tag{1.25}$$

Nous avons alors les composantes

$$p^0 = m\frac{dx^0}{d\tau} = mc\frac{dt}{d\tau} = m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c} \tag{1.26}$$

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau} = m\gamma\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.27}$$

Il est bien claire que

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = m^2c^2 \tag{1.28}$$

2) La dérivée ∂_μ Nous pouvons définir, pour une fonction du quadri-vecteur position d'un événement, la dérivation par rapport aux coordonnées contravariantes de cet évènement

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \tag{1.29}$$

Il est evident que les 4 quantités ∂_μ forment les quatre composantes covariantes d'un opérateur différentiel vectoriel qui généralise la notion de $\vec{\nabla}$ à l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions. Nous avons la loi de transformation

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \partial_\nu \tag{1.30}$$

Pour une fonction scalaire nous avons

$$df = \partial_\mu f \; dx^\mu.$$

Nous définissons également les dérivées ∂^μ par

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \tag{1.31}$$

Il vient alors

$$\partial^\mu\partial_\mu = \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta = \Box \tag{1.32}$$

L'opérateur $\Box$ est le D'alembertien.

3) Le quadri-potentiel En électromagnétisme, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont dérivés des potentiels ϕ et $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\mathbf{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.33}$$

$$\vec{B} = \mathbf{rot}(\vec{A}) \tag{1.34}$$

A partir des potentiels ϕ et $\vec{A}$, nous pouvons définir le quadrivecteur potentiel

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \tag{1.35}$$

Dans ce cas, la condition de jauge de Lorentz $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{div}.\vec{A} = 0$ s'écrit tout simplement,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{1.36}$$

4) La densité de courant Nous définissons aussi le quadrivecteur densité de courant

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right). \tag{1.37}$$

Dans ce cas l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}.\vec{j} = 0 \tag{1.38}$$

se simplifie à

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1.39}$$

1.2.3 Les tenseurs

Pour définir un tenseur, considérons d'abord le produit direct de deux vecteurs

$$T = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} = x^\mu y^\nu \left(\hat{\boldsymbol{e}}_\mu \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_\nu\right) \tag{1.40}$$

Les quantités

$$T^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu \tag{1.41}$$

se transforment comme

$$T'^{\mu\nu} = x'^\mu y'^\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha y^\beta = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}. \tag{1.42}$$

Nous remarquons ici que la transformation de $T^{\mu\nu}$ fait intervenir deux fois la matrice $\Lambda^\mu{}_\alpha$. Nous appelons alors $T^{\mu\nu}$ les composantes d'un tenseur deux fois contravariant. D'une manière générale un tenseur deux fois contravariant $T^{\mu\nu}$ se transforment selon la loi

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta} \tag{1.43}$$

D'une manière générale la loi de transformation des tenseurs est la suivante

$$\begin{aligned} T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} &= \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\alpha_2}\ldots\ldots \\ & \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta_1}{}_{\nu_1}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta_2}{}_{\nu_2}\ldots.T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} \end{aligned} \tag{1.44}$$

Dans le cas des tenseurs la régle d'abaissement et d'élevation des indices est très utile. Nous avons par exemple

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{\lambda} &= \eta_{\lambda\alpha}T^{\mu\nu\alpha} \\ T^{\mu}{}_{\nu\lambda} &= \eta^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu\lambda} \\ F^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\,F_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Exemple : Le tenseur électromagnétique (tenseur de Faraday) En életromagnétisme, nous définissons le tenseur du champ électromagnétique par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.45}$$

Ce tenseur est antisymétrique

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{1.46}$$

Nous avons les composantes

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{E_i}{c} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z \\ F_{13} &= B_y \\ F_{23} &= -B_x \end{aligned}$$

Formellement, nous avons

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

A partir de la définition (1.45), nous obtenons

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \tag{1.48}$$

qui regroupe les deux équations homogènes de Maxwell.

1.3 Principe de correspondance et équation de Schrödinger

1.3.1 Postulat de la théorie quantique

La théorie quantique est basée sur les postulats suivants :

1. L'état d'un système est décrit par un vecteur d'état ψ dans un espace vectoriel dit espace de Hilbert.
2. Les observables (les grandeurs physiques mesurables) sont représentés par les opérateurs hermitiens.
3. L'évolution temporelle est déterminée par l'équation de Schrödinger impliquant l'hamiltonien H
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{1.49}$$
4. Si, dans une mesure d'une observable A, la valeur a_n est trouvée, alors l'état du système est l'état propre correspondant.

1.3.2 Dérivation de l'équation de Schrödinger

Partons de la relation de dispersion de la particule libre

$$E = \frac{p^2}{2m}. \tag{1.50}$$

Le principe de correpondance stipule que

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.51}$$

$$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}. \tag{1.52}$$

Suivant le principe de correspondance (1.51,1.52)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi. \tag{1.53}$$

Qui est l'équation de Schrödinger.

1.3.3 Equation de continuité

L'interprétation probabiliste de toute équation d'onde est basée sur l'établissement d'une loi de conservation (analogue à l'équation de continuité). Pour étabilir l'équation de continuité associée à l'équation de Schrödinger, nous multiplions, en premier lieu, l'équation (1.53) par ψ^*

$$i\hbar\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\psi^*\Delta\psi. \tag{1.54}$$

Ensuite, nous prenons la conjuguée de (1.53) et nous la multiplions à gauche par ψ

$$-i\hbar\psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \frac{-\hbar^2}{2m}\psi\Delta\psi^*. \tag{1.55}$$

La soustraction de l'équation (1.55) de l'équation (1.54) nous donne

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*\right) \tag{1.56}$$

Le membre à gauche de la dernière équation peut s'écrire comme

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\psi\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t},$$

avec

$$\rho = \psi^*\psi = |\psi|^2 .$$

Pour le membre à droite, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^* &= \psi^*\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\psi\right) - \psi\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\psi^*\right) \\
&= \psi^*\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\psi\right) + \left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\left(\vec{\nabla}\psi\right) - \left(\vec{\nabla}\psi^*\right)\left(\vec{\nabla}\psi\right) - \psi\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\psi^*\right) \\
&= \vec{\nabla}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi\right) - \vec{\nabla}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \\
&= \vec{\nabla}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)
\end{aligned}$$

L'équation (1.56) peut s'écrire alors sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{j}} = 0$$

où le courant $\vec{\boldsymbol{j}}$ est donné par

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right).$$

Avec cette équation de continuité et comme $|\psi|^2$ est toujours positive, nous pouvons interpréter ρ comme densité de probabilité de trouver la particule dans l'élément de volume $d\vec{r} \equiv d^3x = dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$.

Chapitre 2

Equation de Klein Gordon

L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale en physique quantique non relativiste. Sa découverte était un point crucial dans le développement de la mécanique quantique. Elle décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde, la caractéristique fondamentale dans la description mécanique quantique des particules. Cependant, malgré le succés de la mécanique quantique dans l'étude des phénomènes quantique, sa généralisation à inclure le régime relativiste n'était pas triviale. La question était comment utiliser les mêmes concepts fondamentaux de la mecanique quantique non relativste pour décrire la dynamique d'une particule relativiste. La solution qui semblait à première vue simple et directe a conduit à plusieurs difficultés. En fait, l'application du principe de correspondance avec la relation relativiste energie-impulsion mène à l'équation de Klein Gordon qui est une équation du second ordre par rapport au temps et, ainsi, comme nous le verrons, elle pose plusieurs problèmes concernant l'interprétation de ses solutions. Pourtant, malgré les problème et les difficultés constatés, le contenu physique de l'équation de Klein Gordon est très riche. Dans ce chapitre, nous discuterons la dérivation de l'équation de Klein Gordon et les difficultés liées à la description monoparticulaire.

2.1 Dérivation de l'équation de Klein Gordon

La première équation établi pour une particule relativiste libre en mécanique quantique résulte de l'application du principe de correspondance, qui consiste à remplacer les observables classiques par des opérateurs agissant sur les fonctions d'onde. Dans la représentation de position, le principe de correspondance stipule que l'énergie, notée E, est associée à l'opérateur

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.1}$$

et la quantité de mouvement $\vec{p}$ est associée au gradient $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\widehat{\vec{p}} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}. \tag{2.2}$$

L'incorporation de ces opérateurs dans la relation de dispersion relativiste

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{2.3}$$

donne directement l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\overrightarrow{x},t)=\sqrt{m^2c^4-c^2\hbar^2\Delta}\varphi(\overrightarrow{r},t)$$

A cause de la racine carrée d'un opérateur différentiel, la dernière équation pose plusieurs problèmes ; c'est une équation d'ordre infini et non locale. Pour contourner cette difficulté nous utilisons le carré de l'énergie relativiste

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4, \tag{2.4}$$

ce qui nous donne **l'équation de Klein Gordon**

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi(\overrightarrow{r},t)=0. \tag{2.5}$$

Cette équation peut s'écrire aussi sous la forme covariante

$$\left[\partial^\mu\partial_\mu+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi(\overrightarrow{r},t)=0 \tag{2.6}$$

avec

$$\partial_\mu=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\overrightarrow{\nabla}\right),\qquad \mu=0,1,2,3. \tag{2.7}$$

et le Dalembertien

$$\partial^\mu\partial_\mu=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle=\Box \tag{2.8}$$

La constante, $\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ a la dimension de l'inverse carré d'une longueur avec $\lambda_c=\frac{\hbar}{mc}$ est la longueur d'onde de Compton, l'échelle de longueur intrinsèque d'une particule massive. Nous pouvons également dériver l'équation de Klein Gordon à partir de la forme covariante de la relation de la masse relativiste $p_\mu p^\mu=m^2c^2$, en introduisant la forme covariante du principe de correspondance

$$p_\mu\to\hat{P}_\mu=i\hbar\partial_\mu. \tag{2.9}$$

Nous avons alors

$$\left[\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu-m^2c^2\right]\varphi=0. \tag{2.10}$$

Nous pouvons alors voir que la dérivation d'une équation relativiste est trés simple. Cependant, malgré cette simplicité, il a été constaté, dès son premier avènement, que le contenu physique de cette équation ne peut être incarné dans le cadre de la mécanique quantique habituelle. Pour expliquer cela, considérons d'abord les solutions de cette équation pour une particule libre.

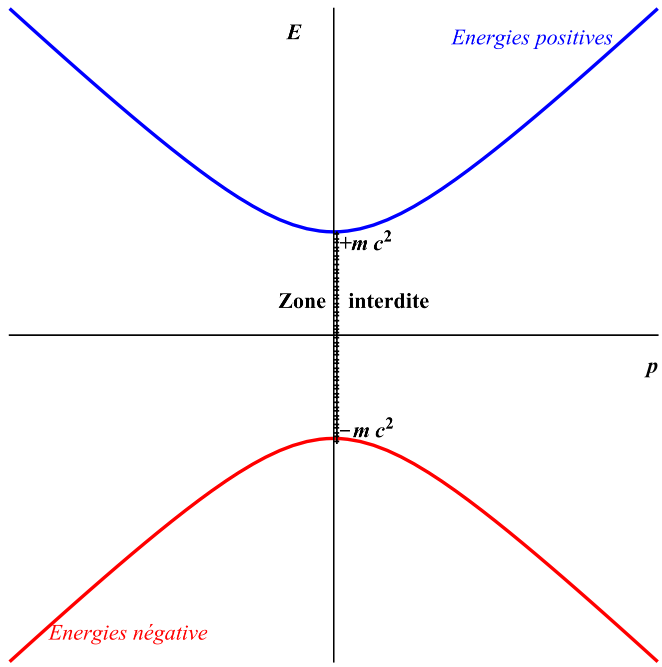

Figure 2.1 – représentation des énergies en fonction de p. L'intervale $]-mc^2, mc^2[$ est une zone interdite

2.2 Solutions libres

Comme en mécanique quantique non relativiste, la particule libre est décrite par une onde plane

$$\varphi(\overrightarrow{r},t) = N\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \overrightarrow{p}.\overrightarrow{r})\right] \tag{2.11}$$

où E et $\overrightarrow{p}$ représentent respectivement l'énergie et l'impulsion de la particule. La substutition de la solution (2.11) dans l'équation de Klein-Gordon (2.5) donne deux valeurs possibles pour l'énergie, $E = \pm E_{\vec{p}}$ avec

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4}, \tag{2.12}$$

ce qui nous donne deux solutions

$$\varphi^{\pm}(\overrightarrow{r},t) = N\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\pm E_{\vec{p}}t - \overrightarrow{p}.\overrightarrow{r})\right] \tag{2.13}$$

Nous avons alors, en plus de la solution habituelle à énergie positive, **une solution à énergie négative**. De plus à partir de l'équation (2.12), nous voyons que $E_{\vec{p}} \geq mc^2$ et, par conséquent, les énergies positives vérifient $E > mc^2$ et les énergies négatives vérifient $E < mc^2$. Ainsi, le spectre d'énergie n'a pas de limite inferieure et n'a pas donc d'état fondamental. L'éxistence des solutions à énergie négative est la première difficulté de la mécanique quantique relativiste. Cependant, comme nous allons le voir, ces solutions sont d'un grand intrérét physique. En fait, les solutions d'énergie négatives qui semblent non physiques, ne peuvent pas être exclues, en rajoutant à l'équation de Klein Gordonla condition $E > 0$, pour les raisons suivantes :

1. La tentative de calculer le propagateur en ne considérant que les solutions d'énergie positive, viole le principe de causalité.
2. En présence d'un champ électromagnétique, des transitions entre des états d'énergie positive et négative peuvent avoir lieu.

Ainsi, l'exclusion des états d'énergie négative ne résout pas le problème. La question est donc comment interpréter ces solutions. En tenant compte des solutions d'énergie positive et négative, nous pouvons écrire la solution générale comme un paquet d'onde [1]

$$\varphi(\overrightarrow{r},t) = \int d\vec{p}\left\{a\left(\vec{p}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_{\vec{p}}t - \overrightarrow{p}.\overrightarrow{r})\right] + b\left(\vec{p}\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(-E_{\vec{p}}t - \overrightarrow{p}.\overrightarrow{r})\right]\right\}$$

où $a\left(\vec{p}\right)$ et $b\left(\vec{p}\right)$ sont des fonctions scalaires de $\vec{p}$ et $d\vec{p} = d^3p = dp_x dp_y dp_z$. En faisant le changement $\vec{p} \to -\vec{p}$ dans le deuxième terme et en posant $a\left(\vec{p}\right) = \frac{A_+(\vec{p})}{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}$ et $b\left(-\vec{p}\right) = \frac{A_-(\vec{p})}{(2\pi\hbar)^3 2E_{\vec{p}}}$, nous pouvons écrire la solution générale sous la forme

$$\varphi(\overrightarrow{r},t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3\, 2E_{\vec{p}}}\left[A_+\left(\vec{p}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}\right) + A_-\left(\vec{p}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}\right)\right]. \tag{2.14}$$

Avant d'aborder l'interprétation des solutions d'énergie negative, exposons d'abord l'équation de continuité qui découle de l'équation de Klein Gordon.

2.3 Equation de continuité

L'interprétation probabiliste de toute équation d'onde est basée sur l'établissement d'une loi de conservation (équation de continuité) qui s'écrit en général sous la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0. \tag{2.15}$$

Pour l'équation de Klein Gordon, nous avons

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi^* = 0, \tag{2.16}$$

En multipliant l'équation de Klein Gordon à gauche par φ^* et l'équation (2.16) par φ, et en prenant ensuite la difference entre les deux équations résultantes, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{c^2}\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi^*\triangle\varphi\right) - \left(\frac{1}{c^2}\varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* - \varphi\triangle\varphi^*\right) = 0.$$

1. En physique quantique, l'état physique pour une particule libre est décrit par une superposition d'ondes planes de longueurs d'onde et de directions de propagation voisines.

ou bien

$$\frac{1}{c^2}\left(\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^*\right) - (\varphi^*\triangle\varphi - \varphi\triangle\varphi^*) = 0. \tag{2.17}$$

Maintenant nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* &= \varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right) - \varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right]
\end{aligned}$$

Le terme $\varphi^*\triangle\varphi - \varphi\triangle\varphi^*$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}
\varphi^*\triangle\varphi - \varphi\triangle\varphi^* &= \varphi^*\left[\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\varphi\right)\right] - \varphi\left[\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\varphi^*\right)\right] \\
&= \varphi^*\left[\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\varphi\right)\right] + \left(\vec{\nabla}\varphi^*\right).\left(\vec{\nabla}\varphi\right) - \left(\vec{\nabla}\varphi^*\right).\left(\vec{\nabla}\varphi\right) - \varphi\left[\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\varphi^*\right)\right] \\
&= \vec{\nabla}.\left[\varphi^*\left(\vec{\nabla}\varphi\right)\right] - \vec{\nabla}.\left[\varphi\left(\vec{\nabla}\varphi^*\right)\right] \\
&= \vec{\nabla}.\left[\varphi^*\left(\vec{\nabla}\varphi\right) - \varphi\left(\vec{\nabla}\varphi^*\right)\right]
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire l'équation (2.17) sous la forme

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right] - \vec{\nabla}.\left[\varphi^*\left(\vec{\nabla}\varphi\right) - \varphi\left(\vec{\nabla}\varphi^*\right)\right] = 0. \tag{2.18}$$

La dernière équation détermine $\boldsymbol{\rho}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ à une constante près. A première vue, nous pouvons extraire pour $\boldsymbol{\rho}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ les expressions suivante

$$\frac{i}{c^2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right) \tag{2.19}$$

et

$$-i\left(\varphi^*\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^*\right). \tag{2.20}$$

Cependant, pour obtenir les résultats de la mécanique quantique ordinaire à la limite nonrelativiste, nous devons multiplier (2.17) par $\frac{i\hbar}{2m}$. Nous obtenons ainsi

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right) \tag{2.21}$$

et

$$\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{2im}\left(\varphi^*\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^*\right). \tag{2.22}$$

Cette loi de conservation diffère dans un aspect important de celle dérivée à partir de l'équation de Schrödinger, à savoir l'expression de $\boldsymbol{\rho}$ **n'est pas definie positive**. C'est pour cette raison que nous ne puissions pas interpreter $\boldsymbol{\rho}$ comme une densité de probabilité.

La solution de l'équation de Klein Gordon n'est pas donc une fonction d'onde.

2.4 Interprétation

De ce qui précede, nous pouvons identifier trois aspects qui (au moins initialement) éliminent l'équation de Klein-Gordon en tant que candidat approprié complet pour la version relativiste de l'équation d'onde :

1. La première caractéristique impressionnante de l'équation Klein-Gordon est l'existence des états d'énergie négative. L'équation sur laquelle l'équation de Klein-Gordon est basée, $E^2 = \overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4$, présente des solutions positives et négatives.
2. Deuxièmement, la densité ρ n'est pas définie positive et par conséquent, elle ne peut pas représenter une probabilité. En effet, cela a conduit au rejet de l'équation de Klein Gordon dans les premières années de la mécanique quantique relativiste de 1926 à 1934.
3. Ces deux problèmes sont liés l'un à l'autre ; les deux sont une conséquence de la relation de dispersion relativiste qui nous a conduit à une équation du second ordre par rapport au temps. En outre, comme l'équation de Klein-Gordon est d'ordre deux par rapport au temps, il est nécessaire pour la résoudre de spécifier deux conditions initiales, par exemple $\varphi(\vec{r}, t_0)$ et $\partial_0\varphi(\vec{r}, t_0) \equiv \dot{\varphi}(\vec{r}, t_0)$. Ainsi, il y a une contrainte supplémentaire absente dans la formulation Schrödinger où l'évolution de l'état quantique au cour du temps dépend d'une seule la condition initiale qui représente un état d'une seule particule. Il est alors naturel de penser que la deuxième contrainte est due l'existence des solution d'énergie négative.

Pour pouvoir donner un interprétation aux solutions d'énergie négative, calculons la densité ρ pour une particule libre. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= \frac{i\hbar}{2mc^2}|N|^2\left(e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})}\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})} - e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})}\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})}\right) \\
&= \frac{i\hbar}{2mc^2}|N|^2\left(-\frac{i}{\hbar}Ee^{\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})} - \frac{i}{\hbar}Ee^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})}e^{\frac{i}{\hbar}(Et-\overrightarrow{p}.\overrightarrow{x})}\right) \\
&= \frac{E}{mc^2}|N|^2
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\boldsymbol{\rho} = \pm\frac{E_{\vec{p}}}{mc^2}|N|^2. \tag{2.23}$$

Ici, nous remarquons que $\boldsymbol{\rho}$ est positive pour les solutions à énergie positive et négative pour les solutions à énergie négative. Il est alors possible de donner un sens physique à ρ en l'identifiant non pas à une densité de probabilité mais à une densité de charge électrique. Le fait que $\mathbf{sign}(\rho) = \mathbf{sign}(E)$ suggère de réinterpréter les solutions à énergie négative comme des antiparticules portant une charge électrique opposée à celle des particules (solutions à énergie positive). Les états d'énergie négative se comportent comme

$$\varphi^{-}(\overrightarrow{r},t) \sim \exp\left[+\frac{i}{\hbar}E_{\vec{p}}t\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_{\vec{p}}\ (-t)\right]$$

Nous pouvons alors interpréter les états d'énergie négative comme des antiparticules qui se meuvent dans le sens inverse du temps. De plus, pour une antiparticule nous avons

$$\tilde{\vec{p}} = \frac{d\vec{r}}{d(-t)} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{p} \tag{2.24}$$

ce qui justifie l'écriture (2.14). Dans le cours de Théorie Qunatique des Champs, vous verrez que l'interprétation de $\varphi(\overrightarrow{r},t)$ en tant que champ quantique conduit à une résolution des problèmes soulevés ci-dessus.

2.5 Covariance de l'équation de Klein Gordon

Selon le principe de la relativité restreinte, les lois de la nature doivent être invariantes lors d'une transformation d'un référentiel inertiel à un autre. Le formalisme mathématique de la relativité restreinte s'incarne dans la transformation de Lorentz qui conserve la norme des intervalles entre tous les points de l'espace -temps. Une théorie quantique qui répond au principe de la relativité doit être invariante sous une transformation de Lorentz. En d'autres termes, nous avons besoin de la covariance de Lorentz des équations relativistes. Considérons deux observables, O et O', dans deux référentiels inertiels différents, qui décrivent le même événement physique (I) avec leurs coordonnées spatio-temporelles particulières, x et x'. La transformation de Lorentz qui lie les coordonnées x de l'événement I pour l'observable O et les coordonnées x' de l'événement I pour l'observable O' s'écrit

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.25}$$

avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.26}$$

Il n'est pas difficile de montrer que le Dalembertien est un invariant de Lorentz ; Comme

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu}\partial_{\alpha}$$

il vient

$$\partial'^{\mu}\partial'_{\mu} = \eta^{\mu\nu}\partial'_{\nu}\partial'_{\mu} = \eta^{\mu\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}{}_{\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu}\partial_{\alpha}\partial_{\beta} = \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}.$$

Nous avons donc

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu} = \partial'^{\mu}\partial'_{\mu}. \tag{2.27}$$

Ainsi, l'équation de Klein-Gordon est clairement compatible avec la relativité restreinte ; elle prend la même forme dans tous les référentiels inertiels avec

$$\varphi'(x') = \varphi\left(x = \Lambda^{-1}x'\right). \tag{2.28}$$

Exercice 1

Suivant la forme de la densité $\boldsymbol{\rho}$ nous définissons le produit scalaire

$$(\varphi,\chi) = i\int d^3x\left(\varphi^*\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right) = i\int d^3x\left(\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_t}\chi\right) \tag{2.29}$$

avec

$$\varphi_1\overleftrightarrow{\partial_t}\varphi_2 = \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\varphi_2 \tag{2.30}$$

La généralisation du produit scalaire (2.29) est

$$(\varphi,\chi) = i\int d\sigma^\mu\left(\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_u}\chi\right) \tag{2.31}$$

où $d\sigma^\mu$ est une hypersurface à 3 dimensions et $\overleftrightarrow{\partial_{mu}}$ est la dérivée le long d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ normal à l'hypersurface $d\sigma$ avec $\varphi_1\overleftrightarrow{\partial_u}\varphi_2 = \varphi_1(\partial_u\varphi_2) - (\partial_u\varphi_1)\varphi_2$. Montrer que ce produit scalaire est invariant sous les transformations de Lorentz

2.6 Limite non relativiste

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre se réduit à la limite non-relativiste à l'équation de Schrödinger si on écrit la fonction d'onde de Klein Gordon $\varphi(\vec{r},t)$ sous la forme

$$\varphi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right).$$

Nous avons

$$\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4\right]\varphi(\vec{r},t) = 0$$

Si nous posons

$$\varphi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right),$$

il vient

$$\begin{aligned}
\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) &= \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\psi(\vec{r},t)\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\right]\\
&= \hbar^2\left[\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t)+2\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}\right)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)+\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\psi(\vec{r},t)\right]\\
&= \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t)-i2\hbar mc^2\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)-m^2c^4\psi(\vec{r},t)\right]
\end{aligned}$$

En remplaçant $\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t)$ dans l'équation de Klein Gordon par le dernier résultat, nous obtenons pour $\psi(\vec{r},t)$ l'équation

$$\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-i2\hbar mc^2\frac{\partial}{\partial t}-m^2c^4-c^2\hbar^2\Delta+m^2c^4\right]\psi(\vec{r},t)=0$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right]\psi(\vec{r},t)=0$$

A la limite $c\to\infty$, nous obtenons l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=-\frac{c^2\hbar^2}{2mc^2}\Delta\psi(\vec{r},t)\,.$$

Pour la densité $\boldsymbol{\rho}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi &= \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\psi^*(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\psi(\vec{r},t)\right]\\
&= \exp\left(i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\psi^*(\vec{r},t)\left[-i\frac{mc^2}{\hbar}\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\psi(\vec{r},t)+\exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)\right]\\
&= -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\psi^*(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi-\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*=-i\frac{2mc^2}{\hbar}\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\psi^*(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)-\psi(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\vec{r},t)$$

La densité de Klein Gordon est donc

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)\\
&= \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)+\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)-\psi(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\vec{r},t)\right) \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

A la limite non relativiste, $c \to \infty$, la densité $\boldsymbol{\rho}$ se réduit à la densité de Schrödinger

$$\boldsymbol{\rho}_{c\to\infty} = \psi^{*}\left(\vec{r},t\right)\psi\left(\vec{r},t\right) = \left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^{2} \tag{2.33}$$

2.7 Couplage minimum

Pour tenir compte de l'interaction de la particule relativiste avec un champs électromagnétique, nous couplage minimum. Partons du lagrangien classique d'une particule libre de masse m et de charge e

$$L_{libre} = -mc^{2}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}. \tag{2.34}$$

Pour le cas d'une particule libre, le moment conjugué de la particule est exactement sa quantité de mouvement

$$P_{x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}} = p_{x}. \tag{2.35}$$

Si cette particule est soumise à l'action d'un champs électromagnétique, un terme d'interction L_{int} se rajoute L_{libre}

$$L = L_{libre} + L_{int}. \tag{2.36}$$

Ce terme doit rependre aux conditions suivantes :

1. Il reproduit la loi de Newton avec la force de Lorentz.
2. Il preserve l'invariance relativiste.
3. Il preserve l'invariance de jauge.

Le lagrangien qui satisfait à ces conditions est donné par

$$L_{int} = -e\phi + e\overrightarrow{v}.\overrightarrow{A} \tag{2.37}$$

Là, nous remarquons que le moment conjugué de la particule est différent de sa quantité de mouvement

$$P_{x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}} + eA_{x} = p_{x} + eA_{x}. \tag{2.38}$$

A partir de la dernière équation nous en déduisons le principe du couplage minimum qui consiste aux changements

$$\begin{aligned} \vec{p} &\to \vec{p} - e\vec{A} \\ E &\to E - e\phi \end{aligned}$$

lorsque la particule est soumise à un champ électromagnétique. En écriture covariante ce principe s'écrit

$$\hat{p}_{\mu} \to \hat{\pi}_{\mu} = \hat{p}_{\mu} - eA_{\mu}. \tag{2.39}$$

L'équation de Klein Gordon prend alors la forme

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)^2-\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}-e\vec{A}\right)^2-m^2c^2\right]=\varphi(\overrightarrow{x},t), \tag{2.40}$$

qui s'écrit aussi comme

$$\left[D_\mu D^\mu+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi=0, \tag{2.41}$$

où D_μ est la dérivée covariante (par rapport aux transformations de jauge)

$$D_\mu=\partial_\mu+i\frac{e}{\hbar}A_\mu$$

avec $A^\mu=(\frac{\phi}{c},\vec{A})$.

Exercice 2

Considérons le lagrangien nonrelativiste

$$L_{NR}=\frac{1}{2}mv^2-e\phi+e\overrightarrow{v}.\overrightarrow{A}.$$

Montre que L_{NR} reproduit la loi de Newton avec la force de Lorentz.

Exercice 3

Considérons la transformation de jauge

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}&=\phi+\frac{\partial\chi}{\partial t}\\ \tilde{\vec{A}}&=\vec{A}-\vec{\nabla}\chi\end{aligned}$$

Montrer que L_{NR} est invariant sous cette transformation.

Exercice 4

Montrer que l'équation de Klein Gordon

$$\left(\pi^\mu\pi_\mu-m^2c^2\right)\psi(x)=0$$

avec

$$\pi_\mu=i\hbar\partial_\mu-eA_\mu$$

est invariante sous la transformation de Jauge

$$\begin{aligned}A_\mu(x)&\rightarrow\tilde{A}_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\chi(x)\\ \psi(x)&\rightarrow\tilde{\psi}(x)=\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\chi(x))\psi(x).\end{aligned}$$

2.7.1 Le champ magnétique uniforme

Comme première application du principe de couplage minimum, considérons une particule relativiste de spin 0 et de charge e soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = \mathcal{B}\,\vec{k}$. L'équation de Klein Gordon associées à cette particule s'écrit

$$\left[D_\mu D^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.42}$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \tag{2.43}$$

Au préalable, nous devons fixer la jauge du potentiel vecteur $\vec{A}$. Pour cela, considérons d'abord le vecteur

$$\widetilde{\vec{A}} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \tag{2.44}$$

qui a les composantes

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_x &= \frac{1}{2}zB_y - \frac{1}{2}yB_z \\
\tilde{A}_y &= \frac{1}{2}xB_z - \frac{1}{2}zB_x \\
\tilde{A}_z &= \frac{1}{2}yB_x - \frac{1}{2}xB_y.
\end{aligned}$$

Nous pouvons voir que le champ $\vec{B}$ est dérivé du potentiel $\widetilde{\vec{A}}$;

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\widetilde{\vec{A}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}(zB_y - yB_z) & \frac{1}{2}(xB_z - zB_x) & \frac{1}{2}(yB_x - xB_y) \end{vmatrix} = \vec{B}$$

Pour $\vec{B} = \mathcal{B}\,\vec{k}$, le vecteur $\widetilde{\vec{A}}$ s'écrit comme

$$\widetilde{\vec{A}} = -\frac{1}{2}y\mathcal{B}\vec{i} + \frac{1}{2}x\mathcal{B}\vec{j} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y\mathcal{B} \\ \frac{1}{2}x\mathcal{B} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce potentiel fait intervenir deux varables ; x et y. A l'aide d'une transformation de jauge nous pouvons obtenir un potentiel vecteur qui ne dépend que d'une seule variable. En effet,

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \widetilde{\vec{A}} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}xy\right) \\
&= -\frac{1}{2}y\mathcal{B}\vec{i} + \frac{1}{2}x\mathcal{B}\vec{j} + \frac{1}{2}y\mathcal{B}\vec{i} + \frac{1}{2}x\mathcal{B}\vec{j} \\
&= x\mathcal{B}\vec{j}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le quadri-vecteur potentiel $A^\mu = (0, 0, \mathcal{B}x, 0)$. Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} D_0 &= \partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ D_1 &= \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - i\frac{e\mathcal{B}}{\hbar}x \\ D_3 &= \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_0 D^0 &= \partial_0 \partial^0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ D_1 D^1 &= \partial_1 \partial^1 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ D_2 D^2 &= -\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{e\mathcal{B}}{\hbar}x\right)^2 \\ D_3 D^3 &= \partial_3 \partial^3 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

L'équation de Klein Gordon (2.42) devient alors

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{e\mathcal{B}}{\hbar}x\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$$

Pour résoudre cette équation nous posons $\varphi(\boldsymbol{x}) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et - p_y y - p_z z)\right] F(x)$. La fonction $F(x)$ vérifie, alors, l'équation differentielle suivante

$$\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (p_y - e\mathcal{B}x)^2 + m^2c^2 - \frac{E^2}{c^2} + p_z^2\right]F(x) = 0 \tag{2.45}$$

Ici nous effectuons le changement

$$\bar{x} = x - \frac{p_y}{e\mathcal{B}} \tag{2.46}$$

pour obtenir l'équation d'onde associées à un oscillateur harmonique

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2}M\omega^2\bar{x}^2\right]\tilde{F}(\bar{x}) = \mathcal{E}\tilde{F}(\bar{x}) \tag{2.47}$$

avec

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}, \\ \mathcal{E} &= \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 - p_z^2, \\ \omega &= 2e\mathcal{B}. \end{aligned}$$

La solution est donc donnée par

$$\tilde{F}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left(\frac{\hbar}{M\omega}\right)^{\frac{-1}{4}} \exp\left[-\frac{M\omega}{2\hbar}\bar{x}^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}\bar{x}\right) \tag{2.48}$$

avec

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{2.49}$$

Finalement, nous obtenons

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p_z^2c^2 + (2n+1)\hbar e\mathcal{B}c^2} \tag{2.50}$$

et

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left(\frac{\hbar}{e\mathcal{B}}\right)^{\frac{-1}{4}} \exp\left[-\frac{e\mathcal{B}}{2\hbar}\left(x - \frac{p_y}{e\mathcal{B}}\right)^2\right] \mathcal{H}_n\left[\sqrt{\frac{e\mathcal{B}}{\hbar}}\left(x - \frac{p_y}{e\mathcal{B}}\right)\right]. \tag{2.51}$$

2.7.2 Le champ de l'onde plane

Nous considérons pour une deuxième application, une particule relativiste de spin 0 et de charge e en interaction avec une onde plane électromgnétique. Le quadrivecteur A_μ qui décrit le champ de l'onde plane electromagnétique est une fonction de la variable $\phi = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} = k_\mu x^\mu$, où k_μ est le vecteur de propagation de l'onde (avec $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$). De plus le quadrivecteur A_μ vérifie la condition de jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ (ou bien $k_\mu A^\mu = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{A} = 0$). L'équation de Klein Gordon associées à cette particule s'écrit

$$\left[\left(\hat{P}_\mu - eA_\mu\right)\left(\hat{P}^\mu - eA^\mu\right) - m^2c^2\right]\varphi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.52}$$

avec

$$\hat{P}_\mu = i\hbar\partial_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.53}$$

Si nous posons $\psi(x) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}\right)F(\phi)$, avec $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x} = p_\mu x^\mu$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\hat{P}_\mu\varphi(\boldsymbol{x}) &= \hat{P}_\mu \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)F(\phi) \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)F(\phi)\right] \\
&= \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)\right]F(\phi) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}F(\phi)\right] \\
&= p_\mu \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)F(\phi) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial\phi}F(\phi) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)\left[p_\mu + i\hbar k_\mu\frac{\partial}{\partial\phi}\right]F(\phi)
\end{aligned}$$

et, ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}_\mu - eA_\mu\right)\varphi(\boldsymbol{x}) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)\left[p_\mu - eA_\mu + i\hbar k_\mu \frac{\partial}{\partial\phi}\right]F(\phi)\\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)G(\phi)\end{aligned}$$

avec

$$G(\phi) = \left[p_\mu - eA_\mu + i\hbar k_\mu \frac{\partial}{\partial\phi}\right]F(\phi).$$

Le résultat de la dérivation $\left(\hat{P}_\mu - eA_\mu\right)\varphi(\boldsymbol{x})$ a la même forme que $\varphi(\boldsymbol{x})$ avec le changement $F(\phi) \to G(\phi)$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}^\mu - eA^\mu\right)\left(\hat{P}_\mu - eA_\mu\right)\varphi(\boldsymbol{x}) &= \left(\hat{P}^\mu - eA^\mu\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)G(\phi)\\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu\right)\left[p^\mu - eA^\mu + i\hbar k^\mu \frac{\partial}{\partial\phi}\right]G(\phi)\end{aligned}$$

et

$$\left(\hat{P}^\mu - eA^\mu\right)\left(\hat{P}_\mu - eA_\mu\right)\varphi(\boldsymbol{x}) = \exp(-ip.x)\left[p^\mu - eA^\mu + i\hbar k^\mu \frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[p_\mu - eA_\mu + i\hbar k_\mu \frac{\partial}{\partial\phi}\right]F(\phi).$$

En substituant ce résultat dans l'équation de Klein Gordon (2.52), nous obtenons pour $F(\phi)$ l'équation suivante

$$\left[p^\mu p_\mu - m^2c^2 - 2ep^\mu A_\mu + 2i\hbar p^\mu k_\mu \frac{\partial}{\partial\phi} + e^2 A^\mu A_\mu\right]F(\phi) = 0 \tag{2.54}$$

Compte tenu de la relation de masse $p^\mu p_\mu = m^2c^2$, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\phi}F(\phi) = -\frac{i}{2\hbar p^\mu k_\mu}\left[2ep^\mu A_\mu - e^2 A^\mu A_\mu\right]F(\phi) \tag{2.55}$$

qui admet comme solution

$$F(\phi) = C\exp\left\{-\frac{i}{2\hbar p^\mu k_\mu}\int_{\phi_0}^{\phi}\left[2ep^\mu A_\mu(\phi') - e^2 A^\mu(\phi')A_\mu(\phi')\right]d\phi'\right\} \tag{2.56}$$

2.8 Formalisme de Feshback-Villars

2.8.1 Equation de Feshback-Villars

La nécessité de spécifier deux conditions initiales pour résoudre l'équation de Klein-Gordon a pour conséquence, la difficulté de séparer les états d'énergie positive des états d'énergie négative par des opérateurs locaux. Autrement dit, les projecteurs sur les états d'énergie négative et positive sont non locaux. Pour une particule (ou antiparticule) au repos, nous avons les solutions

$$\varphi_{\pm}(\vec{r},t) \sim \exp\left(\mp i\frac{mc^2}{\hbar}t\right). \tag{2.57}$$

Il est donc claire que

$$\varphi_{+}(\vec{r},t) - \frac{i\hbar}{mc^2}\dot{\varphi}_{+}(\vec{r},t) = 0 \tag{2.58}$$

$$\varphi_{-}(\vec{r},t) + \frac{i\hbar}{mc^2}\dot{\varphi}_{-}(\vec{r},t) = 0. \tag{2.59}$$

Les deux dernières équation nous permettent de séparer les états de particule (état d'énergie positive) des états d'énergie négative, en définissant le vecteur

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi + \frac{i\hbar}{mc^2}\dot{\varphi} \\ \varphi - \frac{i\hbar}{mc^2}\dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

où φ est une solution de l'équation de Klein Gordon. Une particule (un état d'énergie positive) au repos est décrite seulement par la composante ψ_1 et une particule qui se meut lentement doit avoir une petite composante ψ_2. En revanche, les antiparticules (les états à énergie négative) au repos sont décrite par la composante ψ_2 et les antiparticules qui se meut lentement ont une petite composante ψ_1. Le redoublement des composants des fonctions d'onde sert à réduire de moitié l'ordre de l'équation différentielle et nous permet d'écrire une l'équation relativiste sous une forme hamiltonienne du premier ordre par rapport au temps. En effet, prenant la dérivée de ψ, nous obtenons

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{\varphi} - \frac{\hbar^2}{mc^2}\ddot{\varphi} \\ i\hbar\dot{\varphi} + \frac{\hbar^2}{mc^2}\ddot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Maintenant, partant de l'équation de Klein Gordon

$$\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4\right]\varphi = 0 \tag{2.61}$$

nous écrivons, d'abord,

$$\hbar^2\ddot{\varphi} = \hbar^2c^2\Delta\varphi - m^2c^4\varphi. \tag{2.62}$$

Comme φ vérifie l'équation de Klein Gordon (2.62), nous obtenons

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \begin{pmatrix} i\hbar\dot{\varphi} - \frac{1}{mc^2}\left(\hbar^2c^2\Delta\varphi - m^2c^4\varphi\right) \\ i\hbar\dot{\varphi} + \frac{1}{mc^2}\left(\hbar^2c^2\Delta\varphi - m^2c^4\varphi\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi + mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi} \\ \frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi - mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.63}$$

Le second membre de la dernière équation peut s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi + mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi} \\ \frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi - mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \begin{pmatrix} 2\varphi \\ -2\varphi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi + \frac{i\hbar}{mc^2}\dot{\varphi} \\ -\varphi + \frac{i\hbar}{mc^2}\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

A partir de la définition des composantes ψ_1 et ψ_2, nous pouvons voir que

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi + mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi} \\ \frac{\hbar^2}{m}\Delta\varphi - mc^2\varphi + i\hbar\dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_2 \\ -\psi_2 - \psi_2 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons alors l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_2 \\ -\psi_2 - \psi_2 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

Compte tenu du fait que

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_2 \\ -\psi_2 - \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

nous obtenons l'équation de Feshback-Villars

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_{FV}\ \psi \tag{2.65}$$

où l'hamiltonen de Feshback-Villars H_{FV} est donné par

$$H_{FV} = -\frac{\hbar^2\Delta}{2m}\eta + mc^2\tau_3 = \frac{\hat{P}^2}{2m}\eta + mc^2\tau_3 \tag{2.66}$$

avec

$$\eta = \tau_3 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Les matrices τ_1, τ_2 et τ_3 sont les matrices d'Isospin

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Il est à noter que les matrices τ_3 et η vérifient les propriété suivantes :

$$\eta^2 = (\tau_3 + i\tau_2)^2 = (\tau_3)^2 - (\tau_2)^2 + i(\tau_3\tau_2 + \tau_2\tau_3) = 0, \tag{2.69}$$

$$\tau_3\eta + \eta\tau_3 = \tau_3(\tau_3 + i\tau_2) + (\tau_3 + i\tau_2)\tau_3 = 2 \tag{2.70}$$

et

$$\eta^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \tau_3\eta\tau_3 \tag{2.71}$$

Dans cette théorie à deux composantes, nous avons

$$\begin{aligned} H_{FV}^2 &= \left(\frac{\hat{P}^2}{2m}\eta + mc^2\tau_3\right)^2 \\ &= \left(\frac{\hat{P}^2}{2m}\right)^2\eta^2 + \frac{\hat{P}^2}{2m}mc^2(\eta\tau_3 + \tau_3\eta) + m^2c^4(\tau_3)^2 . \end{aligned}$$

Comme $\eta^2 = 0$, $(\tau_3)^2 = 1$ et $\eta\tau_3 + \tau_3\eta = 2$, nous obtenons

$$H_{FV}^2 = m^2c^4 + \hat{P}^2mc^2, \tag{2.72}$$

ce qui signifie que les valeurs propres de H_{FV} sont $\pm E_{\vec{p}}$. De plus nous avons

$$H_{FV}^+ = -\frac{\hbar^2\Delta}{2m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

Nous remarquons que l'hamiltonien de Feshback-Villars n'est pas hermitien, $H_{FV}^+ \neq H_{FV}$ et par conséquent ses vecteurs propres associé aux solutions d'énergie positive et d'énergie négative ne sont pas orthogonaux, vis-à-vis le produit scalaire habituel. Il s'agit d'un mélange entre les états d'énergie positive et les états d'énergie négative qui n'est pas physique. Dans ce sens, les solutions que l'on peut avoir sont instables. Cependant, nous pouvons voir que H_{FV} est pseudo-hermitien

$$H_{FV}^+ = \tau_3 H_{FV}\tau_3$$

ce qui nous permet d'introduire une métrique pour définir un produit scalaire approprié. Ce produit scalaire peut être inspiré de l'expression de la densité $\boldsymbol{\rho}_{FV}$ qui découle de l'équation de Feshback-Villars.

2.8.2 Equation de continuité

Ayant montré comme écrire l'équation de Feshback-Villars, nous devons maintenant examiner la densité et le courant associé. Pour cela nous essayons de suivre les mêmes étapes que pour les équations de Schrodinger et de Klein Gordon mais en tenant compte du fait que l'hmiltonien de Feshback Villars est pseudo-hermitien. Partant de l'équation de Feshback-Villars

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\eta\Delta\psi + mc^2\tau_3\psi\right] \tag{2.74}$$

nous pouvons écrire

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{+}=\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\Delta\psi^{+}\right)\eta^{+}+mc^{2}\psi^{+}\tau_{3}\right]. \tag{2.75}$$

Compte tenu de l'équation (2.71), nous obtenons

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^{+}}{\partial t}\tau_{3}=\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\Delta\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta+mc^{2}\psi^{+}\right] \tag{2.76}$$

En mutipliant l'équation de Feshback-Villars (2.74) à gauche par τ_3, nous obtenons

$$i\hbar\tau_{3}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\tau_{3}\eta\Delta\psi+mc^{2}\psi\right] \tag{2.77}$$

Maintenant, nous multiplions l'équation (2.77) à gauche par ψ^{+} et l'équation (2.76) à droite par ψ, pour obtenir les deux équations

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^{+}}{\partial t}\tau_{3}\psi=\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\Delta\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi+mc^{2}\psi^{+}\psi\right] \tag{2.78}$$

et

$$i\hbar\psi^{+}\tau_{3}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\psi^{+}\tau_{3}\eta\Delta\psi+mc^{2}\psi^{+}\psi\right] \tag{2.79}$$

En prenant la difference entre les deux dérnières équations, nous obtenons

$$\begin{aligned}i\hbar\psi^{+}\tau_{3}\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\hbar\frac{\partial\psi^{+}}{\partial t}\tau_{3}\psi &= \left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\psi^{+}\tau_{3}\eta\Delta\psi+mc^{2}\psi^{+}\psi\right]-\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\Delta\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi+mc^{2}\psi^{+}\psi\right]\\ &= -\frac{\hbar^{2}}{2m}\left[\psi^{+}\tau_{3}\eta\Delta\psi-\left(\Delta\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi\right]\end{aligned}$$

La quantité $\psi^{+}\tau_{3}\eta\Delta\psi-\left(\Delta\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi$ dans la dernière ligne peut s'écrire comme

$$\psi^{+}\tau_{3}\eta\Delta\psi-\left(\Delta\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi=\vec{\nabla}\left[\psi^{+}\tau_{3}\eta\vec{\nabla}\psi-\left(\vec{\nabla}\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi\right]. \tag{2.80}$$

Il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^{+}\tau_{3}\psi\right)+\vec{\nabla}\left(\frac{\hbar}{2im}\psi^{+}\tau_{3}\eta\vec{\nabla}\psi-\frac{\hbar}{2im}\left(\vec{\nabla}\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi\right)=0 \tag{2.81}$$

d'où nous en déduisons la densité de Feshback Villars ρ_{FV} et le courant associé $\vec{j}_{FV}$

$$\rho_{FV} = e\psi^{+}\tau_{3}\psi=e\bar{\psi}\psi \tag{2.82}$$

$$\vec{j}_{FV} = \frac{e\hbar}{2im}\left(\psi^{+}\tau_{3}\eta\vec{\nabla}\psi-\left(\vec{\nabla}\psi^{+}\right)\tau_{3}\eta\psi\right)=\frac{e\hbar}{2im}\bar{\psi}\eta\overleftrightarrow{\nabla}\psi \tag{2.83}$$

avec $\bar{\psi} = \psi^+ \tau_3$. Nous constatons ici que

$$\rho_{FV} = e\psi^+ \tau_3 \psi = e\left(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\right) \tag{2.84}$$

Nous définissons alors la charge d'une particule décrite par ψ comme

$$Q = e \int d^3x \; \psi^+ \tau_3 \psi \tag{2.85}$$

Cela nous conduit à définir le produit scalaire hermitien de Feshback-Villars par

$$(\chi, \psi) = \int d^3x \; \chi^+ \tau_3 \psi \tag{2.86}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
(\chi, \psi) &= \int d^3x \left(\begin{array}{cc} \chi_1^* & \chi_2^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \end{array} \right) \\
&= \int d^3x \; \left(\chi_1^* \psi_1 - \chi_2^* \psi_2\right).
\end{aligned}$$

et

$$(\chi, \psi)^* = \int d^3x \; \left(\psi_1^* \chi_1 - \psi_2^* \chi_2\right) = (\psi, \chi). \tag{2.87}$$

De même, nous pouvons définir la valeur moyenne de H_{FV} par l'expression

$$\langle H_{FV} \rangle = \int d^3x \; \psi^+ \tau_3 H_{FV} \psi. \tag{2.88}$$

Immédiatement, nous constatons que $\langle H_{FV} \rangle$ est réelle. En fait, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle H_{FV} \rangle^* &= \left(\int d^3x \; \psi^+ \tau_3 H_{FV} \psi \right)^+ \\
&= \int d^3x \; \psi^+ H_{FV}^+ \tau_3 \psi.
\end{aligned}$$

Mais, comme $H_{FV}^+ = \tau_3 H_{FV} \tau_3$ et $(\tau_3)^2 = 1$, nous obtenons

$$\langle H_{FV} \rangle^* = \int d^3x \; \psi^+ \tau_3 H_{FV} \psi = \langle H_{FV} \rangle. \tag{2.89}$$

2.9 Solution de quelques exercices

2.9.1 Solution de l'exercice 2

Nous avons

$$L_{NR} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - e\phi + e\;\dot{x}.A_x + e\;\dot{y}.A_y + e\;\dot{z}.A_z \tag{2.90}$$

L'équation de mouvement pour x est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.91}$$

Le premier terme est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + eA_x\right) = m\ddot{x} + e\frac{d}{dt}A_x \tag{2.92}$$

Mais, comme A_x est une fonction de t, x, y et z, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}A_x = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} \tag{2.93}$$

Pour le deuxième terme $\frac{\partial L}{\partial x}$ nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial \phi}{\partial x} + e\ \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + e\ \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + e\ \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{2.94}$$

L'équation de mouvement devient alors

$$m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + e\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\ \dot{x}.\frac{\partial A_x}{\partial x} - e\ \dot{y}.\frac{\partial A_y}{\partial x} - e\ \dot{z}.\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

La dernière équation se réarrange comme

$$m\ddot{x} + e\frac{\partial \phi}{\partial x} + e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\frac{dy}{dt}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + e\frac{dz}{dt}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.95}$$

dont nous identifions les composantes du champ électromagnétique

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\frac{\partial A_x}{\partial t} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors l'équation

$$m\ddot{x} - eE_x - e\dot{y}B_z + e\dot{z}B_y = 0. \tag{2.96}$$

La quantité $\dot{z}B_y - \dot{y}B_z$ est la composante suivant l'axe (Ox) du vecteur $\vec{v} \times \vec{B}$

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_x = \dot{z}B_y - \dot{y}B_z$$

Finalement, nous obtenons l'équation de mouvement pour la composante x

$$m\ddot{x} = eE_x + e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_x .$$

Nous voyons que l'équation de mouvement n'est rien d'autre que la loi de Newton avec la force de Lorentz

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

2.9.2 Solution de l'exercice 4

Nous avons

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \\ \psi(x) &\rightarrow \tilde{\psi}(x) = \exp(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x))\psi(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_\mu &= i\hbar\partial_\mu - e\tilde{A}_\mu \\ &= i\hbar\partial_\mu - eA_\mu(x) - e\partial_\mu\chi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu\tilde{\psi}(x) &= \partial_\mu\left[\exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\psi(x)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\partial_\mu\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu\exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\left[\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar}\partial_\mu\chi(x)\right]\psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_\mu\tilde{\psi}(x) &= i\hbar\partial_\mu\tilde{\psi}(x) - e\tilde{A}_\mu\tilde{\psi}(x) \\ &= i\hbar\partial_\mu\tilde{\psi}(x) - eA_\mu(x)\tilde{\psi}(x) - e\partial_\mu\chi(x)\tilde{\psi}(x) \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\left[i\hbar\partial_\mu + e\partial_\mu\chi(x) - eA_\mu(x) - e\partial_\mu\chi(x)\right]\psi(x) \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\left[i\hbar\partial_\mu - eA_\mu(x)\right]\psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_\mu\tilde{\psi}(x) &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\pi_\mu\psi(x) \\ \tilde{\pi}^\mu\tilde{\pi}_\mu\tilde{\psi}(x) &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\pi^\mu\pi_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\pi}^\mu\tilde{\pi}_\mu - m^2c^2\right)\tilde{\psi}(x) = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\chi(x)\right)\left(\pi^\mu\pi_\mu - m^2c^2\right)\psi(x)$$

$$\left(\pi^\mu\pi_\mu - m^2c^2\right)\psi(x) = 0 \Longrightarrow \left(\tilde{\pi}^\mu\tilde{\pi}_\mu - m^2c^2\right)\tilde{\psi}(x) = 0$$

Chapitre 3

Equation de Dirac I

Lorsque l'équation de Klein-Gordon a été initialement suggérée, l'existence des solutions d'énergie négative et le fait que $\boldsymbol{\rho}$ n'est pas definie positive ont poussé les physiciens à rejeter cette équation et poursuivre la recherche d'une équation d'onde invariante de Lorentz. Historiquement, ces problèmes intrinsèques à l'équation de Klein-Gordon ont, parmi autres motivations, conduit Dirac à introduire une autre équation relativiste, mais du premier ordre par rapport au temps. L'objectif de ce chapitre est de dériver l'équation relativiste de Dirac et de discuter ses propriétés fondamentales. Comme nous le verrons, malgré que l'équation de Dirac implique une norme (densité) positive, elle n'a pas pu contourner les difficultés liées à l'éxistence des solutions d'énergie négative et leurs interprétations. Nous allons également voir que cette nouvelle formulation inclut un moment de spin égal à 1/2 et ainsi elle décrit la dynamique des fermions de spin 1/2.

3.1 Dérivation de l'équation de Dirac

Le fait que l'équation de Klein-Gordon ne produisait pas une densité de probabilité définie positive est lié à la dérivée du second ordre par rapport au temps. Cette dérivée est la conséquence du principe de correspondance appliqué sur la relation de dispersion relativiste (2.4) qui implique un terme d'ordre 2 en E. Une équation d'onde relativiste de Lorentz plus satisfaisante, c'est-à-dire avec une densité définie positive, n'aurait qu'une dérivée du premier ordre par rapport au temps. Cependant, en raison de l'équivalence des coordonnées spatiales et temporelles dans l'espace de Minkowski, une telle équation ne peut avoir que des dérivées du premier ordre par rapport aux coordonnées spatiales. Elle doit alors comporter un opérateur différentiel de type $\mathcal{D} = \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla}$. Dirac a proposé l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\hbar c\left(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla}\Psi\right) + \beta mc^2\Psi \equiv H_{Dirac}\Psi, \tag{3.1}$$

avec

$$H_D = c\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p} + \beta mc^2 \tag{3.2}$$

où $\overrightarrow{\alpha}$ et β peuvent être déterminer par la condition d'hermiticité de H_{Dirac} et le fait que H^2_{Dirac} doit être égal à $(\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4)$. Il est donc évident que α_i et β ne peuvent pas être des quantités ordinaires commutantes. Dirac a proposé que α_i et β soient des matrices agissant sur *une fonction d'onde* qui comportait plusieurs composantes disposées comme une colonne, que l'on appele **spineur**. Le fait que $H_{Dirac} = H_{Dirac}^{+}$, implique que les matricesβ et α_i avec $i = 1, 2, 3$, sont hermitiennes

$$\begin{aligned} \beta^{+} &= \beta \\ \alpha_i^{+} &= \alpha_i. \end{aligned}$$

Le developpement de H_D^2, nous donne

$$\begin{aligned} H_D^2 &= \alpha_x^2 c^2 \hat{p}_x^2 + \alpha_y^2 c^2 \hat{p}_y^2 + \alpha_z^2 c^2 \hat{p}_z^2 + \beta^2 m^2 c^4 \\ &+ c^2 \left(\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x\right) \hat{p}_x \hat{p}_y + c^2 \left(\alpha_x \alpha_z + \alpha_z \alpha_x\right) \hat{p}_x \hat{p}_z + c^2 \left(\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y\right) \hat{p}_y \hat{p}_z \\ &+ mc^3 \left(\beta \alpha_x + \alpha_x \beta\right) \hat{p}_x + mc^3 \left(\beta \alpha_y + \alpha_y \beta\right) \hat{p}_y + mc^3 \left(\beta \alpha_z + \alpha_z \beta\right) \hat{p}_z \end{aligned}$$

mais comme $H_D^2 = \left(\overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4\right) \mathbb{I} = \left(c^2 \hat{p}_x^2 + c^2 \hat{p}_y^2 + c^2 \hat{p}_z^2 + m^2 c^4\right) \mathbb{I}$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité, il vient que

$$\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \mathbb{I} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{aligned} \{\beta, \alpha_i\} &= 0 && (3.4) \\ \left\{\alpha_i, \alpha_j\right\} &= 2\delta_{ij} \ \mathbb{I} && (3.5) \end{aligned}$$

où l'écriture $\{A, B\}$ représente l'anticommutateur des deux matrices (ou opérateurs) A et B

$$\{A, B\} = AB + BA. \tag{3.6}$$

Içi nous avons noté explicitement la matrice identité que nous omettrons par la suite. Comme $\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1$, nous déduisons que toutes les matrices β et α_i ont les valeurs propres -1 et $+1$. De plus à partir de la relation d'anticommutation $\{\beta, \alpha_i\} = 0$, nous pouvons montrer que

$$\mathbf{Tr}\left(\beta\right) = \mathbf{Tr}\left(\alpha_i\right) = 0. \tag{3.7}$$

Par exemple si nous considérons la matrice β nous pouvons écrire

$$\mathbf{Tr}\left(\beta\right) = \mathbf{Tr}\left(\beta \alpha_i^2\right) = \mathbf{Tr}\left(\alpha_i \beta \alpha_i\right) = -\mathbf{Tr}\left(\beta \alpha_i^2\right) = -\mathbf{Tr}\left(\beta\right),$$

ce qui implique que $\mathbf{Tr}\left(\beta\right) = 0$. De même, nous pouvons montrer que $\mathbf{Tr}\left(\alpha_x\right) = \mathrm{Tr}\left(\alpha_y\right) = \mathbf{Tr}\left(\alpha_z\right) = 0$. Par conséquent, la dégénérescence de la valeur propre -1 est égale à la dégénérescence de la valeur propre $+1$, pour chaque matrice, et ainsi ces matrices sont de dimension paire, soit $2n \times 2n$. A deux dimensions (c-à-d 2×2), il n'existent pas 4 matrices qui vérifient les anticommutateurs (3.4) et (3.5). Cherchons alors des matrices (4×4). Pour cela, nous écrivons β sous la forme

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

C'est la représentation de Dirac (dite aussi représentation standard). Par mesure de simplicité, nous avons introduit le raccourci d'écrire une matrice (4×4) en blocs (2×2) avec $\mathbf{1}$ est la matrice identité (2×2). Supposons que dans cette représentation les matrices α_i s'écrivent comme

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$$

où A_i, B_i, C_i et D_i sont des blocs (2×2). La relation d'anticommutation (3.4), nous donne alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A_i & 0 \\ 0 & -2D_i \end{pmatrix} = 0$$

ce qui implique que $A_i = D_i = 0$ et par conséquent α_i est de la forme

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ C_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $(\alpha_i)^+ = \alpha_i$, il vient

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ (B_i)^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, à partir de la relation d'anticommutation (3.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & B_i \\ (B_i)^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ (B_j)^+ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ (B_j)^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ (B_i)^+ & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_i (B_j)^+ + B_j (B_i)^+ & 0 \\ 0 & (B_i)^+ B_j + (B_j)^+ B_i \end{pmatrix} = 2\delta_{ij} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} B_i (B_j)^+ + B_j (B_i)^+ &= 2\delta_{ij} \\ (B_i)^+ B_j + (B_j)^+ B_i &= 2\delta_{ij} \end{aligned}$$

Les deux dernières équations admettent comme solution les matrices de Pauli

$$B_i = (B_i)^+ = \sigma_i$$

avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Les matrices $\overrightarrow{\alpha}$ et β sont donc données par

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Il est remarquable de constater l'apparence des matrices de Pauli dans l'écriture des matrices α_k, ce qui suggère qu'il y a probablement un lien entre l'équation de Dirac et le moment cinétique de spin.Avant d'aborder la relation de l'équation de Dirac et le spin, cherchons d'abord à ce que l'équation de Dirac puisse apporter vis-à-vis la densité de probabilité et les énergies négative.

3.2 Equation de continuité

La motivation principale pour l'équation Dirac est de remédier aux difficultés rencontrées avec l'équation de Klein Gordon, en particulier le problème d'avoir une densité négative. Dans ce paragraphe nous allons dériver l'équation de continuité qui découle de l'équation de Dirac et nous examinerons la positivité de la densité.Partant de l'équation de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\hbar c\left(\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla}\Psi\right) + \beta mc^2\Psi \tag{3.10}$$

nous pouvons écrire

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^+ = i\hbar c\left(\overrightarrow{\nabla}\Psi^+\right).\overrightarrow{\alpha} + \Psi^+\beta mc^2. \tag{3.11}$$

Maintenant, nous multiplions (3.10) par Ψ^+ et (3.11) par Ψ. Nous obtenons

$$i\hbar\Psi^+\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right) = -i\hbar c\Psi^+\overrightarrow{\alpha}.\left(\overrightarrow{\nabla}\Psi\right) + mc^2\Psi^+\beta\Psi \tag{3.12}$$

$$-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi^+\right)\Psi = i\hbar c\left(\overrightarrow{\nabla}\Psi^+\right).\overrightarrow{\alpha}\Psi + mc^2\Psi^+\beta\Psi \tag{3.13}$$

En faisant la soustraction des deux équations résultantes, nous obtenons

$$i\hbar\Psi^+\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right) + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi^+\right)\Psi = -i\hbar c\Psi^+\overrightarrow{\alpha}.\left(\overrightarrow{\nabla}\Psi\right) - i\hbar c\left(\overrightarrow{\nabla}\Psi^+\right).\overrightarrow{\alpha}\Psi$$

ce qui nous donne

$$\Psi^+\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi^+\right)\Psi = -c\left[\Psi^+\overrightarrow{\alpha}.\left(\overrightarrow{\nabla}\Psi\right) + \left(\overrightarrow{\nabla}\Psi^+\right).\overrightarrow{\alpha}\Psi\right]$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^+\Psi\right) = -c\overrightarrow{\nabla}.\left(\Psi^+\overrightarrow{\alpha}\Psi\right). \tag{3.14}$$

Nous avons alors l'équation de continuité

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0, \tag{3.15}$$

où la densité $\boldsymbol{\rho}$ et le courant $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ sont maintenant donnée par

$$\boldsymbol{\rho} = \Psi^{+}\Psi \tag{3.16}$$

et

$$\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = c\Psi^{+}\overrightarrow{\alpha}\Psi. \tag{3.17}$$

Nous avons alors, pour $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\rho} = \Psi^{+}\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

Cela démontre un avantage de l'équation de Dirac par rapport à l'équation de Klein-Gordon, la densité $\boldsymbol{\rho}$ est définie positive et peut donc être interprétée comme une densité de probabilité.

3.3 Forme covariante de l'équation de Dirac

Afin de s'assurer que les dérivés de temps et d'espace sont multipliés par des matrices avec des propriétés algébriques similaires, nous multiplions l'équation Dirac

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\hbar c\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla}\Psi + \beta mc^2\Psi \tag{3.18}$$

par $\frac{1}{c}$ β pour obtenir

$$i\hbar\beta\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\hbar\beta\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla}\Psi + mc\Psi. \tag{3.19}$$

La dernière équation se réarrange comme

$$i\hbar\left(\beta\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla}\right)\Psi - mc\Psi = 0 \tag{3.20}$$

En introduisant les matrices γ^μ définies par

$$\gamma^0 = \beta \qquad \text{et} \qquad \gamma^k = \beta\alpha_k,$$

nous pouvons écrire la forme covariante de l'équation de Dirac pour une particule libre

$$[i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc]\,\Psi = 0. \tag{3.21}$$

ou bien

$$\left[\gamma^{\mu}\hat{P}_{\mu} - mc\right]\Psi = 0. \tag{3.22}$$

avec $\hat{P}_{\mu} = i\hbar\partial_{\mu}$. Il est très utile de constater que les matrices γ^{μ} vérifient la propriété fondamentale suivante

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{3.23}$$

Nous pouvons montrer aussi que

$$(\gamma^{\mu})^{+} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}. \tag{3.24}$$

La dernière propriété nous permet de dériver l'équation de Dirac adjointe. En prenant le conjugué de l'équation (3.21), nous obtenons l'équation

$$\left[-i\hbar\left(\partial_{\mu}\Psi^{+}\right)(\gamma^{\mu})^{+} - mc\Psi^{+}\right] = 0 \tag{3.25}$$

qui n'est pas covariante à cause de la non hermicité des matrices γ^{μ}. Pour avoir une équation covariante nous multiplions la dernière équation par γ^{0}

$$\left[-i\hbar\left(\partial_{\mu}\Psi^{+}\right)\gamma^{0}\gamma^{\mu} - mc\Psi^{+}\gamma^{0}\right] = 0. \tag{3.26}$$

En posant $\overline{\Psi} = \Psi^{+}\gamma^{0}$, nous obtenons

$$\left[i\hbar\partial_{\mu}\overline{\Psi}\gamma^{\mu} + mc\overline{\Psi}\right] = 0 \tag{3.27}$$

ou bien

$$\overline{\Psi}\left[i\hbar\overleftarrow{\partial_{\mu}}\gamma^{\mu} + mc\right] = 0, \tag{3.28}$$

avec $\overline{\Psi}\overleftarrow{\partial_{\mu}} = \partial_{\mu}\overline{\Psi}$. La dernière équation est l'équation de Dirac adjointe. Notons ici que l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme covariante $\partial_{\mu}\boldsymbol{j}^{\mu} = 0$, où $\boldsymbol{j}^{0} = c\boldsymbol{\rho} = c\overline{\Psi}\gamma^{0}\Psi$ et $\boldsymbol{j}^{k} = c\overline{\Psi}\gamma^{k}\Psi$. Nous avons alors

$$\boldsymbol{j}^{\mu} = c\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi. \tag{3.29}$$

Il est à noter que si β et α_{k} sont écrites dans la représentation standard, les matrices γ^{μ} s'écrivent

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{k} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{k} \\ -\sigma_{k} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Cependant, Il existe d'autres représentations qui satisfont l'algèbre de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad \tilde{\gamma}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.31}$$

La représentation standard est plus utile pour étudier les solutions de l'équation Dirac ainsi que sa limite non relativiste, tandis que la représentation de Weyl permet, de sa part, d'étudier le régime ultra-relativiste et les propriétés de l'équation Dirac pour des particules sans masses. Evidemment, nous pouvons passer d'une représentation à une autre à l'aide d'une transformation de la forme

$$\tilde{\gamma}^\mu = U^{-1}\gamma^\mu U. \tag{3.32}$$

3.4 Particule au repos

Considérons maintenant la solution de l'équation de Dirac pour une particule au repos où $\vec{p} = 0$. Dans le référentiel propre de la particule l'équation de Dirac se réduit à

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \beta mc^2 \Psi. \tag{3.33}$$

Cherchons des solutions de la forme

$$\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\Phi \tag{3.34}$$

où E_0 est l'énergie de la particule au repos et Φ est un vecteur à 4 composantes. En substituant l'équation (3.34) dans (3.33), nous obtenons pour Φ, l'équation

$$\beta\Phi = \frac{E_0}{mc}\Phi.$$

La colonne Φ est donc un vecteur propre de la matrice β avec la valeur propre $\frac{E_0}{mc}$, mais comme nous l'avons déja vu, les valeurs propre de la matrice β sont ± 1 et ainsi l'énergie E_0 a deux valeurs possibles

$$E_0 = \pm mc \tag{3.35}$$

Comme la matrice β est diagonale dans la représentation standard, ses vecteurs propres associés à l'énergie positive sont

$$u(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u(0,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs propres associés à l'énergie négative sont

$$v\,(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v\,(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors quatre solutions plutôt que deux comme dans l'équation de Klein-Gordon. A première vue, l'équation de Dirac semble avoir aggravé la situation avec des solutions supplémentaires. Nous verrons par la suite que ces solutions supplémentaires ont une signification physique importante. Le doublement des états d'énergie positive et négative représente une certaine dégénérescence associée à un nouveau degré de liberté. Il est naturel de penser que cette dégénérescence est très susceptible d'avoir un lien avec le moment cinétique de spin qui est un moment cinétique purement quantique. En fait, ce sont les propriétés particulières des matrices α, ressemblant à celles des matrices σ, qui nous ont conduit à associer ce degré de liberté avec le spin.

Exercice 5

Les matrices de Pauli satisfont les deux relations suivantes

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{3.36}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.37}$$

on définit les matrices $\mathbf{\Sigma}_k$ par

$$\mathbf{\Sigma}_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \qquad \text{ou bien} \quad \tilde{\mathbf{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices $\mathbf{\Sigma}_k$ satisfont les mêmes relations que σ_i

$$\{\mathbf{\Sigma}_i, \mathbf{\Sigma}_j\} = 2\delta_{ij} \tag{3.38}$$

$$[\mathbf{\Sigma}_i, \mathbf{\Sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\mathbf{\Sigma}_k \tag{3.39}$$

2. Montrer les propriétés suivantes

$$\left(\vec{\sigma}.\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}.\vec{B}\right) = \vec{A}.\vec{B} + i\vec{\sigma}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \tag{3.40}$$

$$\left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}.\vec{A}\right)\left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}.\vec{B}\right) = \vec{A}.\vec{B} + i\tilde{\mathbf{\Sigma}}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \tag{3.41}$$

$$\left(\tilde{\alpha}.\vec{A}\right)\left(\tilde{\alpha}.\vec{B}\right) = \vec{A}.\vec{B} + i\tilde{\mathbf{\Sigma}}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right). \tag{3.42}$$

3. En déduire que

$$\left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}.\vec{p}\right)^2 = (\ \tilde{\alpha}.\vec{p})^2 = p^2 \tag{3.43}$$

$$\left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}.\vec{r}\right)^2 = (\tilde{\alpha}.\vec{r})^2 = r^2. \tag{3.44}$$

3.5 Conservation du moment cinétique

3.5.1 Moments cinétiques

Nous pouvons alors définir pour la particule de Dirac deux moments cinétiques. Le premier est le moment cinétique de spin défini par

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

avec la relation de commutation des composantes

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k. \tag{3.45}$$

Nous définissons aussi le moment cinétique orbital de la particule qui s'exprime en fonction des composantes du vecteur position $\overrightarrow{r}$ et du vecteur impulsion $\overrightarrow{p}$ du système

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \tag{3.46}$$

Ses composantes sont données par

$$L_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k \tag{3.47}$$

Comme les opérateurs $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$ vérifient la loi de commutation

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j\ ] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{3.48}$$

nous pouvons voir que les composantes L_i satisfont à la relation de commutation

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \tag{3.49}$$

L'importance du moment cinétique orbital en mécanique quantique non relativiste vient de sa conservation au cours du temps pour une particule libre où une particule soumise à un potentiel central. Dans ce cas nous avons

$$[L_i, H_{NR}] = \left[L^2, H_{NR}\right] = 0. \tag{3.50}$$

Cependant, en mécanique quantique relativiste *à la Dirac* le moment cinétique orbital n'est pas une constante de mouvement. Dans le paragraphe suivant, nous étudions la bonne constante de mouvement.

3.5.2 Constantes de mouvement

Notons d'bord que lorsque on se restreint à l'espace habituelle à 3 dimensions avec les vecteurs $\vec{p}$, $\vec{L}$, $\vec{S}$, et $\vec{r}$, le fait qu'un indice sur les composantes soit supérieur ou inférieur n'a aucune signification. Considérons maintenant le hamiltonien de Dirac

$$\mathcal{H} = c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2$$

et calculons le commutateur $\left[\mathcal{H}, \vec{L}\right]$. Nous avons

$$[\mathcal{H}, L_i] = \left[c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2, L_i\right]$$

Comme $\vec{\alpha}.\vec{p} = \alpha_j p_j$, avec une sommation sur j, nous obtenons

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}, L_i] &= [c\vec{\alpha}.\vec{p}, L_i] \\
&= c\epsilon_{ihk}\alpha_j\,[p_j, x_h p_k] \\
&= -c\epsilon_{ihk}\alpha_j\,[x_h, p_j]\,p_k \\
&= -i\hbar c\epsilon_{ihk}\alpha_j\,[\delta_{hj}]\,p_k \\
&= -i\hbar c\epsilon_{ijk}\alpha_j p_k \\
&= -i\hbar c\,(\vec{\alpha}\times\vec{p})_i
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\left[\mathcal{H}, \vec{L}\right] = -i\hbar c\,(\vec{\alpha}\times\vec{p})\,. \tag{3.51}$$

Il bien claire que $\vec{L}$ n'est pas une constante de mouvement. Considérons maintenant le commutateur $\left[\mathcal{H}, \vec{S}\right]$ où $\vec{S}$ est l'opérateur de spin. Nous avons

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}, S_i] &= \left[c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2, S_i\right] \\
&= \frac{\hbar}{2}\left[c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2, \Sigma_i\right]
\end{aligned}$$

Les matrice Σ_i commutent avec β et par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}, S_i] &= c\frac{\hbar}{2}p_j [\alpha_j, \Sigma_i] \\
&= \frac{\hbar c}{2}p_j \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{\hbar c}{2}p_j \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_j, \sigma_i] \\ [\sigma_j, \sigma_i] & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété des matrices de Pauli

$$[\sigma_j, \sigma_i] = 2i\epsilon_{jik}\sigma_k \tag{3.52}$$

nous obtenons encore

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}, S_i] &= \frac{\hbar c}{2}p_j \begin{pmatrix} 0 & 2i\epsilon_{jik}\sigma_k \\ 2i\epsilon_{jik}\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\hbar c\epsilon_{jik}p_j\alpha_k \\
&= i\hbar c\epsilon_{ikj}\alpha_k p_j \\
&= i\hbar c\,(\vec{\alpha} \times \vec{p})_i
\end{aligned}$$

Nous avons alors le résultat

$$\left[\mathcal{H}, \vec{S}\right] = i\hbar c\,(\vec{\alpha} \times \vec{p}) \tag{3.53}$$

qui montre que $\vec{S}$, comme $\vec{L}$, n'est pas une constante de mouvement. Cependant, nous pouvons voir que

$$\left[\mathcal{H}, \vec{L} + \vec{S}\right] = \left[\mathcal{H}, \vec{L}\right] + \left[\mathcal{H}, \vec{S}\right] = -i\hbar c\,(\vec{\alpha} \times \vec{p}) + i\hbar c\,(\vec{\alpha} \times \vec{p}) = 0,$$

ce qui montre que le moment cinétique total défini par $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est conservé.

3.6 Equation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique

3.6.1 Couplage minimum

Comme dans le cas de Klein-Gordon, nous pouvons généraliser l'équation de Dirac pour rendre compte de l'interaction de la particule relativiste avec le champ électromagnétique en utilisant le principe de couplage minimum. Pour une particule de charge e, soumise à un champ électromagnétique, nous faisons la substitution

$$\hat{p}_\mu \to \pi_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu. \tag{3.54}$$

avec le quadri-potentiel $A^\mu = \left(\phi, \overrightarrow{A}\right)$. L'équation de Dirac prend alors la forme

$$[\gamma^\mu \pi_\mu - mc]\,\Psi = 0.$$

ou bien

$$[i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc]\,\Psi = 0. \tag{3.55}$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu.$$

Dans ce cas, le principe de couplage minimum consiste à ajouter le terme d'interaction $H_{int} = e\phi - ec\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{A}$ à l'hamiltonien libre lorsque la particule est soumise au champ A^μ

$$H_{libre} \to H_{libre} + H_{int}. \tag{3.56}$$

avec

$$H_{int} = e\phi - ec\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{A} = ec\beta\gamma^\mu A_\mu \tag{3.57}$$

Nous avons alors la forme hamiltonienne de l'équation de Dirac en presence d'un champ électromagnétique

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[c\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\pi} + \beta mc^2 + e\phi\right]\Psi. \tag{3.58}$$

3.6.2 Equation de Dirac quadratique

Partons de la forme covariante de l'équation de Dirac

$$(\gamma^\mu \pi_\mu - mc)\,\Psi(x) = 0$$

et posons

$$\Psi(x) = (\gamma^\nu \pi_\nu + mc)\,\psi(x)$$

pour obtenir pour le nouveau spineur $\psi(x)$

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu \pi_\mu - mc)(\gamma^\nu \pi_\nu + mc)\,\psi(x) &= 0 \\
\left(\gamma^\nu \pi_\nu\, \gamma^\mu \pi_\mu - m^2c^2\right)\psi(x) &= 0 \\
\left(\gamma^\nu \gamma^\mu\, \pi_\nu \pi_\mu - m^2c^2\right)\psi(x) &= 0 \\
\left(\frac{1}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu\, \pi_\nu \pi_\mu + \frac{1}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu\, \pi_\nu \pi_\mu - m^2c^2\right)\psi(x) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu$ nous pouvons avoir

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu\right)\ \pi_\nu\pi_\mu + \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\ \pi_\nu\pi_\mu - m^2c^2\right]\psi\left(x\right) &= 0\\
\left[\left(\eta^{\mu\nu}\pi_\nu\pi_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\pi_\nu\pi_\mu\right)\ + \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\ \pi_\nu\pi_\mu - m^2c^2\right]\psi\left(x\right) &= 0\\
\left[\pi^\mu\pi_\mu\ + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\ \left[\pi_\mu, \pi_\nu\right] - m^2c^2\right]\psi\left(x\right) &= 0
\end{aligned}$$

Calculons le commutateur $[\pi_\mu, \pi_\nu]$

$$\begin{aligned}
\left[\pi_\mu, \pi_\nu\right] &= \left[i\hbar\partial_\mu - eA_\mu, i\hbar\partial_\nu - eA_\nu\right]\\
&= \left[i\hbar\partial_\mu, -eA_\nu\right] + \left[-eA_\mu, i\hbar\partial_\nu\right]\\
&= -i\hbar e\left[\partial_\mu, A_\nu\right] + i\hbar e\left[\partial_\nu, A_\mu\right]\\
&= -i\hbar e\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\\
&= -i\hbar e F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Nous arrivons alors à l'équation

$$\left[\pi^\mu\pi_\mu\ - \frac{1}{2}i\hbar e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} - m^2c^2\right]\psi\left(x\right) = 0$$

Il est claire que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}i\hbar\frac{e}{c}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}i\hbar e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}i\hbar e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\\
&= \frac{1}{4}i\hbar e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}i\hbar e\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\mu\nu}\\
&= \hbar\frac{e}{2}\frac{1}{2}i\left[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right]F_{\mu\nu}\\
&= \hbar\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'équation de Dirac quadratique

$$\left[\pi^\mu\pi_\mu\ - m^2c^2 - \frac{e\hbar}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi\left(x\right) = 0. \tag{3.59}$$

C'est l'équation de Klein Gordon plus un extra terme qui décrire l'interaction spin-champ. Pour montrer ça, écrivons d'abord la quantité $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ comme une somme de deux termes

$$\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{ij}F_{ij}$$

Le premier terme se developpe comme

$$\begin{aligned} 2\sigma^{0i}F_{0i} &= 2\frac{i}{2}\left[\gamma^0, \gamma^i\right](\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \\ &= 2i\gamma^0\gamma^i(\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \\ &= 2i\alpha_i\left(-\partial_0 A^i - \partial_i A_0\right) \\ &= 2i\alpha_i\frac{E_i}{c} \\ &= \frac{2i}{c}\vec{\alpha}.\vec{E} \end{aligned}$$

Le deuxième terme s'écrit

$$\sigma^{ij}F_{ij} = \sigma^{ij}\partial_i A_j - \sigma^{ij}\partial_j A_i$$

Comme la matrice σ^{ij} est antisymétrique, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}F_{ij} &= \sigma^{ij}\partial_i A_j - \sigma^{ji}\partial_i A_j \\ &= \sigma^{ij}\partial_i A_j + \sigma^{ij}\partial_i A_j \\ &= 2\sigma^{ij}\partial_i A_j. \end{aligned}$$

Maintenant nous écrivons

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \frac{i}{2}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] \\ &= \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ici, nous utilisons la propriété des matrices de Pauli

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

pour obtenir

$$\sigma^{ij} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}\Sigma_k.$$

Nous avons alors

$$\sigma^{ij}F_{ij} = 2\varepsilon_{ijk}\Sigma_k\partial_i A_j$$

ce qui nous donne

$$\sigma^{ij}F_{ij} = -2\vec{\Sigma}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = -2\vec{\Sigma}.\vec{B}.$$

En regroupant les deux termes nous obtenons le résultat

$$\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{2i}{c}\vec{\alpha}.\vec{E} - 2\vec{\Sigma}.\vec{B}. \tag{3.60}$$

L'équation quadratique de Dirac s'écrit alors comme

$$\left[\pi^{\mu}\pi_{\mu}^{2} - m^{2}c^{2} + e\hbar\vec{\Sigma}.\vec{B} - \frac{i}{c}e\hbar\vec{\alpha}.\vec{E}\right]\psi\left(x\right) = 0. \tag{3.61}$$

Là, nous voyons clairement l'intéraction du spin avec le champ magnétique $e\hbar\vec{\Sigma}.\vec{B}$. Plus de détails sur cette interaction serond considérés lorsque nous aborderons la limite non relativiste.

3.6.3 Exemple I : Le champ magnétique constant et homogène

Considérons un champ magnétique constant et homogène $\vec{B} = \mathcal{B}\ \vec{u}_z$. Nous avons dans ce cas

$$\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2\vec{\Sigma}.\vec{B} = -2\Sigma_z\mathcal{B}.$$

Soient χ_s les vecteurs propres de Σ_z avec les valeurs propres $s = \pm 1$. Nous avons alors on a alors

$$\psi\left(x\right) = \sum_{s}\psi_s\left(x\right)\chi_s$$

Dans ce cas $\psi_s\left(x\right)$ est la solution de l'équation

$$\left[\pi^{\mu}\pi_{\mu} - m^{2}c^{2} + se\hbar\mathcal{B}\right]\psi_s\left(x\right) = 0$$

Posons

$$m^{*2}c^{2} = m^{2}c^{2} - se\hbar\mathcal{B}$$

pour avoir

$$\left[\pi^{\mu}\pi_{\mu} - m^{*2}c^{2}\right]\psi_s\left(x\right) = 0.$$

La dernière équation est identique à l'équation de Klein Gordon avec la masse m^*, suivant les résultats de la première partie nous avons

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\left(2n+1\right)\hbar ce\mathcal{B} + c^{2}p_z^{2} + m^{*2}c^{4}} \\ &= \sqrt{\left(2n+1-s\right)\hbar ce\mathcal{B} + c^{2}p_z^{2} + m^{2}c^{4}}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Comme $s = \pm 1$, nous pouvons voir que ces énergies sont, à l'exception de celle qui correpond à $n = 0$ et $s = -1$, deux fois dégénérées.

3.6.4 Le champ électrique constant et homogène

Voir TD

3.6.5 La superposition d'un champ électrique et un champ magnétique

Considérons maintenant une particule relativiste de spin $\frac{1}{2}$ et de charge e soumise à la superposition d'un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Les deux champs sont supposés constants et uniformes. Ici, c'est seulement sur le terme d'interaction spin-champ électromagnétique que se focalise notre attention. Une fois ce terme est diagonalisé, le problème se ramène, comme dans le cas du champ magnétique pur, à l'étude de l'équation de Klein Gordon avec la superposition des deux champs. Prenons le carré de l'équation (3.60)

$$\begin{aligned}
(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 &= \left(\frac{2i}{c}\vec{\alpha}.\vec{E} - 2\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2i}{c}\right)^2 \left(\vec{\alpha}.\vec{E} + ic\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2i}{c}\right)^2 \left[\left(\vec{\alpha}.\vec{E}\right)^2 + \left(ic\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)^2 + ic\left(\vec{\alpha}.\vec{E}\right)\left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right) + ic\left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)\left(\vec{\alpha}.\vec{E}\right)\right]
\end{aligned}$$

D'abord, nous constatons dans les deux premirers termes que $\left(\vec{\alpha}.\vec{E}\right)^2 = E^2$ et $\left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)^2 = B^2$. Ensuite, afin de simplifier le troisième et le quatrième termes, nous introduisons la matrice γ^5 définie par

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{3.63}$$

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, la matrice γ^5 vérifie plusieurs propriétés utiles. Parmi ces propriétés, ce qui nous est utile ici est le fait que $\vec{\alpha} = \gamma^5\vec{\Sigma}$ et $\left[\gamma^5, \vec{\Sigma}\right] = 0$. Ces deux propriétés nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\alpha}.\vec{E}\right)\left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right) + \left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)\left(\vec{\alpha}.\vec{E}\right) &= \gamma^5\left[\left(\vec{\Sigma}.\vec{E}\right)\left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right) + \left(\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)\left(\vec{\Sigma}.\vec{E}\right)\right] \\
&= \gamma^5\left[2\vec{E}.\vec{B} + \vec{\Sigma}.\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) + \vec{\Sigma}.\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)\right] \\
&= 2\gamma^5\vec{E}.\vec{B}.
\end{aligned}$$

En conséquence, nous avons

$$(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = -\frac{4}{c^2}\left(E^2 - c^2B^2 + 2ic\gamma^5\vec{E}.\vec{B}\right)$$

qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = -\frac{4}{c^2}\begin{pmatrix} E^2 - c^2B^2 & 2ic\vec{E}.\vec{B} \\ 2ic\vec{E}.\vec{B} & E^2 - c^2B^2 \end{pmatrix}$$

où $E^2 - c^2B^2$ et $\vec{E}.\vec{B}$ sont les invariants de Lorentz pour le champ électromagnétique. Introduisons deux nombres réels a et b tels que

$$\begin{aligned} ab &= \vec{E}.\vec{B} \\ a^2 - c^2b^2 &= E^2 - c^2B^2. \end{aligned}$$

La solution du dernier système d'équations est

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{4c^2\left(\vec{E}.\vec{B}\right)^2 + (E^2 - c^2B^2)^2} + \frac{1}{2}(E^2 - c^2B^2)} \\ cb &= \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{4c^2\left(\vec{E}.\vec{B}\right)^2 + (E^2 - c^2B^2)^2} - \frac{1}{2}(E^2 - c^2B^2)}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons

$$(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = -\frac{4}{c^2}\begin{pmatrix} a^2 - c^2b^2 & 2icab \\ 2icab & a^2 - c^2b^2 \end{pmatrix}$$

et ainsi, nous obtenons les valeurs propres de la matrice $(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2$

$$\begin{aligned} &\frac{4}{c^2}(ia - cb)^2 \\ &\frac{4}{c^2}(ia + cb)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ sont alors les racines carrés des deux valeurs propres précédentes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2i}{c}a + 2b \\ \lambda_2 &= -\frac{2i}{c}a - 2b \\ \lambda_3 &= \frac{2i}{c}a - 2b \\ \lambda_4 &= -\frac{2i}{c}a + 2b. \end{aligned}$$

Il est à noter que pour $\vec{E}.\vec{B} \neq 0$, il est préférable de travailler dans un référentiel où les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et les quantités a et b sont tout simplement $a = E$ et $b = B$. Si dans un référentiel $\mathcal{R}$ les deux champs sont perpendiculaires $\vec{E}.\vec{B} = 0$, il est préférable de travailler dans un référentiel $\mathcal{R}'$, dont les champs vérifient la condition $\vec{E}'.\vec{B}' = 0$, mais l'un des deux vecteurs est nul. Ceci dépend du signe de $E^2 - c^2B^2$; Si $E^2 - c^2B^2 > 0$, le problème se ramène à un champ électrique pur et si $E^2 - c^2B^2 < 0$, le problème se ramène à un champ magnétique pur.

3.7 Limite non relativiste

En étudiant la limite non relativiste de l'équation de Dirac, nous pouvons montrer un résultat important de l'équation de Dirac, à savoir ; le moment magnétique de l'électron. Nous considérons des vecteurs $\vec{\pi}$, $\tilde{\alpha}$, $\vec{p}$, $\vec{A}$, $\vec{L}$, et $\vec{r}$, dans un espace euclidien à 3 dimensions où la position de l'indice n'a aucune importance. Pour étudier la limite non relativiste de l'équation de Dirac, considérons sa forme hamiltonienne

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[c\left(\tilde{\alpha}.\vec{\pi}\right) + \beta mc^2 + e\phi\right]\Psi, \tag{3.64}$$

et posons ensuite, comme dans le cas de Klein Gordon

$$\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\psi\left(\vec{r},t\right).$$

Il vient alors

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\vec{r},t\right) = \left[c\left(\tilde{\alpha}.\vec{\pi}\right) + \beta mc^2 - mc^2 + e\phi\right]\psi\left(\vec{r},t\right), \tag{3.65}$$

avec

$$c\left(\tilde{\alpha}.\vec{\pi}\right) + \beta mc^2 - mc^2 + e\phi = \begin{pmatrix} e\phi & c\vec{\sigma}.\vec{\pi} \\ c\vec{\sigma}.\vec{\pi} & e\phi - 2mc^2 \end{pmatrix}.$$

En posons $\psi\left(\vec{r},t\right) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, nous obtenons

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\phi & c\vec{\sigma}.\vec{\pi} \\ c\vec{\sigma}.\vec{\pi} & e\phi - 2mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{3.66}$$

d'où le système d'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = e\phi\varphi + c\vec{\sigma}.\vec{\pi}\chi \tag{3.67}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi = c\vec{\sigma}.\vec{\pi}\varphi + \left(e\phi - 2mc^2\right)\chi, \tag{3.68}$$

Dans la limite non relativiste, nous avons $i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} << 2mc^2\chi$ et $e\phi\chi << 2mc^2\chi$ et par conséquent, l'équation (3.68) qui peut s'écrire comme

$$\frac{1}{2mc^2}\left(i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} - e\phi\chi + 2mc^2\chi\right) = \frac{\vec{\sigma}.\vec{\pi}}{2mc}\varphi,$$

se réduit à

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}.\vec{\pi}}{2mc}\varphi.$$

En substituant la dernière équation dans (3.67), nous obtenons

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi})}{2m} + e\phi\right]\varphi$$

La quantité $(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi})$ peu s'écrire comme

$$(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi}) = \sigma_i\sigma_j\pi_i\pi_j$$

En utilisant la propriété suivante des matrices de Pauli

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi}) &= \delta_{ij}\pi_i\pi_j + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\pi_i\pi_j \\
&= \vec{\pi}^2 + \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left[\pi_i, \pi_j\right]
\end{aligned}$$

Le commutateur $[\pi_i, \pi_j]$ se calcule

$$\begin{aligned}
[\pi_i, \pi_j] &= [-i\hbar\partial_i - eA_i, -i\hbar\partial_j - eA_j] \\
&= ie\hbar\left[\partial_i, A_j\right] + ie\hbar\left[A_i, \partial_j\right] \\
&= ie\hbar\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right)
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_k\left[\pi_i, \pi_j\right] &= -\frac{e\hbar}{2}\sigma_k\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j - \varepsilon_{ijk}\partial_j A_i\right) \\
&= -e\hbar\sigma_k\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j\right) \\
&= -e\hbar\vec{\sigma}.\vec{B}
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - e\hbar\vec{\sigma}.\vec{B}$$

Finalement nous obtenons pour φ dans la limite non relativiste l'équation de Pauli-Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{\vec{\pi}^2}{2m} + e\phi - 2\frac{e}{2m}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}.\vec{B}\right]\varphi$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} + e\phi - g_e\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}.\vec{B}\right]\varphi$$

où $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ est le magnéton de Bohr et g_e est facteur gyromagnétique de l'électron.Ce résultat est parmi les succés de l'équation de Dirac. La valeur g_e dérivée de l'équation de Dirac dans sa limite non relativiste,

$$g_e|_{\mathrm{Dirac}} = 2, \tag{3.69}$$

est une bonne approximation de la valeur mésurée expérimentalement

$$g_e|_{\exp} \simeq 2.002\,3\,. \tag{3.70}$$

De plus si nous écrivons $\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2$ sous la forme

$$\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 = \left(-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}\right)^2 = -\hbar^2\Delta + ie\hbar\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{A}.\vec{\nabla}\right) + e^2\left(\vec{A}\right)^2$$

et nous prenons $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$, nous obtenons l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \mathcal{W}_z\right]\varphi$$

avec le terme habituel de Zeeman

$$\mathcal{W}_z = -\frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{L} + g_e\vec{S}\right).\vec{B}$$

Il est à noter, finalement, que dans cette dérivation de l'équation de Pauli-Shcrodinger nous avons négligé la dérivée par rapport au temps de la petite composante. Cependant la présence des dérivées d'ordre supérieur par rapport au temps dans l'équation de mouvement n'est pas toujours négligeable. Une approche plus rigoureuse de la limite non relativiste est offerte par la transformation Foldy-Wouthuysen qui est une transformation de base, $\psi \to U_{FW}\psi$ pour découpler la petite composante de la grande composante.

Chapitre 4

Equation de Dirac II

4.1 Introduction

Comparée avec celles de Schrödinger et de Klein Gordon, l'équation de Dirac avec sa forme matricielle et son lien avec le spin $1/2$ semble très difficile tant à manier qu'à résoudre, notamment pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec les équations différentielles matricielles. C'est ainsi que nous avons divisé l'étude de l'équation de Dirac en deux chapitres. Dans le chapitre précédent nous avons voulu montrer la dérivation de l'équation de Dirac telle qu'elle est établie par Dirac. En plus de fournir quelques démonstrations élémentaires afin de s'habituer à faire des calculs avec une telle équation matricielle, nous avons montré un peu de ces aspects physiques les plus fondamentaux. Les objectifs du chapitre précédents étant atteints, nous concentrons, dans le présent chapitre, notre attention sur quelques aspects mathématiques de l'équation de Dirac. Nous considérerons essentiellement les trois points suivants :

1. Les solutions libres et leurs propriétés
2. L'algèbre de Clifford et les 16 matrices de Dirac.
3. Covariance de l'équation de Dirac et transformations des spineurs.

En outre nous introduirons des calculs qui sont très utiles en théorie quantique des champs.

4.2 Solutions de Dirac pour une particule libre

Comme dans le cas de l'équation de Klein Gordon, le problème le plus simple à résoudre pour l'équation de Dirac est celui de la particule libre. Ce sujet particulier, au demeurant simple, est extrêmement utile en physique quantique relativiste. En fait, certaines des caractéristiques les plus profondes de l'équation de Dirac sont bien illustrées par les solutions de la particule libre. De plus, les mathématiques impliquées dans l'étude de ce problème ne sont généralement pas aussi impliquées que nécessaire pour résoudre les problèmes impliquant une particule soumise à l'action d'un champ électromagnétique. Un autre avantage du problème de la particule libre est que ses solutions sont particulièrement utiles pour interpréter la théorie quantique du champ spinoriel. Il est donc très instructif de considérer en détail la résolution de l'équation de Dirac pour une particule libre.

4.2.1 Etats d'énergie positive et d'énergie négative

Une particule libre est toujours décrite par une onde plane. Pour l'équation de Dirac nous écrivons cette onde sous la forme

$$\Psi = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) \Phi(p) \tag{4.1}$$

où $\Phi(p)$ est une colonne à quatre composantes (un spineur) et $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \overrightarrow{p}\right)$. En insérant (4.1) dans l'équation de Dirac nous obtenons que le spineur $\Phi(p)$ vérifie l'équation

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\, \Phi(p) = 0. \tag{4.2}$$

Pour avoir des solutions non nulles, le déterminant de la matrice $(\gamma^\mu p_\mu - mc)$ doit être nul. Explicitement, la matrice $(\gamma^\mu p_\mu - mc)$ s'écrit

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\left(E - mc^2\right) & 0 & -p_z & ip_y - p_x \\ 0 & \frac{1}{c}\left(E - mc^2\right) & -p_x - ip_y & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -\frac{1}{c}\left(E + mc^2\right) & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & -\frac{1}{c}\left(E + mc^2\right) \end{pmatrix}$$

et son determinant est donc

$$\det\left(\gamma^\mu p_\mu - mc\right) = \left(\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 - m^2 c^2\right)^2. \tag{4.3}$$

Dans ce cas, nous avons

$$\det\left(\gamma^\mu p_\mu - mc\right) = 0 \Longrightarrow \frac{E^2}{c^2} = |\vec{p}|^2 + m^2 c^2, \tag{4.4}$$

ce qui implique les deux solutions positive et negative pour les énergie,

$$E = \pm\sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4} = \pm E_p. \tag{4.5}$$

En posant $\Phi(p) = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}$, où χ et φ sont des bispineurs (des colonnes à 2 composantes), nous obtenons l'équation

$$\begin{pmatrix} E - mc^2 & -c\, \vec{\sigma}.\vec{p} \\ c\, \vec{\sigma}.\vec{p} & -E - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = 0, \tag{4.6}$$

ou bien

$$\begin{cases} \left(E - mc^2\right)\chi = c\left(\vec{\sigma}.\vec{p}\right)\varphi \\ \\ c\ \left(\vec{\sigma}.\vec{p}\right)\chi = \left(E + mc^2\right)\varphi. \end{cases} \tag{4.7}$$

Nous avons alors, soit

$$\chi = \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E - mc^2}\varphi \tag{4.8}$$

soit, de manière équivalente,

$$\varphi = \frac{c\ \left(\vec{\sigma}.\vec{p}\right)}{E + mc^2}\chi. \tag{4.9}$$

Pour $E \geq mc^2$, $(E = E_p = \sqrt{\left|\vec{p}\right|^2 c^2 + m^2c^4})$, nous prenons $\varphi = \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p + mc^2}\chi$ pour avoir

$$\Phi_+\left(\vec{p}\right) = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p + mc^2}\chi \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

où χ est une colonne à 2 composantes quelconque. Nous avons donc deux solutions linéairement indépendantes

$$u\left(\vec{p}, s\right) = N_+ \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p + mc^2}\chi_s \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

avec $s = 1, 2$ et $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $E < mc^2$, $(E = -E_p)$ nous prenons $\chi = \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E - mc^2}\varphi$ pour avoir

$$\Phi_-\left(\vec{p}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p + mc^2}\varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

et par conséquent, nous obtenons également deux solutions linéairement indépendantes

$$v\left(\vec{p}, s\right) = \Phi_-\left(-\vec{p}\right) = N_- \begin{pmatrix} \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p + mc^2}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Nous avons alors, comme il était prevu, deux solutions à énergie négative et deux solutions à énergie positive.

4.2.2 Normalisation

Les spineurs $u\left(\vec{p}, s\right)$ et $v\left(\vec{p}, s\right)$ se normalisent de la manière suivantes

$$\bar{u}\left(\vec{p}, s\right) u\left(\vec{p}, s\right) = 1 \tag{4.14}$$

$$\bar{v}\left(\vec{p}, s\right) v\left(\vec{p}, s\right) = -1 \tag{4.15}$$

Le spineur adjoint $\bar{u}(\vec{p},s)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\vec{p},s) &= u^{+}(\vec{p},s)\,\gamma^{0} \\
&= N_{+}\begin{pmatrix} \chi_s^{+} & \chi_s^{+}\frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= N_{+}\begin{pmatrix} \chi_s^{+} & -\chi_s^{+}\frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\vec{p},s)\,u(\vec{p},s) &= N_{+}^{2}\begin{pmatrix} \chi_s^{+} & -\chi_s^{+}\frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2}\chi_s \end{pmatrix} \\
&= N_{+}^{2}\left(1-\frac{c^2\ |\vec{p}|^2}{(E_p+mc^2)^2}\right)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété $(\vec{\sigma}.\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ et le fait que

$$\chi_s^{+}\chi_s = 1. \tag{4.17}$$

Nous pouvons également écrire

$$\begin{aligned}
1-\frac{c^2\ |\vec{p}|^2}{(E_p+mc^2)^2} &= \frac{(E_p+mc^2)^2 - \ |\vec{p}|^2 c^2}{(E_p+mc^2)^2} \\
&= \frac{E_p^2+m^2c^4+2E_pmc^2 - \ |\vec{p}|^2 c^2}{(E_p+mc^2)^2} \\
&= \frac{2m^2c^4+2E_pmc^2}{(E+mc^2)^2} \\
&= \frac{2mc^2}{E_p+mc^2}.
\end{aligned}$$

et, ainsi, la condition de normalisation du spineur $u(\vec{p},s)$ se ramène à l'équation

$$N_{+}^{2}\left(\frac{2mc^2}{E_p+mc^2}\right) = 1, \tag{4.18}$$

ce qui nous donne la constante de normalisation

$$N_{+} = \sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}}. \tag{4.19}$$

De la même manière nous obtenons pour $v(\vec{p},s)$

$$\bar{v}(\vec{p},s) = N_{-}\begin{pmatrix} \chi_s^{+}\frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} & -\chi_s^{+} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

et

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(\vec{p},s)\,v(\vec{p},s) &= N_-^2 \begin{pmatrix} \chi_s^+ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} & -\chi_s^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \\
&= N_-^2 \left(\chi_s^+ \left(\frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} \right)^2 \chi_s - \chi_s^+ \chi_s \right) \\
&= N_-^2 \left(\frac{c^2\ |\vec{p}|^2}{(E_p+mc^2)^2} - 1 \right) \\
&= -N_-^2 \left(\frac{2mc^2}{E_p+mc^2} \right)
\end{aligned}
$$

Nous remarquons ici que la quantité $\bar{v}(\vec{p},s)\,v(\vec{p},s)$ est négative ce qui explique le signe $(-)$ dans l'équation (4.15). La constante N_- est donc

$$
N_- = \sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}}. \tag{4.21}
$$

D'une manière générale les bispineurs χ_s vérifient la condition d'orthonormalisation

$$
\chi_s^+ \chi_{s'} = \delta_{ss'} \tag{4.22}
$$

et par conséquent, les spineurs $u(\vec{p},s)$ et $v(\vec{p},s)$ vérifient alors

$$
\bar{u}(\vec{p},s)\,u(\vec{p},s') = \delta_{ss'} \tag{4.23}
$$

$$
\bar{v}(\vec{p},s)\,v(\vec{p},s') = -\delta_{ss'}. \tag{4.24}
$$

De plus nous pouvons voir que

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(\vec{p},s)\,u(\vec{p},s') &= N_+N_- \begin{pmatrix} \chi_s^+ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2} & -\chi_s^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2}\chi_{s'} \end{pmatrix} \\
&= \chi_s^+ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2}\chi_{s'} - \chi_s^+ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_p+mc^2}\chi_{s'} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Il vient alors

$$
\bar{u}(\vec{p},s)\,v(\vec{p},s') = \bar{v}(\vec{p},s)\,u(\vec{p},s') = 0. \tag{4.25}
$$

Notons à la fin de ce paragraphe que, pour $\vec{p} = \vec{0}$, nous obtenons les solutions associées à la particule au repos

$$
u\left(\vec{0},s\right) = \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad v\left(\vec{0},s\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix}.
$$

Nous pouvons montrer que

$$u(\vec{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_p + mc^2)}} (\gamma^\mu p_\mu + mc)\, u\left(\vec{0}, s\right) \tag{4.26}$$

$$v(\vec{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_p + mc^2)}} (-\gamma^\mu p_\mu + mc)\, v\left(\vec{0}, s\right). \tag{4.27}$$

4.2.3 Projecteurs sur les états d'énergie positive et d'énergie négative

Les projecteurs sur les états d'énergie positive et négative sont définis par

$$\Gamma_+ = \sum_s u(\vec{p}, s)\, \bar{u}(\vec{p}, s) \tag{4.28}$$

$$\Gamma_- = -\sum_s v(\vec{p}, s)\, \bar{v}(\vec{p}, s) \tag{4.29}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_s u(\vec{p}, s)\, \bar{u}(\vec{p}, s) &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \sum_s \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2}\chi_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s^+ & -\chi_s^+ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \begin{pmatrix} \left(\sum_s \chi_s \chi_s^+\right) & -\left(\sum_s \chi_s \chi_s^+\right) \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \left(\sum_s \chi_s \chi_s^+\right) & -\frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \left(\sum_s \chi_s \chi_s^+\right) \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\sum_s \chi_s \chi_s^+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_s u(\vec{p}, s)\, \bar{u}(\vec{p}, s) &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} & -\frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \frac{c\,\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2mc^2} \begin{pmatrix} E + mc^2 & -c\,\vec{\sigma}.\vec{p} \\ c\,\vec{\sigma}.\vec{p} & -\frac{E^2 - m^2c^4}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2mc^2} \begin{pmatrix} E + mc^2 & -c\,\vec{\sigma}.\vec{p} \\ c\,\vec{\sigma}.\vec{p} & -E + mc^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
\sum_s u(\vec{p},s)\,\bar{u}(\vec{p},s) &= \frac{1}{2mc^2}\left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & mc^2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2mc^2}\left[E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - c\vec{p}.\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\,\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + mc^2\right] \\
&= \frac{1}{2mc^2}\left[cp^0\gamma^0 - c\vec{p}.\vec{\gamma} + mc^2\right].
\end{aligned}
$$

Il vient donc

$$\Gamma_+ = \sum_s u(\vec{p},s)\,\bar{u}(\vec{p},s) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}$$

Nous pouvons vérifier que Γ_+ est un projecteur $\Gamma_+^2 = \Gamma_+$; En prenant le carré de Γ_+,

$$\Gamma_+^2 = \left(\frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc}\right)^2 = \frac{(\gamma^\mu p_\mu)^2 + m^2c^2 + 2mc\gamma^\mu p_\mu}{4m^2c^2}$$

et en tenant compte du fait que

$$(\gamma^\mu p_\mu)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

nous pouvons avoir

$$\Gamma_+^2 = \frac{m^2c^2 + m^2c^2 + 2mc\gamma^\mu p_\mu}{4m^2c^2} = \frac{mc + \gamma^\mu p_\mu}{2mc} = \Gamma_+$$

Nous avons aussi pour le projecteur sur les états d'énergie négative les resultats suivants

$$\Gamma_- = \frac{-\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \tag{4.30}$$

$$\Gamma_-^2 = \Gamma_- \tag{4.31}$$

Evidement, les projecteurs Γ_+ et Γ_- vérifient les équations suivantes

$$\Gamma_+ + \Gamma_- = 1 \tag{4.32}$$

$$\Gamma_+\Gamma_- = \Gamma_-\Gamma_+ = 0 \tag{4.33}$$

et

$$\Gamma_+ u(\vec{p},s) = u(\vec{p},s) \tag{4.34}$$

$$\Gamma_+ v(\vec{p},s) = 0 \tag{4.35}$$

$$\Gamma_- v(\vec{p},s) = v(\vec{p},s) \tag{4.36}$$

$$\Gamma_- u(\vec{p},s) = 0 \tag{4.37}$$

Exercice 6

Montrer que

$$\bar{u}\left(\vec{p},s\right)\gamma^{\mu}u\left(\vec{p},s'\right)=\bar{v}\left(\vec{p},s'\right)\gamma^{\mu}v\left(\vec{p},s\right)=\frac{p^{\mu}}{mc}\delta_{ss'} \tag{4.38}$$

Exercice 7

Démontrer l'identité de Gordon

$$\bar{u}\left(\vec{p}',s\right)\gamma^{\mu}u\left(\vec{p},s\right)=\bar{u}\left(\vec{p}',s\right)\left[\frac{\left(p+p'\right)^{\mu}+i\sigma^{\mu\nu}\left(p'-p\right)_{\nu}}{2mc}\right]u\left(\vec{p},s\right) \tag{4.39}$$

4.3 Les seize matrices de Dirac

4.3.1 Définitions et propriétés fondamentales

Comme le nombre d'éléments d'une matrice (4×4) est de seize, il existe seize matrices (4×4) linéairement indépendantes formant une base complète de l'espace de toutes les matrices (4×4), c'est-à-dire que toute matrice (4×4) peut être écrite comme une combinaison linéaire de ces seize matrices. Considérons les seize matrices Γ^a, $a=1,...,16$ définies par

$$\Gamma^a\in\left\{\mathbb{I}_{(4x4)},\ \gamma^5,\ \gamma^{\mu},\ \gamma^5\gamma^{\mu},\ \sigma^{\mu\nu}\right\}$$

En plus de l'identité $\mathbb{I}_{(4x4)}$ et la matrice γ^5, nous avons 4 matrices γ^{μ}, avec $\mu=0,...,3$, et 4 matrices $\gamma^5\gamma^{\mu}$ et 6 matrices $\sigma^{\mu\nu}$. Nous appelons Γ^1 la matrice $\mathbb{I}_{(4x4)}$. Les autres matrices sont classées dans le tableau suivant

Γ^1	$\mathbb{I}_{(4x4)}$	$\mathbb{I}_{(4x4)}$					
$\Gamma^{2,3,4,5}$	γ^{μ}	γ^0	γ^1	γ^2	γ^3		
$\Gamma^{6,7,8,9,10,11}$	$\sigma^{\mu\nu}$	$i\gamma^0\gamma^1$	$i\gamma^0\gamma^2$	$i\gamma^0\gamma^3$	$i\gamma^1\gamma^2$	$i\gamma^1\gamma^3$	$i\gamma^2\gamma^3$
$\Gamma^{12,13,14,15}$	$\gamma^5\gamma^{\mu}$	$-i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	$-i\gamma^0\gamma^2\gamma^3$	$i\gamma^0\gamma^1\gamma^3$	$-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2$		
Γ^{16}	γ^5	$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$					

Par vérification directe, nous pouvons montrer les propriétes suivantes :

1. $\forall a,\left(\Gamma^a\right)^2=\pm1$
2. $\forall a,b\exists c/\Gamma^a\Gamma^b=\epsilon\Gamma^c$ avec $\epsilon^2=\pm1$
3. $\forall a\neq1,\mathbf{Tr}\left(\Gamma^a\right)=0$ et $\mathbf{Tr}\left(\Gamma^1\right)=4$

Ces trois propriétés sont suffisantes pour montrer que les 16 matrices Γ^a sont linéairement indépendantes. En fait, si nous supposons qu'une combinaison linéaire de ces matrices est nulle

$$\sum_{a=1}^{16} \lambda_a \Gamma^a = 0,$$

nous pouvons voir que le coefficient de la matrice identité est nul. Pour cela, il suffit de prendre la trace et de tenir en compte que $\mathbf{Tr}\left(\Gamma^1\right) = 4$ et $\mathbf{Tr}\left(\Gamma^a\right) = 0$ pour $a \neq 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^{16} \lambda_a \mathbf{Tr}\left(\Gamma^a\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 4\lambda_1 + 0 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

Prenons maintenant une matrice quelconque Γ^b et écrivons

$$\sum_{a=1}^{16} \lambda_a \mathbf{Tr}\left(\Gamma^a\right) = \lambda_b \Gamma^b + \sum_{a \neq b}^{16} \lambda_a \Gamma^a = 0.$$

En multipliant la dernière équation par Γ^b,

$$\lambda_b \left(\Gamma^b\right)^2 + \sum_{a \neq b}^{16} \lambda_a \Gamma^a \Gamma^b = 0$$

et en tenant compte des propriété 1 et 2, nous obtenons

$$\pm \lambda_b + \sum_{c}^{16} \epsilon \lambda_a \Gamma^c = 0.$$

En prenant la trace de la dernière équation nous obtenons $\lambda_b = 0$. Ce qui montre que les matrices Γ^a sont linéairement indépendantes.

Lemme 1

Une matrice (4×4) qui commute avec toutes les matrices γ^μ est l'identité multipliée par un nombre complexe. Nous avons

$$[M, \gamma^\mu] = 0 \forall \mu = \overline{0,3} \Leftrightarrow M = a\ \mathbb{I}_{(4x4)}$$

où a est nombre comlexe.

Théorème 1: Théorème fondamental de Pauli :

Si γ^μ et $\tilde{\gamma}^\mu$ sont deux systèmes de matrices (4×4) qui satisfont tous les deux aux mêmes relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \qquad \text{et} \qquad \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

il existe une matrice U non singulière [a] satisfaisant à la relation

$$\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}.$$

a. Une matrice non singulière U est telle que son déterminant ne soit pas nul et que par conséquent la matrice inverse U^{-1} existe.

Pour les démonstrations nous proposons au lecteur de voir l'article original de Pauli ; *W. Pauli, Annales de l'institut Henri Poincaré, Tome 6 (1936) no. 2, pp. 109-136.*

4.3.2 Formules utiles

Comme γ^μ vérifient l'algèbre de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

nous pouvons montrer les relations d'anticomutation suivantes

$$\begin{aligned}
\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} &= 0 \\
\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\nu\right\} &= 2i\gamma^5\sigma^{\mu\nu} \\
\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\sigma^{\alpha\beta}\right\} &= 2i\left(\eta^{\mu\beta}\gamma^5\gamma^\alpha - \eta^{\mu\alpha}\gamma^5\gamma^\beta\right).
\end{aligned}$$

Nous avons aussi les relations de commutation

$$\begin{aligned}
[\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= -2i\sigma^{\mu\nu} \\
\left[\gamma^\mu, \gamma^5\right] &= 2\gamma^\mu\gamma^5 \\
\left[\gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\nu\right] &= -\eta^{\mu\nu}\gamma^5 \\
\left[\gamma^\mu, \sigma^{\alpha\beta}\right] &= 2i\left(\eta^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha\right)
\end{aligned}$$

Les matrices $\sigma^{\mu\nu}$ satisfont également les relations de commutation suivantes

$$\begin{aligned}
\left[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\right] &= 0 \\
[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] &= 2i\left(\eta^{\nu\alpha}\gamma^\mu - \eta^{\mu\alpha}\gamma^\nu\right) \\
\left[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\alpha\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^5\gamma^\mu - \eta^{\alpha\mu}\gamma^5\gamma^\nu\right) \\
\left[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\gamma^\beta\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu\gamma^\beta - \eta^{\alpha\mu}\gamma^\nu\gamma^\beta + \eta^{\beta\nu}\gamma^\alpha\gamma^\mu - \eta^{\beta\mu}\gamma^\alpha\gamma^\nu\right) \\
\left[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\sigma^{\mu\beta} + \eta^{\mu\beta}\sigma^{\nu\alpha} - \eta^{\beta\nu}\sigma^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\sigma^{\nu\beta}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part nous avons par définition

$$\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu \tag{4.40}$$

et

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{4.41}$$

Nous pouvons alors démontrer les contractions suivantes

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma^\mu &= 4 \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4\eta^{\alpha\beta} \\
\gamma_\mu\sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu &= 0 \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\mu &= -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha
\end{aligned}$$

Dans certaines situations, nous avons besoin des propriétés de trace suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) &= 4\eta^{\alpha\beta} \\
\mathbf{Tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) &= 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tr}\left(\gamma^5\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^5\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^5\right) &= 0 \\
\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5\right) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Exercice 8

Démontrer toute propriétés, citée dans ce paragraphe.

Exercice 9

Soit $\boldsymbol{a}$ un quadri-vecteur de composantes a_μ. Montrer que

$$\mathbf{Tr}\left[\left(\not{p} + m\right)\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^5\not{a}\right)\gamma^5\gamma^\mu\right] = -2ma^\mu$$

où $\not{p} = \gamma^\alpha p_\alpha$ et $\not{a} = \gamma^\alpha a_\alpha$.

4.3.3 Ecriture d'une matrice quelconque de la base $\{\Gamma^a\}$

Comme les seize matrices Γ^a forment une base de l'espace vectoriel des matrices (4×4), chaque matrice M peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices Γ^a. Nous adoptons la notation suivante

$$M = S\ \mathbb{I}_{(4\mathrm{x}4)} + P\ \gamma^5 + V_\mu\ \gamma^\mu + A_\mu\ \gamma^5\gamma^\mu + T_{\mu\nu}\ \sigma^{\mu\nu} \tag{4.42}$$

Sachant que

$$\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\right) = \mathbf{Tr}\left(\gamma^5\right) = \mathbf{Tr}\left(\gamma^5\gamma^\mu\right) = \mathbf{Tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\right) = \mathbf{Tr}\left(\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\right) = 0$$

nous pouvons directement trouver S et P,

$$S = \frac{1}{4}\mathbf{Tr}(M) \tag{4.43}$$

et

$$P = \frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left(M\ \gamma^5\right) \tag{4.44}$$

Pour déterminer V_μ nous montrons d'abord que

$$\mathbf{Tr}\left(M\ \gamma^\alpha\right) = V_\mu\ \mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\right)$$

et nous utilisons ensuite l'anti-commutateur $\{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\} = 2\eta^{\mu\alpha}$ pour montrer que

$$\mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\right) = 4\eta^{\mu\alpha}.$$

Il vient alors

$$\mathbf{Tr}\left(M\ \gamma^\alpha\right) = 4\eta^{\mu\alpha}V_\mu$$

ou bien

$$V_\mu = \frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left(M\ \gamma_\mu\right) \tag{4.45}$$

avec $\gamma_\mu = \eta_{\mu\alpha}\gamma^\alpha$. Pour déterminer A_μ, nous suivons les mêmes étapes ; nous montrons d'abord que

$$\mathbf{Tr}\left(M\quad \gamma^5\gamma^\alpha\right) = A_\mu\ \mathbf{Tr}\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\alpha\right) = -A_\mu\ \mathbf{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\right)$$

et nous en déduisons ensuite l'expression de A_μ

$$A_\mu = -\frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left(M\quad \gamma^5\gamma_\mu\right). \tag{4.46}$$

Il nous reste à déterminer $T_{\mu\nu}$. Pour cela, nous utilisons les propriétés de trace pour écrire

$$\mathrm{Tr}\left(M\ \sigma^{\alpha\beta}\right) = T_{\mu\nu}\mathbf{Tr}\left(\ \sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right)$$

Ensuite, à partir de l'algèbre de Clifford et la définition de la matrice $\sigma^{\mu\nu}$ nous obtenons

$$\sigma^{\mu\nu} = i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - i\eta^{\mu\nu}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right) &= \mathbf{Tr}\left((i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - i\eta^{\mu\nu})\left(i\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - i\eta^{\alpha\beta}\right) \right) \\
&= -\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right) + \eta^{\alpha\beta}\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) + \eta^{\mu\nu}\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right) - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\mathbf{Tr}\left(\mathbb{I}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant les formules de trace, nous obtenons

$$\mathbf{Tr}\left(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right) = 4\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)$$

et par conséquent,

$$\mathbf{Tr}\left(M\sigma^{\alpha\beta}\right) = 4\left(T_{\mu\nu}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - T_{\mu\nu}\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\right)$$

ou bien

$$\frac{1}{4}\mathbf{Tr}\left(M\sigma^{\alpha\beta}\right) = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}$$

Comme la matrice $\sigma^{\alpha\beta}$ est antisymétrique par rapport à α et β, nous pouvons choisir $T^{\alpha\beta}$ comme antisymétrique. Nous avons alors

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\mathbf{Tr}\left(M\sigma_{\alpha\beta}\right). \tag{4.47}$$

Exercice 10

En utilisant le développement (4.42) pour les deux matrices M_1 et M_2, démontrer l'identité de Fierz suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tr}\left(\gamma_{\alpha}M_1\gamma^{\alpha}M_2\right) &= \left(\mathbf{Tr}(M_1)\right)\left(\mathbf{Tr}(M_2)\right) - \mathbf{Tr}\left(M_1\gamma^5\right)\ \mathbf{Tr}\left(M_2\gamma^5\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\ \mathbf{Tr}\left(M_1\gamma_{\mu}\right)\ \mathbf{Tr}\left(M_2\gamma^{\mu}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\left(M_1\gamma^5\gamma_{\mu}\right)\ \mathbf{Tr}\left(M_2\gamma^5\gamma^{\mu}\right)
\end{aligned}$$

4.4 Covariance de l'équation de Dirac

Il est bien connu aujourd'hui que l'invariance relativiste est d'une grande importance en physique, notamment dans le domaine des hautes énergies. Historiquement, ce n'est qu'après la formulation d'une théorie quantique entièrement covariante de Lorentz à la fin des années 40, que les effets physiques ont pu être démêlés des divergences insignifiantes, permettant au développement de la théorie de progresser davantage. Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier l'invariance de l'équation Dirac sous les transformations de Lorentz et d'établir la loi de transformation de $\Psi\left(x\right)$. La physique décrit par toute équation relativiste et par l'équation Dirac en particulier, doit être indépendante du choix du référentiel utilisé. Par conséquent, pour être une véritable description de la physique, l'équation elle-même doit satisfait cette invariance par rapport au choix des coordonnées. Nous allons alors montrer que, sous une transformation de Lorentz, l'équation Dirac est invariante si $\Psi(x)$ se transforme d'une façon bien particulière.

4.4.1 Le groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est le groupe de transformations linéaires $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ dans l'espace-temps de Minkowski qui laissent invariante la métrique, c-à-d

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{4.48}$$

La dernière équation est la généralisation de la propriété d'orthogonalité des matrices de rotation de l'espace euclidien à l'espace-temps de Minkowski. Le groupe de matrices $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}$ qui vérifient la condition (4.48) est noté $SO(3,1)$. A partir de l'équation (4.48) nous pouvons voir que $[\det(\Lambda)]^2 = 1$, ce qui implique que $\det(\Lambda) = \pm 1$. De plus, si nous mettons $\alpha = \beta = 0$ dans (4.48), nous obtenons $(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 - (\Lambda^2{}_0)^2 - (\Lambda^3{}_0)^2 = 1$ et par conséquent, $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$. Dans ce cas nous avons soit $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ soit $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. En outre, seulement les transformations qui ont $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ sont connecté à la matrice identité. Nous distinguons alors deux sous-ensembles disjoints, à savoir celui des transformations dites orthochrones, qui transforment le demi-cône futur en lui-même, et celui des transformations antichrones qui échangent les deux demi-cônes passé et futur. Le groupe de Lorentz contient donc quatre nappes disconnexes. Les transformations satisfaisant $\det(\Lambda) = 1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, forment le sous-groupe $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ des transformations de Lorentz "propres orthochrones". Ce sous-groupe est composé des rotations dans l'espace à 3 dimension et les transformations des vitesses (boosts de Lorentz).

Le Groupe	Notation	$\det(\Lambda)$	$\Lambda^0{}_0$
propre orthochrone	$\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$	+1	$\Lambda^0{}_0 \geq 1$
impropre orthochrone	$\mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$	-1	$\Lambda^0{}_0 \geq 1$
propre antichrone	$\mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$	+1	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$
impropre antichrone	$\mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$	-1	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$

Dans le paragraphe suivant nous ne considérons que transformations de Lorentz propres orthochrones du sous-groupe $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$.

4.4.2 Transformation de Lorentz : La matrice $S(\Lambda)$

Suivant le principe de la relativité restreinte, l'équation de Dirac comme toute loi physique doit être invariante sous les transformations de Lorentz. Si l'équation de Dirac dans un référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\left(\gamma^{\mu}\hat{P}_{\mu}-mc\right)\Psi\left(x\right)=0, \tag{4.49}$$

alors elle s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}'$ comme

$$\left(\gamma^{\mu}\hat{P}'_{\mu}-mc\right)\Psi'\left(x'\right)=0, \tag{4.50}$$

où $\hat{P}'_{\mu}$ est la transformée de $\hat{P}_{\mu}$ et $\Psi'\left(x'\right)$ est la transformée de $\Psi\left(x\right)$. Pour la transformation de Lorentz

$$x^{\mu}\rightarrow x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}\quad{}_{\nu}x^{\nu} \tag{4.51}$$

nous avons, pour $\hat{P}'_{\mu}$,

$$\hat{P}'_{\mu} = \Lambda_{\mu}\quad{}^{\nu}\ \hat{P}_{\nu}. \tag{4.52}$$

$$\hat{P}_{\nu} = \Lambda^{\mu}\quad{}_{\nu}\ \hat{P}'_{\mu} \tag{4.53}$$

Pour le champ $\Psi'\left(x'\right)$, nous supposons que $\Psi\left(x\right)$ se transforme comme

$$\Psi\left(x\right)\rightarrow\Psi'\left(x'\right)=S\left(\Lambda\right)\Psi\left(\Lambda^{-1}x'\right)=S\left(\Lambda\right)\Psi\left(x\right)$$

Il est à noter que c'est inutile de mettre un prime ($'$) sur les matrices γ. Les matrices γ sont alors inchangées sous la transformation de Lorentz. Afin de déterminer $S\left(\Lambda\right)$, nous partons de l'équation de Dirac (4.49) et nous insérons l'identité $S^{-1}\left(\Lambda\right)S\left(\Lambda\right)=1$ juste aprés $\Psi\left(x\right)$

$$\left(\gamma^{\nu}\hat{P}_{\nu}-mc\right)S^{-1}\left(\Lambda\right)S\left(\Lambda\right)\Psi\left(x\right)=0. \tag{4.54}$$

En substituant l'équation (4.53) dans (4.54) et en tenant compte du fait que

$$\Psi'\left(x'\right)=S\left(\Lambda\right)\Psi\left(x\right) \tag{4.55}$$

nous obtenons

$$\left(\Lambda^{\mu}\quad{}_{\nu}\gamma^{\nu}S^{-1}\left(\Lambda\right)\hat{P}'_{\mu}-mcS^{-1}\left(\Lambda\right)\right)\Psi'\left(x'\right)=0, \tag{4.56}$$

La dernière équation multipliée à gauche par $S\left(\Lambda\right)$ nous donne

$$\left(S\left(\Lambda\right)\Lambda^{\mu}\quad{}_{\nu}\gamma^{\nu}S^{-1}\left(\Lambda\right)\hat{P}'_{\mu}-mc\right)\Psi'\left(x'\right)=0, \tag{4.57}$$

En comparant maintenant l'équation (4.57) avec l'équation (4.50), nous obtenons

$$S\left(\Lambda\right)\Lambda^{\mu}\quad{}_{\nu}\gamma^{\nu}S^{-1}\left(\Lambda\right)=\gamma^{\mu} \tag{4.58}$$

ou bien

$$S^{-1}\left(\Lambda\right)\gamma^{\mu}S\left(\Lambda\right)=\Lambda^{\mu}\quad{}_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{4.59}$$

Exercice 11

Montrer que les matrices $\tilde{\gamma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ vérifient l'algèbre de Clifford

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

L'existence de la matrice $S(\Lambda)$ s'assure du fait que les matrices $\tilde{\gamma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ vérifient les mêmes relation d'anticommutation que γ^μ et en vertu du théorème fondamental de Pauli. Notons que l'équation (4.59) ne détermine la matrice $S(\Lambda)$ qu'à une constante multiplicative près, car si $S(\Lambda)$ vérifie l'équation (4.59), alors la matrice $S'(\Lambda) = aS(\Lambda)$ où a est un nombre complexe vérifie également la même équation. Le plus courant est de normaliser $S(\Lambda)$ en posant $\det S(\Lambda) = 1$. Pour pouvoir poursuivre la recherche de la matrice $S(\Lambda)$, nous considérons la transformation infinitésimale

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu. \tag{4.60}$$

où les paramètres infinitésimaux $\delta\omega_{\mu\nu}$ sont antisymétrique $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$. Dans ce cas, $S(\Lambda)$ peut s'écrire sous la forme

$$S(\Lambda) = 1 + \xi \tag{4.61}$$

où ξ est une matrice de trace nulle et d'éléments infinitésimaux. En substituant (4.60) et (4.61) dans (4.59), avec $S^{-1}(\Lambda) = 1 - \xi$, nous obtenons

$$(1-\xi)\gamma^\mu(1+\xi) = (\delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu)\gamma^\nu$$

ou bien, à l'ordre 1 en ξ,

$$\gamma^\mu + \gamma^\mu\xi - \xi\gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu. \tag{4.62}$$

Nous obtenons alors le commutateur

$$[\gamma^\mu, \xi] = \delta\omega^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu. \tag{4.63}$$

Considérons maintenant la matrice $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Nous pouvons montrer que

$$[\gamma^\mu, \sigma^{\rho\nu}] = 2i\left(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho\right) \tag{4.64}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
[\gamma^\mu, \delta\omega_{\rho\nu}\ \sigma^{\rho\nu}] &= 2i\left(\delta\omega_{\rho\nu}\ \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \delta\omega_{\rho\nu}\ \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho\right) \\
&= 2i\left(\delta\omega_{\nu\rho}\ \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho - \delta\omega_{\rho\nu}\ \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho\right) \\
&= 4i\delta\omega_{\nu\rho}\ \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho \\
&= 4i\delta\omega^\mu{}_\nu\ \gamma^\nu
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\left[\gamma^\mu, -\frac{i}{4}\delta\omega_{\rho\nu}\ \sigma^{\rho\nu}\right] = \delta\omega^\mu{}_\nu\ \gamma^\nu. \tag{4.65}$$

En comparant l'équation (4.65) avec l'équation (4.63), nous obtenons

$$[\gamma^\mu, \xi] = \left[\gamma^\mu, \left(-\frac{i}{4}\delta\omega_{\rho\nu}\ \sigma^{\rho\nu}\right)\right] \tag{4.66}$$

ou bien

$$\left[\gamma^\mu, \xi + \frac{i}{4}\delta\omega_{\rho\nu}\ \sigma^{\rho\nu}\right] = 0 \tag{4.67}$$

La matrice $\xi' = \xi + \frac{i}{4}\delta\omega_{\rho\nu}\ \sigma^{\rho\nu}$ commute alors avec toutes les matrices γ^μ et ainsi, suivant le lemme énonncé précédement, elle égale à l'identité multipliée par un nombre complexe. Nous avons alors

$$\xi = -\frac{i}{4}\delta\omega_{\rho\nu}\ \sigma^{\rho\nu} + \lambda\ \mathbb{I}_{(4\times4)}, \tag{4.68}$$

où λ est un nombre complexe à déterminer. En choisissant, par convention,

$$\det S(\Lambda) = 1 \tag{4.69}$$

nous pouvons voir que ξ est de trace nulle

$$\det S(\Lambda) = \det(1+\xi) = \det e^\xi = e^{\mathrm{Tr}\xi} = 1 + \mathrm{Tr}\xi = 1$$

D'autre part, en prenant la trace de l'équation (4.68), nous obtenons

$$\mathrm{Tr}\xi = -\frac{i}{4}\delta\omega_{\rho\nu}\ \mathrm{Tr}\sigma^{\rho\nu} + \lambda\ \mathrm{Tr}\mathbb{I}_{(4\times4)} = 4\lambda$$

ce qui implique que $\lambda = 0$. Finalement, nous obtenons la matrice $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{4.70}$$

Cherchons maintenant comment se transforme $\overline{\Psi}$. Pour cela, nous prenons le conjugué hermitien de l'équation (4.55)

$$(\Psi')^+ = \Psi^+ S^+(\Lambda)$$

En multipiant à gauche par γ^0 et en insérant l'identite $\gamma^0\gamma^0 = 1$, nous obtenons

$$\left(\Psi'\right)^+ \gamma^0 = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^0 S^+ \left(\Lambda\right) \gamma^0$$

ce qui implique que

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi} \gamma^0 S^+ \left(\Lambda\right) \gamma^0. \tag{4.71}$$

Pour simplifier encore la matrice $\gamma^0 S^+ \left(\Lambda\right) \gamma^0$ nous écrivons

$$S^+ \left(\Lambda\right) = 1 + \frac{i}{4} \delta\omega_{\mu\nu} \left(\sigma^{\mu\nu}\right)^+ \tag{4.72}$$

La matrice $\left(\sigma^{\mu\nu}\right)^+$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}
\left(\sigma^{\mu\nu}\right)^+ &= \left[\frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\right]^+ \\
&= -\frac{i}{2}\left[\left(\gamma^\nu\right)^+\left(\gamma^\mu\right)^+ - \left(\gamma^\mu\right)^+\left(\gamma^\nu\right)^+\right] \\
&= \frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\gamma^0 \\
&= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0.
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$S^+ \left(\Lambda\right) = \gamma^0 \left[1 + \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right] \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1} \left(\Lambda\right) \gamma^0 \tag{4.73}$$

Nous obtenons alors

$$S^{-1} \left(\Lambda\right) = \gamma^0 S^+ \left(\Lambda\right) \gamma^0 = \bar{S} \left(\Lambda\right) \tag{4.74a}$$

La dernière équation montre que la matrice de transformation $S\left(\Lambda\right)$ n'est pas unitaire. C'est une conséquence du fait que les matrices $\tilde{\gamma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ satisfont à la relation

$$\left(\tilde{\gamma}^\mu\right)^+ = \gamma^0 \tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \tag{4.75}$$

avec la matrice γ^0 et non pas $\tilde{\gamma}^0$.

Exercice 12

Soit un ensemble de matrices γ^μ qui vérifient l'algèbre de Clifford

$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

On définit les matrices $\tilde{\gamma}^\mu$ par

$$\tilde{\gamma}^\mu = U^{-1}\gamma^\mu U$$

où U est une matrice non singulière de déterminant $\det U = 1$. Montrer que les matrice $\tilde{\gamma}^{\mu}$ vérifient l'algèbre de Clifford Montrer que si $(\tilde{\gamma}^{\mu})^{+} = \tilde{\gamma}^{0}\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{0}$, la matrice U est alors unitaire, c-à-d $U^{-1} = U^{+}$.

Exercice 13

Dans une représentation quelconque, les matrices $\tilde{\gamma}^{\mu}$ vérifient la propriété

$$(\tilde{\gamma}^{\mu})^{+} = \Upsilon\tilde{\gamma}^{\mu}\Upsilon \tag{4.76}$$

où Υ est une matirce (4×4). Montrer que $\Upsilon^{2} = 1$.

Le résultat (4.74a) est obtenu en considérant la transformation infinitésimale orthochrone de Lorentz. Il peut également être trouvé d'une manière plus générale en utilisant la condition (4.59). En effet, en prenant le conjugué hermitien de (4.59)

$$S^{+}(\Lambda)(\gamma^{\mu})^{+}\left(S^{-1}\right)^{+}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\gamma^{\nu})^{+}, \tag{4.77}$$

et en tenant compte du fait que $(\gamma^{\mu})^{+} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}$, nous pouvons avoir

$$\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\left(S^{-1}\right)^{+}(\Lambda)\gamma^{0} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{4.78}$$

Maintenant nous utilisons encore (4.59) pour écrire le terme $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$ dans le second membre comme $S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)$. Nous obtenons

$$\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\left(S^{-1}\right)^{+}(\Lambda)\gamma^{0} = S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda). \tag{4.79}$$

Compte tenu du fait que $\left(S^{-1}\right)^{+} = \left(S^{+}\right)^{-1}$, la dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$S(\Lambda)\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}S(\Lambda)\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}. \tag{4.80}$$

Nous en déduisons alors que la matrice $S(\Lambda)\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}$ commute avec les matrices γ^{μ},

$$\left[S(\Lambda)\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}, \gamma^{\mu}\right] = 0, \tag{4.81}$$

et, par conséquent, $S(\Lambda)\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0}$ ne peut être que la matrice identité $\mathbb{I}_{(4\times4)}$ multipliée par un nombre complexe b

$$S(\Lambda)\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0} = b\mathbb{I}_{(4\times4)}, \tag{4.82}$$

A partir de la dernière équation nous tirons la propriété importante

$$\gamma^{0}S^{+}(\Lambda)\gamma^{0} = bS^{-1}(\Lambda). \tag{4.83}$$

Pour déterminer le nombre b nous écrivons d'abord

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^+(\Lambda) = b\gamma^0.$$

A cause du fait que $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$, il vient

$$S(\Lambda)\gamma^0 S^+(\Lambda) = b^*\gamma^0, \tag{4.84}$$

ce qui montre que le nombre b doit être réel. De plus, en tenant compte du fait que $\det S(\Lambda) = 1$ et en utilisant les propriétés du déterminant d'une matrice (4×4)

$$\det(M) = \frac{1}{\det(M^{-1})} = \left[\det M^+(\Lambda)\right]^*, \tag{4.85}$$

$$\det(bM) = b^4 \det(M) \tag{4.86}$$

et

$$\det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2) \tag{4.87}$$

nous obtenons

$$b^4 = \left|\det S(\Lambda)\right|^2 = 1 \tag{4.88}$$

et, par conséquent, comme b est réel, il ne peut prendre que les deux valeurs $b = \pm 1$. Maintenant, nous remplaçons μ par 0 dans (4.70) et nous utilisons (4.83) pour écrire

$$S^+(\Lambda)S(\Lambda) = b\Lambda^0{}_\nu \gamma^0\gamma^\nu. \tag{4.89}$$

Comme la matrice $S^+(\Lambda)S(\Lambda)$ est hermitienne, ses valeurs propres sont réelles et ses éléments de la diagonale sont positifs dans n'importe quelle base. Sa trace est donc positive

$$\mathbf{Tr}\left[S^+(\Lambda)S(\Lambda)\right] > 0. \tag{4.90}$$

D'autre part, nous avons, à partir de (4.89),

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tr}\left[S^+(\Lambda)S(\Lambda)\right] &= \mathbf{Tr}\left[b\Lambda^0{}_\nu \gamma^0\gamma^\nu\right] \\
&= b\Lambda^0{}_\nu \mathbf{Tr}\left(\gamma^0\gamma^\nu\right) \\
&= 4b\Lambda^0{}_\nu \eta^{0\nu} \\
&= 4b\Lambda^{00}.
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$b\Lambda^{00} > 0. \tag{4.91}$$

Finalement, nous obtenons

$$b = \begin{cases} +1, & \text{si} \quad \Lambda^{00} > 0 \\ -1, & \text{si} \quad \Lambda^{00} < 0 \end{cases} \tag{4.92}$$

et

$$\gamma^0 S^+ (\Lambda) \gamma^0 = \begin{cases} S^{-1} (\Lambda), & \text{si} \quad \Lambda^{00} > 0 \\ -S^{-1} (\Lambda), & \text{si} \quad \Lambda^{00} < 0 \end{cases} . \tag{4.93}$$

Notons ici que pour le sous-groupe orthochrone de Lorentz contenant les transformations des vitesses (boosts) et les rotations, nous avons $\Lambda^{00} \geq 1$ et ainsi, $\gamma^0 S^+ (\Lambda) \gamma^0 = S^{-1} (\Lambda)$. Cependant, il existe des transformations qui change le signe de t, comme par exemple le renversement du sense du temps.Il également remarquable de constater que $\overline{\Psi} (x)$ se transforme sous les transformations orthochrone comme

$$\overline{\Psi}' (x') = \overline{\Psi} (x) \gamma^0 S^+ (\Lambda) \gamma^0 = \overline{\Psi} (x) S^{-1} (\Lambda) . \tag{4.94}$$

4.4.3 Cas particuliers

Considérons par exemple un référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ le long de l'axe (oz) par rapport à $\mathcal{R}$. Nous avons la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (z - \beta ct) \end{cases} \tag{4.95}$$

Dans ce cas la matrice Λ s'écrit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

Ici, nous introduisons la rapidité η, définie par

$$\tanh \eta = \frac{v}{c} = \beta. \tag{4.97}$$

Nous avons alors

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\eta}} = \cosh\eta \tag{4.98}$$

$$\beta\gamma = \frac{\tanh\eta}{\sqrt{1-\tanh^2\eta}} = \sinh\eta \tag{4.99}$$

et

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & -\sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix}. \tag{4.100}$$

Pour une transformation infinitésimale, $\eta << 1$, nous avons $\cosh\eta \approx 1$ et $\sinh\eta \approx \eta$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu &\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu
\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\delta\omega^3{}_0 = \delta\omega^0{}_3 = -\eta.$$

Il vient alors

$$\delta\omega_{03} = -\delta\omega_{30} = -\eta$$

La matrice $S(\Lambda)$ est dans ce cas

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\left(\sigma^{03}\delta\omega_{03} + \sigma^{30}\delta\omega_{30}\right) = 1 - \frac{1}{2}\eta\alpha_z \tag{4.101}$$

Pour passer de la transformation infinitésimale à une transformation finie, nous écrivons d'abord $S(\Lambda)$ en exponentiel

$$S(\Lambda) \approx \exp\left(-\frac{\eta}{2}\alpha_z\right) \tag{4.102}$$

et nous utilisons le développement de cet exponentiel

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp\left(-\frac{\eta}{2}\alpha_z\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\eta}{2}\alpha_z\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(-\frac{\eta}{2}\alpha_z\right)^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(-\frac{\eta}{2}\alpha_z\right)^{2k+1} \end{aligned}$$

Comme $(\alpha_z)^2 = 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (\alpha_z)^{2k} &= \left((\alpha_z)^2\right)^k = 1 \\ (\alpha_z)^{2k+1} &= (\alpha_z)^{2k}\alpha_z = \alpha_z. \end{aligned}$$

La matrice $S(\Lambda)$ devient alors

$$S(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2k} - \alpha_z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2k+1}. \tag{4.103}$$

Compte tenu des développements

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{4.104}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{4.105}$$

nous obtenons

$$S(\Lambda) = \cosh\frac{\eta}{2} - \alpha_z\sinh\frac{\eta}{2} \tag{4.106}$$

ou bien

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & -\sigma_z\sinh\frac{\eta}{2} \\ -\sigma_z\sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.107}$$

Il est à noter que pour obtenir $S^{-1}(\Lambda)$, il suffit de remplacer η par $-\eta$.

4.4.4 Le lien entre $u(\vec{p}, s)$ et $u(0, s)$

Nous pouvons construire explicitement les solutions $u(\vec{p}, s)$ et $v(\vec{p}, s)$ avec $\vec{p}$ quelconque en effectuant un boost sur les solutions au repos $u(0, s)$ et $v(0, s)$.Soit $\mathcal{R}$ le référentiel propre de la particule de Dirac où $\vec{v}_e = 0$ et $\vec{p} = 0$. Dans ce référentiel les solution de l'équation de Dirac sont $u(0, s)$ et $v(0, s)$ avec $s = \overline{1, 2}$. Dans le référentiel du laboratoire, noté $\mathcal{R}'$, la particule se déplace avec la vitesse $\vec{v}'_e$ de sorte que

$$\vec{v}'_e = \frac{\vec{p}c^2}{E_p}. \tag{4.108}$$

Par simplicité, nous supposons que $\vec{p}$ est suivant l'axe (oz), $\vec{p} = (0, 0, p_z)$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ le quadri-vecteur énergie-impulsion est $\boldsymbol{p} = \left(mc, \vec{0}\right)$ et dans $\mathcal{R}'$ ça sera $\boldsymbol{p}' = \left(\frac{E_p}{c}, \vec{p}\right)$. Donc il n'est pas nécéssaire de mettre $(')$ sur E_p et $\vec{p}$. Comme le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace

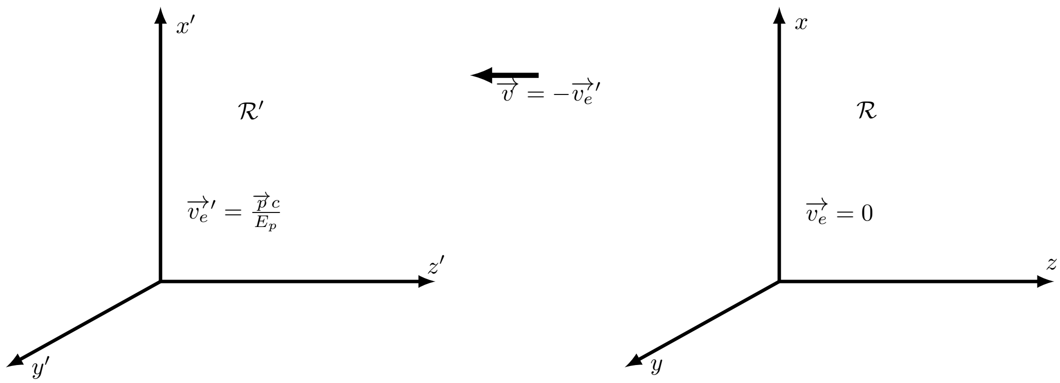

Figure 4.1 – Le référentiel propre de la particule (électron) $\mathcal{R}$ se déplace par rapport à $\mathcal{R}'$ avec la vitesse $\vec{v}_e'$ et le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace par rapport à $\mathcal{R}$ avec la vitesse $\vec{v} = -\vec{v}_e'$.

par rapport à $\mathcal{R}$ avec la vitesse $\vec{v} = -\vec{v}_e'$, les coefficients de la transformation de Lorentz β et γ sont

$$\beta = \frac{v}{c} = -\frac{v_e}{c} = -\frac{p_z c}{E_p} \tag{4.109}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{|\vec{p}|c}{E_p}\right)^2}} = \frac{E_p}{\sqrt{E_p^2 - p^2c^2}} = \frac{E_p}{mc^2} \tag{4.110}$$

Nous avons alors la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \frac{E_p}{mc^2} ct + \frac{p_z}{mc^2} z \\ z' = \frac{E_p}{mc^2} z + \frac{p_z}{mc^2} ct \end{cases} \tag{4.111}$$

Pour la transformation inverse, nous avons

$$t = \frac{E_p}{mc^2} t' - \frac{p_z}{mc^2} z' \tag{4.112}$$

et, par conséquent, nous obtenons la forme de l'onde plane dans le référentiel $\mathcal{R}'$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right) = \exp\left[\frac{-i}{\hbar}\left(E_p t' - p_z z'\right)\right] = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} p'_\mu x^{\mu\prime}\right) \tag{4.113}$$

Nous somme maintenant en mesure de construire les spineurs $u(\vec{p}, s)$ et $v(\vec{p}, s)$, mais il faut écrire, tout d'abord, la matrice $S(\Lambda)$ en fonction de mc^2, E_p et p_z. Nous partons des expressions des coefficients β et γ

$$\begin{aligned} \tanh\eta &= \beta = -\frac{p_z c}{E_p} && (4.114) \\ \cosh\eta &= \gamma = \frac{E_p}{mc^2}. && (4.115) \end{aligned}$$

En uitilisant les lois de transformation

$$\begin{aligned} \cosh\eta &= 1 + 2\sinh^2\frac{\eta}{2} && (4.116) \\ \cosh\eta &= -1 + 2\cosh^2\frac{\eta}{2} && (4.117) \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \sinh\frac{\eta}{2} &= -\sqrt{\frac{E_p - mc^2}{2mc^2}} && (4.118) \\ \cosh\frac{\eta}{2} &= \sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}}. && (4.119) \end{aligned}$$

Pour $\sinh\frac{\eta}{2}$ nous écrivons encore

$$\begin{aligned} \sinh\frac{\eta}{2} &= -\sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}}\sqrt{\frac{E_p - mc^2}{E_p + mc^2}} \\ &= -\sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}}\sqrt{\frac{(E_p - mc^2)(E_p + mc^2)}{(E_p + mc^2)^2}} \\ &= -\sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}}\frac{\sqrt{E_p^2 - m^2c^4}}{E_p + mc^2} \\ &= -\sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}}\frac{p_z c}{E_p + mc^2} \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons écrire la forme explicite de la matrice $S(\Lambda)$

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \cosh\frac{\eta}{2} - \alpha_z \sinh\frac{\eta}{2} \\ &= \sqrt{\frac{E_p + mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{p_z c}{E_p + mc^2}\sigma_z \\ \frac{p_z c}{E_p + mc^2}\sigma_z & 1 \end{pmatrix} && (4.120) \end{aligned}$$

Le spineur $u(\vec{p}, s)$ décrivant la particule dans le référentiel $\mathcal{R}'$ peut être obtenu en faisant agir la matrice $S(\Lambda)$ sur le spineur $u(0, s)$ qui décrit la particule dans le référentiel $\mathcal{R}$

$$u(\vec{p}, s) = S(\Lambda)\, u(0, s) = S(\Lambda)\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
u(\vec{p},s) &= \sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{p_z c}{E_p+mc^2}\sigma_z \\ \frac{p_z c}{E_p+mc^2}\sigma_z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{cp_z\sigma_z}{E_p+mc^2}\chi_s \end{pmatrix} \qquad (4.121)
\end{aligned}
$$

Quant au spineur $v(\vec{p},s)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
v(\vec{p},s) &= S(\Lambda)\, v(0,s) \\
&= \sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{p_z c}{E_p+mc^2}\sigma_z \\ \frac{p_z c}{E_p+mc^2}\sigma_z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E_p+mc^2}\sigma_z\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}. \qquad (4.122)
\end{aligned}
$$

D'autre part, la matrice $S(\Lambda)$ peut s'écrire comme

$$
S(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2mc^2\left(E_p+mc^2\right)}}\begin{pmatrix} E_p+mc^2 & p_z c\sigma_z \\ p_z c\sigma_z & E_p+mc^2 \end{pmatrix} \qquad (4.123)
$$

ou bien

$$
S(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2mc^2\left(E+mc^2\right)}}\left(E+mc^2+c\alpha_z p_z\right). \qquad (4.124)
$$

Comme $u(0,s)$ est un vecteur propre de la matrice γ^0,

$$
\gamma^0 u(0,s) = u(0,s), \qquad (4.125)
$$

nous obtenons l'équation

$$
u(\vec{p},s) = \frac{1}{\sqrt{2mc^2\left(E_p+mc^2\right)}}\left[E_p\gamma^0+cp_z\alpha_z\gamma^0+mc^2\right]u(0,s) \qquad (4.126)
$$

qui s'écrit aussi comme

$$
u(\vec{p},s) = \frac{1}{\sqrt{2m\left(E_p+mc^2\right)}}\left(\gamma^\mu p_\mu+mc\right)u(0,s). \qquad (4.127)
$$

Pour le spineur $v(0,s)$, nous avons

$$
\gamma^0 v(0,s) = -v(0,s) \qquad (4.128)
$$

et, par conséquent,

$$v(\vec{p}, s) = \frac{1}{\sqrt{2m(E_p + mc^2)}} (-\gamma^\mu p_\mu + mc) \, v(0, s) \,. \tag{4.129}$$

Il faut noter ici que dans les deux équations (4.127) et (4.129) on exprime $u(\vec{p}, s)$ et $v(\vec{p}, s)$ en fonction de $u(0, s)$ et $v(0, s)$, mais certainement aucune des deux matrices agissant sur $u(0, s)$ et $v(0, s)$ n'est la matrice $S(\Lambda)$.

4.5 Formes bilinéaires

Nous avons vu que le courant conservé de Dirac est donné par $\boldsymbol{j}^\mu = c\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$. Comme nous le verrons cette quantité se ransforme comme un quadri-vecteur sous les transformations de Lorentz. En fait, l'écriture du courant $\boldsymbol{j}^\mu$ est un cas particulier des formes bilinéaires qui s'écrivent comme

$$\overline{\Psi}(x) \, M \Psi(x) \tag{4.130}$$

où M est une matrice (4×4) quelconque. Pour chaque matrice M nous avons

$$\overline{\Psi}(x) \, M \Psi(x) \to \overline{\Psi}'(x') \, M \Psi'(x') = \overline{\Psi}(x) \, S^{-1}(\Lambda) \, M S(\Lambda) \, \Psi(x) \tag{4.131}$$

ou bien

$$\overline{\Psi}'(x') \, M \Psi'(x') = \overline{\Psi}(x) \, M' \Psi(x)$$

avec

$$M' = S^{-1}(\Lambda) \, M S(\Lambda) \,. \tag{4.132}$$

Pour une transformation infinitésimale nous avons

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= 1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \\ S^{-1}(\Lambda) &= 1 + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.133}$$

$$M' = S^{-1}(\Lambda) \, M S(\Lambda) = \left(1 + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) M \left(1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = M + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\left[\sigma^{\mu\nu}, M\right]. \tag{4.134}$$

Nous avons vu que la matrice M se developpe comme

$$M = S \, \mathbb{I}_{(4\mathrm{x}4)} + P \, \gamma^5 + V_\mu \, \gamma^\mu + A_\mu \, \gamma^5\gamma^\mu + T_{\mu\nu} \, \sigma^{\mu\nu}. \tag{4.135}$$

Etudions alors la covariance de chaque terme dans ce developpement. Pour cela, nous utilisons les commutateurs

$$\begin{aligned}
\left[\sigma^{\mu\nu},\gamma^{5}\right] &= 0 && (4.136)\\
\left[\sigma^{\mu\nu},\gamma^{\alpha}\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^{\mu}-\eta^{\alpha\mu}\gamma^{\nu}\right) && (4.137)\\
\left[\sigma^{\mu\nu},\gamma^{5}\gamma^{\alpha}\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^{5}\gamma^{\mu}-\eta^{\alpha\mu}\gamma^{5}\gamma^{\nu}\right) && (4.138)\\
\left[\sigma^{\mu\nu},\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}-\eta^{\alpha\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\beta}+\eta^{\beta\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}-\eta^{\beta\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}\right) && (4.139)\\
\left[\sigma^{\mu\nu},\sigma^{\alpha\beta}\right] &= 2i\left(\eta^{\alpha\nu}\sigma^{\mu\beta}+\eta^{\mu\beta}\sigma^{\nu\alpha}-\eta^{\beta\nu}\sigma^{\mu\alpha}-\eta^{\mu\alpha}\sigma^{\nu\beta}\right) && (4.140)
\end{aligned}$$

pour démontrer les lois de transformation suivantes

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\Lambda)\gamma^{5}S(\Lambda) &= \gamma^{5} && (4.141)\\
S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\alpha}S(\Lambda) &= \gamma^{\alpha}-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^{\mu}-\eta^{\alpha\mu}\gamma^{\nu}\right)=\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^{\beta} && (4.142)\\
S^{-1}(\Lambda)\gamma^{5}\gamma^{\alpha}S(\Lambda) &= \gamma^{5}\gamma^{\alpha}-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\eta^{\alpha\nu}\gamma^{5}\gamma^{\mu}-\eta^{\alpha\mu}\gamma^{5}\gamma^{\nu}\right)=\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^{5}\gamma^{\beta} && (4.143)\\
S^{-1}(\Lambda)\sigma^{\alpha\beta}S(\Lambda) &= \Lambda^{\alpha}{}_{\lambda}\Lambda^{\beta}{}_{\rho}\sigma^{\lambda\rho} && (4.144)
\end{aligned}$$

Ceci définit cinq formes bilinéaires de base selon leurs transformations de Lorentz

$$\begin{aligned}
\text{Scalaire} &: \ \overline{\psi}(x)\psi(x)\rightarrow\overline{\psi}'(x')\psi'(x')=\overline{\psi}(x)\psi(x)\\
\text{Pseudo-scalaire} &: \ \overline{\psi}(x)\gamma^{5}\psi(x)\rightarrow\overline{\psi}'(x')\gamma^{5}\psi'(x')=\overline{\psi}(x)\gamma^{5}\psi(x)\\
\text{Vecteur} &: \ \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\rightarrow\overline{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x')=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x)\\
\text{Pseudo-vecteur} &: \ \overline{\psi}(x)\gamma^{5}\gamma^{\mu}\psi(x)\rightarrow\overline{\psi}'(x')\gamma^{5}\gamma^{\mu}\psi'(x')=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi}(x)\gamma^{5}\gamma^{\nu}\psi(x)\\
\text{Tenseur} &: \ \overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\rightarrow\overline{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x')=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\overline{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x)
\end{aligned}$$

Ces formes bilinéaires sont très utiles pour établir une théorie quantique relativiste décrivant des particules de spin $\frac{1}{2}$. Dans toute théorie quantique covariante de Lorentz, le lagrangien ne contient que des formes bilinéaires, tout en prenant garde de l'invariance relativiste.

4.6 Calcul de traces

Dans les phénomènes de diffusion impliquant des particules de spin $\frac{1}{2}$, le calcul des sections efficaces nécessite le calcul d'une quantité de la forme

$$\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}\left(\vec{p}',r'\right)M\ u\left(\vec{p},r\right)\right|^{2}$$

La probabilité d'un événement dont l'amplitude est $\mathcal{M}=\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right)Mu\left(\vec{p},r\right)$ est proportionnelle à la quantité $|\mathcal{M}|^{2}$. Dans de nombreux problèmes, nous nous intéressons à la section efficace pour le cas d'un faisceau incident non polarisé et sans détection de l'état de spin final. Dans ce cas, nous devons sommer sur les différents états de spin final et prendre la moyenne sur les états de spin initial. De cette manière, nous avons à calculer une quantité de la forme

$$\frac{1}{2}\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M\ u\left(\vec{p},r\right)\right|^2$$

En introduisant les opérateurs de projection sur les états d'énergie positive nous pouvons accomplir cette somme et ramener le problème à un calcul de traces. Pour commencer, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M\ u\left(\vec{p},r\right)\right|^2 &= \sum_{r,r'}\left[\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M\ u\left(\vec{p},r\right)\right]\left[\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M\ u\left(\vec{p},r\right)\right]^* \\
&= \sum_{r,r'}\left[\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M u\left(\vec{p},r\right)\right]\left[u^+\left(\vec{p},r\right) M^+\bar{u}^+\left(\vec{p}',r'\right)\right] \\
&= \sum_{r,r'}\left[\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M u\left(\vec{p},r\right)\right]\left[\bar{u}\left(\vec{p},r\right)\gamma^0 M^+\gamma^0 u\left(\vec{p}',r'\right)\right]
\end{aligned}$$

Ici, nous introduisons le projecteur sur les états d'énergie positive

$$\sum_{r} u\left(\vec{p},r\right)\bar{u}\left(\vec{p},r\right) = \frac{\gamma^\rho p_\rho + mc}{2mc} = \Gamma_+\left(p\right) \tag{4.145}$$

et nous écrivons le produit des matrices, colonne et ligne en termes des éléments que nous les notons par les indices α et β

$$\begin{aligned}
\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}^{(r')}\left(\vec{p}'\right) M\ u\left(\vec{p},r\right)\right|^2 &= \sum_{r'}\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right) M\Gamma_+\left(p\right)\gamma^0 M^+\gamma^0 u\left(\vec{p}',r'\right) \\
&= \sum_{r'}\bar{u}_\alpha\left(\vec{p}',r'\right)\left(M\Gamma_+\left(p\right)\gamma^0 M^+\gamma^0\right)_{\alpha\beta} u_\beta\left(\vec{p}',r'\right) \\
&= \sum_{r'}\left[u\left(\vec{p}',r'\right)\bar{u}\left(\vec{p}',r'\right)\right]_{\beta\alpha}\left(M\Gamma_+\left(p\right)\gamma^0 M^+\gamma^0\right)_{\alpha\beta} \\
&= \mathbf{Tr}\left[\frac{\gamma^\lambda p'_\lambda + mc}{2mc} M\frac{\gamma^\rho p_\rho + mc}{2mc}\gamma^0 M^+\gamma^0\right]
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}^{(r')}\left(\vec{p}'\right) M\ u\left(\vec{p},r\right)\right|^2 = \mathbf{Tr}\left[\overline{M}\frac{\gamma^\lambda p'_\lambda + mc}{2mc} M\frac{\gamma^\rho p_\rho + mc}{2mc}\right] \tag{4.146}$$

où $\overline{M}$ est donnée par

$$\overline{M} = \gamma^0 M^+\gamma^0. \tag{4.147}$$

Nous voyons donc que le problème se ramène au calcul d'une trace. Dans la suite nous considérons quelques exemples utiles **Exemple 1 :** $M = \gamma^0$Cet exemple se rencontre dans l'étude de diffusion d'un électron par un potentiel central en considérant la théorie des perturbations.Pour $M=\gamma^0$, nous avons $\overline{M}=\gamma^0 M^+\gamma^0=\gamma^0$. Dans ce cas nous obtenons

$$\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}^{(r')}\left(\vec{p}'\right)\gamma^0 u^{(r)}\left(\vec{p}\right)\right|^2=\mathbf{Tr}\left(\gamma^0\frac{\gamma^\lambda p_\lambda+mc}{2mc}\gamma^0\frac{\gamma^\rho p'_\rho+mc}{2mc}\right) \tag{4.148}$$

$$\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}^{(r')}\left(\vec{p}'\right)\gamma^0 u^{(r)}\left(\vec{p}\right)\right|^2=\frac{1}{4m^2c^2}\left(p_\lambda p'_\rho\mathbf{Tr}\left(\gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0\gamma^\rho\right)+m^2c^2\mathbf{Tr}\left(\mathbb{I}\right)\right) \tag{4.149}$$

Maintenant nous utilisons les formules de trace, pour trouver le résultat suivant

$$\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}^{(r')}\left(\vec{p}'\right)\gamma^0 u^{(r)}\left(\vec{p}\right)\right|^2=\frac{1}{m^2c^2}\left(\left(\frac{E^2E'}{c^2}\right)+\vec{p}.\vec{p}'+m^2c^2\right). \tag{4.150}$$

Dans le cas d'une diffusion élastique, nous avons $|\vec{p}|=|\vec{p}'|$ et $\vec{p}.\vec{p}'=|\vec{p}|^2\cos\theta$ où θ est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{p}'$. En conséquence nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}\left(\vec{p}',r'\right)\gamma^0 u\left(\vec{p},r\right)\right|^2 &= \frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{E^2}{c^2}+|\vec{p}|^2\cos\theta+m^2c^2\right)\\ &= \frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{2E^2}{c^2}-|\vec{p}|^2\left(1-\cos\theta\right)\right)\end{aligned} \tag{4.151}$$

où nous avons utilisé le fait que $m^2c^2=\frac{E^2}{c^2}-|\vec{p}|^2$, pour obtenir la deuxième ligne. Maintenant, compte tenu du fait que

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{4.152}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}\left(\vec{p}',r'\right)\gamma^0 u\left(\vec{p},r\right)\right|^2 &= \frac{2}{m^2c^2}\left(\frac{E^2}{c^2}-|\vec{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \frac{2E^2}{m^2c^4}\left(1-\frac{|\vec{p}|^2c^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \frac{2E^2}{m^2c^4}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.153}$$

où $\beta^2=\frac{|\vec{p}|^2c^2}{E^2}=\frac{v^2}{c^2}$ est la correction relativiste à la section efficace de Rutherford. **Exemple 2 :** $M=\gamma^5$.Considérons comme deuxième exemple le cas où $M=\gamma^5$. Dans ce cas, comme $\left(\gamma^5\right)^+=\gamma^5$, nous avons $\overline{M}=\gamma^0\gamma^5\gamma^0=-\gamma^5$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\sum_{r,r'}\left|\ \bar{u}\left(\vec{p}',r'\right)\gamma^5 u\left(\vec{p},r\right)\right|^2 &= -\mathbf{Tr}\left(\gamma^5\frac{\gamma^\lambda p_\lambda+mc}{2mc}\gamma^5\frac{\gamma^\rho p'_\rho+mc}{2mc}\right)\\ &= \mathbf{Tr}\left(\frac{\gamma^\lambda p_\lambda-mc}{2mc}\frac{\gamma^\rho p'_\rho+mc}{2mc}\right)\\ &= \frac{1}{4m^2c^2}\left(p_\lambda p'_\rho\mathbf{Tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\rho\right)-m^2c^2\mathbf{Tr}\left(\mathbb{I}\right)\right)\end{aligned}$$

En utilisant les formules de trace, $\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\right) = 4\eta^{\lambda\rho}$ et $\mathbf{Tr}\left(\mathbb{I}\right) = 4$,nous obtenons

$$\sum_{r,r'} \left| \ \bar{u}\left(\vec{p}', r'\right)\gamma^5 u\left(\vec{p}, r\right)\right|^2 = \frac{1}{m^2c^2}\left(p^{\mu}p'_{\mu} - m^2c^2\right) \tag{4.154}$$

Comme dans le cas précédent, pour $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ et $\vec{p}.\vec{p}' = |\vec{p}|^2\cos\theta$ nous avons

$$p^{\mu}p'_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2\cos\theta \tag{4.155}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{r,r'} \left| \ \bar{u}\left(\vec{p}', r'\right)\gamma^5 u\left(\vec{p}, r\right)\right|^2 &= \frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2\cos\theta - m^2c^2\right) \\ &= \frac{|\vec{p}|^2}{m^2c^2}\left(1 - \cos\theta\right) \\ &= \frac{2\,|\vec{p}|^2}{m^2c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 3 : $M = a_{\mu}\gamma^{\mu}$, où a_{μ} est un quadrivecteur quelconque. Dans ce cas, nous avons

$$\overline{M} = a_{\mu}\gamma^0\left(\gamma^{\mu}\right)^+\gamma^0 = a_{\mu}\gamma^{\mu} \tag{4.156}$$

et par conséquent

$$\sum_{r,r'} \left| \ \bar{u}\left(\vec{p}', r'\right)a_{\mu}\gamma^{\mu}u\left(\vec{p}, r\right)\right|^2 = \mathbf{Tr}\left(a_{\mu}\gamma^{\mu}\frac{\gamma^{\lambda}p_{\lambda} + mc}{2mc}a_{\nu}\gamma^{\nu}\frac{\gamma^{\rho}p'_{\rho} + mc}{2mc}\right). \tag{4.157}$$

En tenant compte que $\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\right) = \mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right) = 0$ nous obtenons

$$\sum_{r,r'} \left| \ \bar{u}\left(\vec{p}', r'\right)a_{\mu}\gamma^{\mu}u\left(\vec{p}, r\right)\right|^2 = \frac{a_{\mu}p_{\lambda}a_{\nu}p'_{\rho}}{4m^2c^2}\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\right) + \frac{a_{\mu}a_{\nu}}{4}\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right). \tag{4.158}$$

Maintenant, nous utilisons les formules de trace

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) &= 4\eta^{\mu\nu} \\ \mathbf{Tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\right) &= 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\lambda\nu}\right)\end{aligned}$$

pour obtenir le résultat

$$\sum_{r,r'} \left| \ \bar{u}\left(\vec{p}', r'\right)a_{\mu}\gamma^{\mu}u\left(\vec{p}, r\right)\right|^2 = \frac{1}{m^2c^2}\left[2\left(a^{\mu}p_{\mu}\right)\left(a^{\nu}p'_{\nu}\right) - \left(a^{\mu}a_{\mu}\right)\left(p^{\lambda}p'_{\lambda} - m^2c^2\right)\right] \tag{4.159}$$

qui peut s'écrire aussi comme

$$\sum_{r,r'} \left| \bar{u}\left(\vec{p}', r'\right) a_\mu \gamma^\mu u\left(\vec{p}, r\right) \right|^2 = \frac{1}{m^2 c^2} \left[2\left(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{p}\right)\left(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{p}'\right) - \boldsymbol{a}^2 \left(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{p}' - m^2 c^2 \right) \right] \tag{4.160}$$

où nous avons utilisé la notation $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a^\mu b_\mu$.