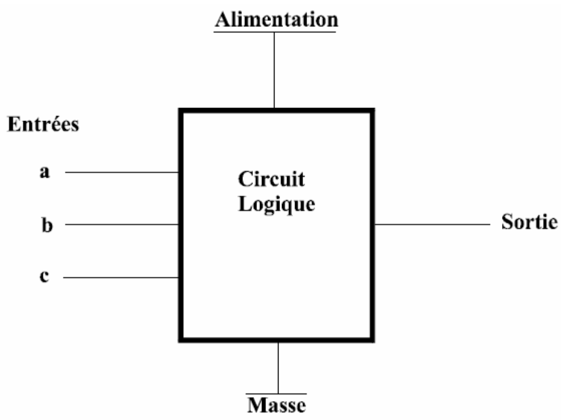
Chapitre II : Fonction et Opérateurs Logiques

I) 1°- *INTRODUCION*

Les circuits électroniques sont classés en deux grandes catégories : les circuits digitaux (numériques) et les circuits analogiques.

Dans un circuit analogique, les signaux électriques ont une amplitude variant continuellement. Cette amplitude peut prendre un nombre très élevé de valeurs entre le minimum et le maximum. Un amplificateur basse fréquence, par exemple, est un circuit analogique. Il amplifie aussi bien les signaux faibles que les signaux forts. L'amplitude varie sans cesse, suivant le niveau de la voix ou de la musique à amplifier.

Un circuit digital est un circuit dans lequel les signaux ne peuvent avoir que deux niveaux, soit le niveau 1, soit le niveau 0. Un interrupteur, par exemple, est un circuit digital. Les circuits logiques utilisent la technique digitale. Les circuits logiques ont besoin d'une alimentation pour fonctionner, cette alimentation ne sera pas représentée pour ne pas compliquer les schémas, mais elle existera toujours !!!



2°)- Définitions :

* En logique binaire, on a deux symboles possibles : 0 et 1.
* En électricité, on a deux possibilités : présence ou absence de courant ou de tension.
En associant les deux, on obtient deux choix possibles :

- En logique positive :

Une logique est dite positive si l'on associe le potentiel électrique le plus élevé à l'état 1.

1 -> Présence de courant ou de tension.
0 -> Absence de courant ou de tension.

- En logique négative :

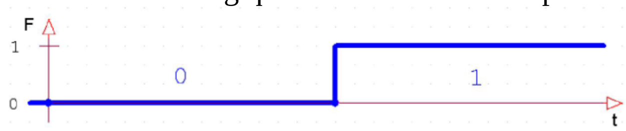
Une logique est dite négative si l'on associe le potentiel électrique le plus élevé à l'état logique 0.

0 -> Présence de courant ou de tension.
1 -> Absence de courant ou de tension.

- ***Remarque :***

D'une façon générale, dans les schémas logique, on travaille en logique positive.
Le niveau logique 0 correspond à la tension 0V.
Le niveau logique 1 correspond à une tension positive (5V ou 12V par exemple).

*** Chronogramme :** Représente les états logiques en fonction du temps.



3°) Variable logique :

Une variable logique ou binaire, notée X, est une grandeur qui ne peut prendre que deux états (0 ou 1):

$$X = 0 \text{ si } X \neq 1$$
$$X = 1 \text{ si } X \neq 0$$

Un interrupteur K ne peut prendre que deux états, il est ouvert, ou il est fermé. L'état de cet interrupteur peut être décrit par une variable logique X. En général, on attribue la valeur 0 à cette variable quand K est ouvert, et la valeur 1 quand K est fermé.

4°) Opérateurs logiques :

On définit cinq opérateurs logiques de base : OUI, NON, OU Inclusif, (et son complément), ET, (et son complément), OU Exclusif, (et son complément).

5°) Fonction logique :

Une fonction logique est une association de variables, reliées par des opérations, qui ne peut prendre que deux valeurs (0 et 1). Par suite une fonction logique pourra à son tour être considérée comme une variable vis-à-vis d'une autre fonction logique (fonction de fonction).

Exemple :

Si S dépend de e1 et e2, S est une fonction des variables e1 et e2 : **S=e1+e2**

6°) Table de vérité :

La fonction S peut-être définie à partir d'un tableau appelé TABLE DE VERITE, qui indique la valeur de S, selon les valeurs de e1 et de e2. Chaque table de vérité définit une fonction logique.

e1	**e2**	**S**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- ***Remarque :*** L'état 1 est aussi appelé état haut (H); l'état 0 est l'état bas (B, L).

II°). DIFFERENTES FONCTIONS LOGIQUES :

1°) Fonction OUI :

*** Définition :**

La fonction OUI effectue l'égalité entre deux variables. Elle sert à transmettre et à amplifier l'information.

*** En électricité :**

Au repos (a=0), la lampe est éteinte (S=0). Si on appuie sur a (a=1), la lampe s'allume (S=1). On peut donc écrire la relation S=a. Donc un contact travail représente la variable.

*** Table de vérité :**

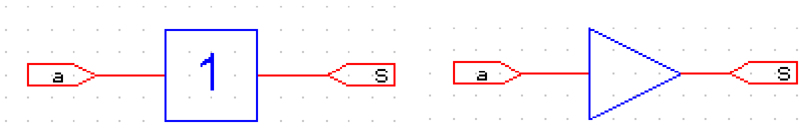
a	**S**
0	0
1	1

*** Equation :**

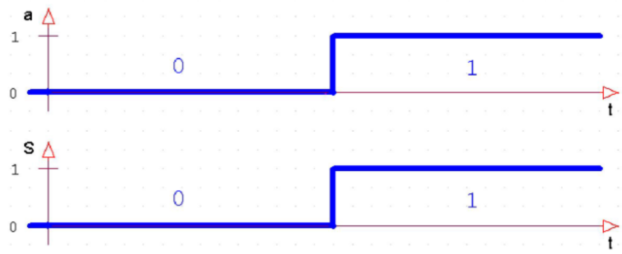
$$\mathbf{S=a}$$

*** En électronique :**

- ***Symbole normalisé :***



*** Chronogrammes :**



2°) Fonction NON : (NO)

*** Définitions :**

La fonction NON (ou négation) effectue le complément logique (ou l'inverse) d'une variable. On le note en ajoutant une barre sur la variable ($\overline{x}$ est le complément de x et se lit x barre).Cette définition conduit aux relations suivantes : $\overline{1}= 0$; $\overline{0}=1$

On en déduit que le complément de A est égale à A barre ($\overline{A}$); et le complément de A barre est égale à A.

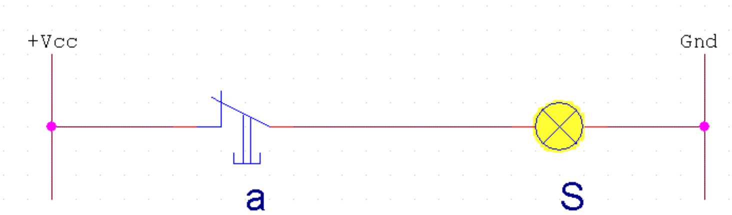
Donc si A = 0 alors $\overline{A}$ = 1

Et si A = 1 alors $\overline{A}$ = 0

Il est possible de complémenter plusieurs fois une variable ou un groupe de variables.

Exemple : $\overline{\overline{A}}$ = A

*** En électricité :**



Au repos (a=0), la lampe est allumée (S=1) ; si on appuie sur a (a=1), la lampe s'éteint (S=0); On peut donc écrire S=$\overline{a}$. Donc un contact repos représente le complément de la variable.

*** Table de vérité :**

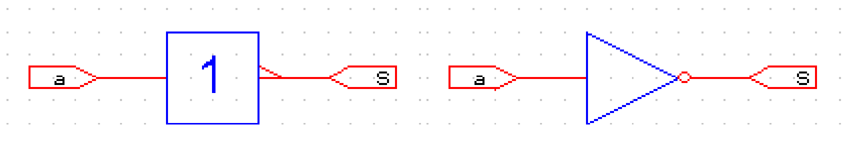
a	**S**
0	1
1	0

*** Equation :**

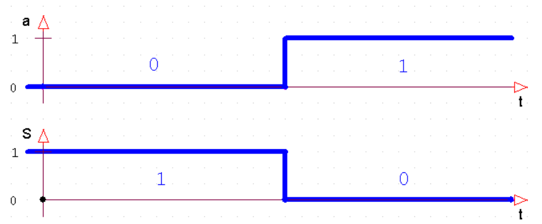
$$S=\overline{a}$$

*** En électronique :** ***Circuit intégré : 74LS04***

- ***Symbole normalisé :***



*** Chronogrammes :**

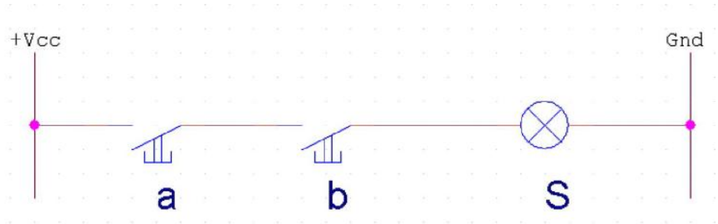


3°) Fonction ET : (AND)

*** Définitions :**

Cette opération, aussi appelée intersection, appliquée à deux variables, conduit au produit, ou fonction ET de ces deux variables. On la note par le signe ‘· ’ entre les deux variables x et y, mais plus simplement **xy** ou x· y. Le résultat est égal à 1 si les deux variables valent 1.

- ***En électricité :***



Au repos, la lampe est éteinte; la lampe s'allume seulement si l'on appuie sur a **et** b. On est donc en présence d'une fonction ET.

- ***Remarque :*** Le ET en électricité se réalise en mettant les contacts en série.

*** Table de vérité :**

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

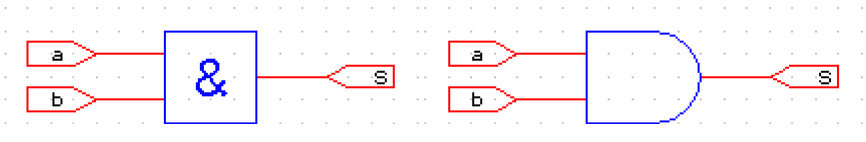
- ***Remarque :*** En généralisant, pour que S soit à 1, il faut que toutes les variables d'entrées soient à 1. Le ET logique est équivalent à une multiplication.

*** Equation :**

$$S = a.b$$

*** En électronique :** ***Circuit intégré : 7408***

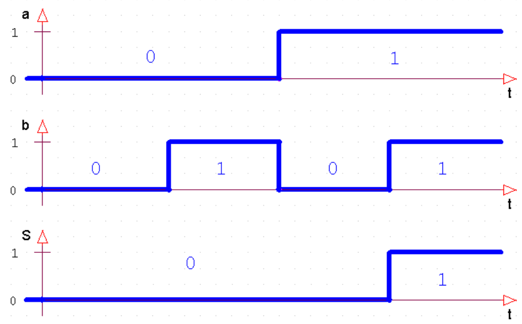
- ***Symbole normalisé :***



*** Propriétés :**

$$A.A = A,\ \bar{A}.A=0,\ 1.A = A,\ 0.A= 0$$

*** Chronogrammes :**

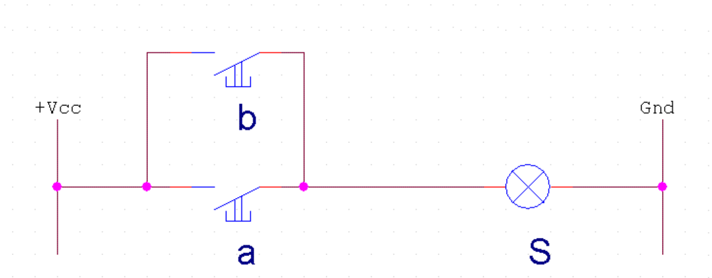


4°) Fonction OU (Inclusif) : (OR)

*** Définitions :**

Cette opération, aussi appelée réunion, appliquée à deux variables, conduit à la somme, ou fonction OU de ces deux variables. On la note par le signe U entre les deux variables x U y, ce qui évite de la confondre avec l'addition arithmétique, mais en pratique, on la notera sous la forme **x+y**. Le résultat est égal à 1 si l'une ou l'autre des variables ou les deux valent 1.

*** En électricité :**



Au repos, la lampe est éteinte; La lampe s'allume si l'on appuie sur a **ou** sur b. On est donc en présence d'une fonction OU.

- ***Remarque :*** Le OU en électricité se réalise en mettant les contacts en parallèle.

*** Table de vérité :**

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

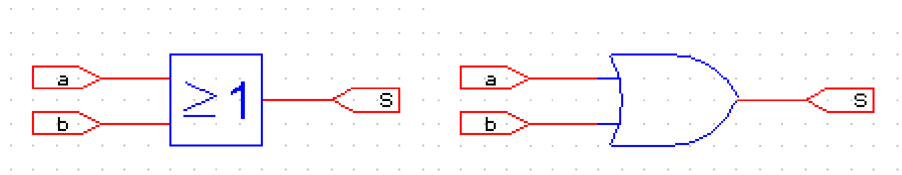
- ***Remarque :*** En généralisant, il suffit qu'une des variables d'entrées soit à 1 pour que la sortie soit à 1. Le OU logique est équivalent à une addition ;sauf la dernière ligne, car A et B sont des états et pas des valeurs numériques.

*** Equation :**

$$S = a + b$$

*** En électronique :** ***Circuit intégré : 7432***

- ***Symbole normalisé :***

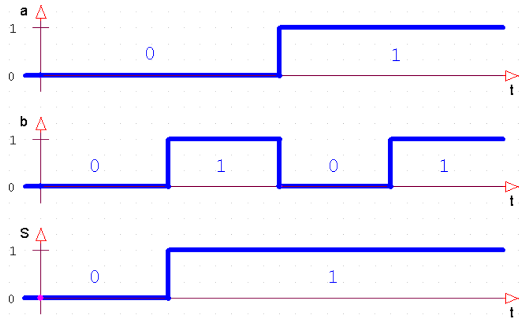


Le ≥1 signifie que pour que la sortie passe à 1, il faut que le nombre d'entrées au niveau 1 soit égal ou supérieur à 1.

*** Propriétés :**

$$A + A = A, \quad A + \bar{A} = 1$$
$$1 + A = 1, \; 0 + A = A$$

* **Chronogrammes**

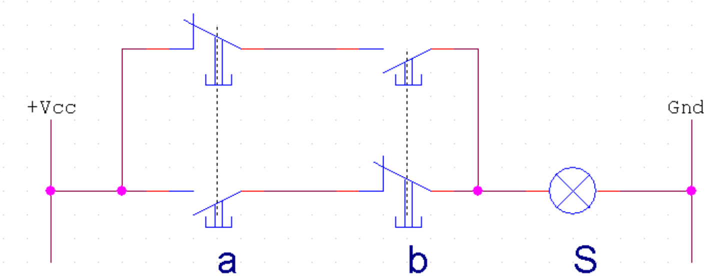


5°) Fonction OU Exclusif : (XOR) (OU disjonctif ou Dilemme)

*** Définition :**

La fonction OU Exclusif est encore appelée fonction d'anti-coïncidence car sa sortie n'est à l'état 1 que lorsque les 2 entrées sont dans des états différents.

*** En électricité :**



Au repos, la lampe est éteinte; La lampe s'allume si l'on appuie sur a ou sur b, mais elle s'éteint si l'on appuie sur les deux. En résumé S=1 si et seulement si l'on appuie exclusivement sur a ou sur b. On est donc en présence d'un OU exclusif.

*** Table de vérité :**

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Attention au piège, en généralisant à 3 entrées, il faudra d'abord effectuer un OU exclusif entre deux variables d'entrée, puis effectuer le suivant entre le résultat précédent et la troisième variable d'entrée.

- ***Remarque :*** Le OU exclusif est équivalent à une addition modulo 2 (1 + 1 = 0 et je retiens 1).

*** Equations :**

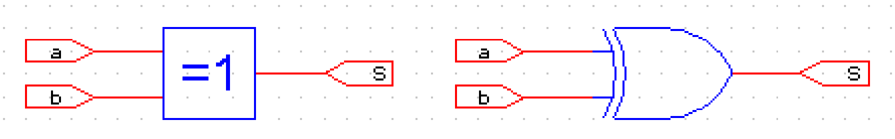
$$S = a \oplus b$$

$$S = \bar{a}.b + a.\bar{b}$$

$$S = (a + b).(\bar{a} + \bar{b})$$

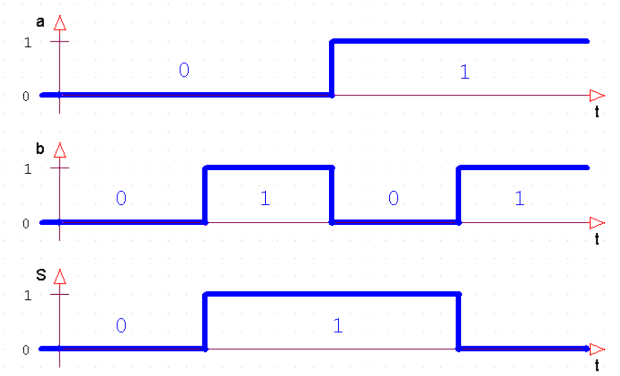
*** En électronique : *Circuit intégré : 7486***

- ***Symbole normalisé :***



*** Propriétés :**

$$1 \oplus A = \bar{A}, \quad 0 \oplus A = A$$

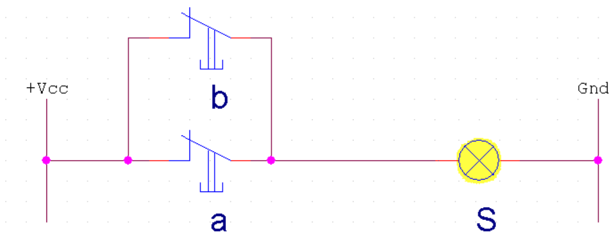


6°) Fonction NON ET : (NAND)

*** Définition :**

La fonction NON ET n'est à l'état 0 que si toutes les entrées sont à l'état 1. Dès que l'une des entrées est à l'état 0, la sortie passe à l'état 1.

*** En électricité :**



Au repos, la lampe est allumée; La lampe s'éteint si l'on appuie sur a **et** sur b. On est donc en présence d'une fonction NON ET.

*** Table de vérité :**

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

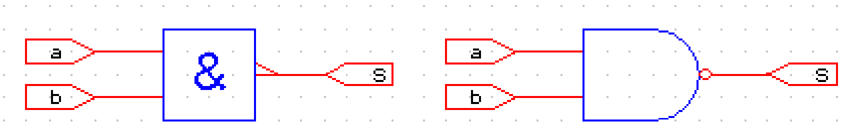
- ***Remarque :*** En généralisant, la sortie est à 0 seulement quand toutes les variables d'entrées sont au niveau 1

*** Equations :**

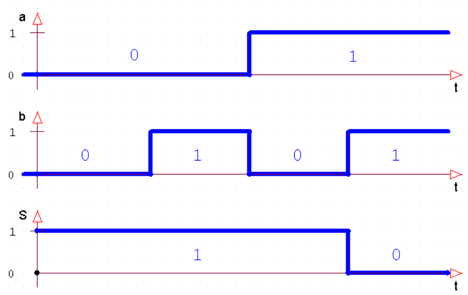
$$S = \overline{a.b}$$

*** En électronique : *Circuit intégré : 7400***

- ***Symbole normalisé :***



*** Chronogrammes :**

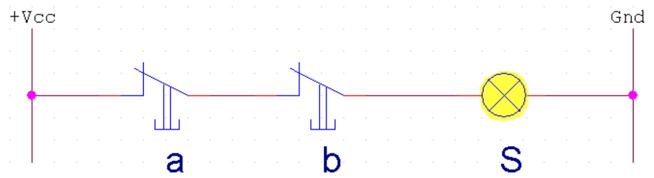


7°) Fonction NON OU (Inclusif) : (NOR) (NI)

*** Définition :**

La sortie ne se trouve à 1 que si toutes les entrées sont à l'état 0.

*** En électricité :**



La lampe s'allume seulement au repos.

*** Table de vérité :**

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- ***Remarque :***

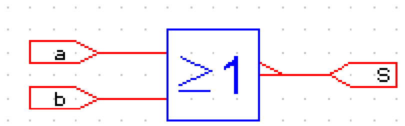
En généralisant, La sortie est à 1 seulement lorsque toutes les entrées sont à 0.

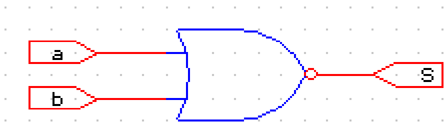
Equations :

$S = \overline{a + b}$

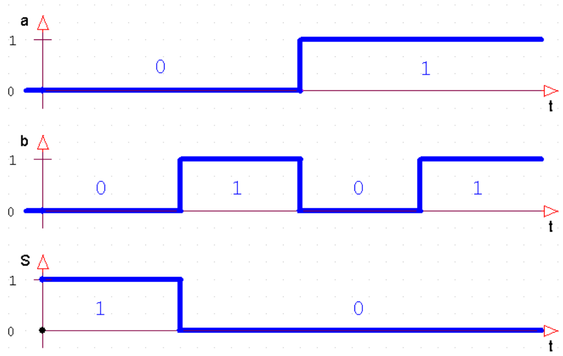
*** En électronique :** ***Circuit intégré : 7402***

- ***Symbole normalisé :***





*** Chronogrammes**

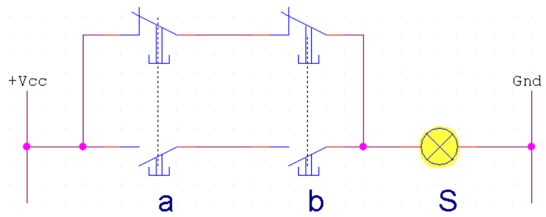


8°) Fonction NON OU (Exclusif) : (EXNOR) (Egalité ou Coïncidence ou Identité)

*** Définitions :**

La sortie est à 1 quand les entrées sont égales.

*** En électricité :** ***Circuit intégré : 74266***



Au repos, la lampe est allumée; La lampe s'éteint si l'on appuie sur a ou sur b, mais elle s'allume si l'on appuie sur les deux.

*** Table de vérité :**

a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*** Equations :**

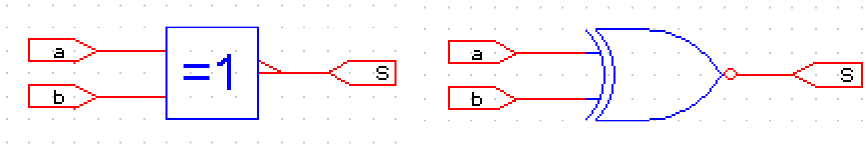
$$S = \overline{a \oplus b}$$

$$S = \bar{a}.\bar{b} = a.b$$

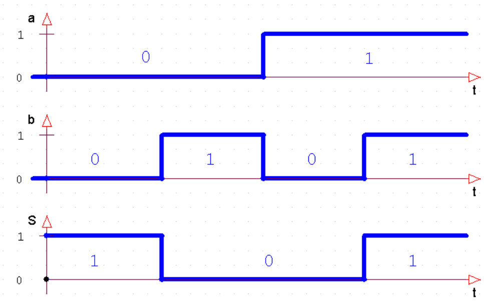
$$S = (a + \bar{b}).(\bar{a} + b)$$

*** En électronique :**

- ***Symbole normalisé :***



* **Chronogrammes**



III°) DIFFERENTES RELATIONS :

1°) Relations de bases :

Les opérations fondamentales sont : la somme, le produit, le complément.

* Toute variable A a un inverse appelé complément, et noté $\bar{A}$ tel que :

$$A + \bar{A} = 1, \quad A . \bar{A} = 0$$

***** Les opérations sont commutatives :

$$A + B = B + A$$
$$A . B = B . A$$

***** Les opérations sont distributives :

- ***- Distributivité du ET par rapport au OU***

Une table de vérité permet de vérifier que :

$$A.(B + C) = A.B + A.C$$

Cette propriété autorise à développer ou, inversement, à mettre en facteurs comme en algèbre classique.

Exemple :

$$A=xyz + xq +w = x.(y.z+q)+w$$

- ***- Distributivité du OU par rapport au ET***

De même, on peut vérifier que :

$$A + (B.C) = (A+B).(A+C)$$

Cette relation est intéressante pour mettre une expression sous forme de produit logique (ET) de OU logique.

Exemple :

$$A = x+(y.z.q) + w = (x+y).(x+z).(x+q)+w$$

2°) Autres relations :

- ***ATTENTION :***

$$A + A.B = A, \quad A\,(A+B) = A$$

$$A + \bar{A}.B = A + B, \quad A\,(\bar{A} + B) = A.B$$

3°) Théorème de DE MORGAN :

a) 1er Théorème :

Le complément d'un produit de variables, est égal à la somme des compléments de variables.

$$\overline{A.B.C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

b) 2ème Théorème :

Le complément d'une somme de variables, est égal au produit des compléments de variables.

$$\overline{A+B+C} = \bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,\bar{C}$$

Ils permettent des simplifications remarquables des équations logiques, donc des réductions de schémas.

IV°) Réalisation des fonctions logiques à l'aide des différents opérateurs :

On appelle fonction logique, une combinaison de variables booléennes reliées par des opérateurs Logiques.

Toute fonction logique peut-être réalisée de manières suivantes :

- Soit avec des opérateurs ET, OU, NON.
- Soit avec des opérateurs NON ET (NAND).
- Soit avec des opérateurs NON OU (NOR).

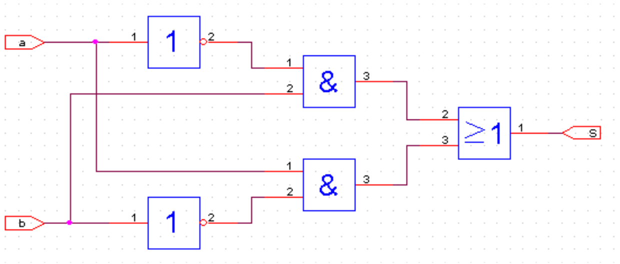
Nous dirons que ces groupes d'opérateurs forment « ***un système complet*** ».

Le schéma obtenu s'appelle ***un logigramme***.

Exemple : Soit la fonction telle que $F = a.\bar{b} + \bar{a}.b$.

Réalisation avec des opérateurs ET, OU, NON :

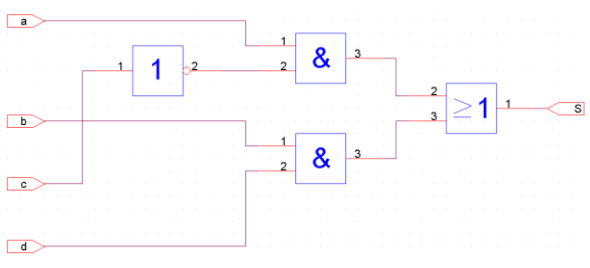
- ***Schéma :***



……………………………………………

Exemple : Réaliser le schéma de l'équation suivante : $F = a.\bar{c} + d.b$

- ***Schéma :***



……………………………………………

VI°) FONCTIONS LOGIQUES :

1°) Fonction complètement définie :

Une fonction est complètement définie quand on connaît sa valeur (0 ou 1) pour toutes les combinaisons possibles des variables d'entrées. Ces combinaisons sont au nombre de 2n pour n variables d'entrées. On établit alors la table de vérité de la fonction.

Exemple : Table de vérité de la fonction majorité sur 3 variables : la fonction vaut 1 si la majorité des variables d'entrées sont à 1. Il y a $2^3 = 8$ combinaisons des 3 variables a, b, c.

La fonction F est complètement définie si on connaît son état logique (0 ou 1) pour chacune de ces 8 combinaisons. On aura la table de vérité suivante :

c	b	a	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2°) Fonction incomplètement définie :

Une fonction est incomplètement définie quand sa valeur est indifférente ou non spécifiée pour certaines combinaisons des variables d'entrées. Ce cas se rencontre lorsque certaines combinaisons sont impossibles physiquement. On notera **X (φ)** la valeur de la fonction dans ce cas (X peut prendre la valeur 0 ou la valeur 1).

Ces cas non définis sont très intéressants pour la simplification des fonctions.

Exemple : Table de vérité de la fonction majorité pour 4 variables d'entrées.

d	c	b	a	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	X
0	1	0	0	0
0	1	0	1	X
0	1	1	0	X
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	1
1	1	0	0	X
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

V : Représentation et simplification des fonctions logiques:

V.1-Représentation et écriture des fonctions logiques :

1.1. Introduction

Une fonction logique, définie par son expression, peut être représentée de plusieurs manières : algébriquement (par des équations) et graphiquement (table de vérité, tableau de Karnaugh, logigramme, chronogramme et circuit de contact).

1.2.1 Table de vérité

Les combinaisons de **n** variables logiques sont limitées à $\mathbf{2^n}$ du fait que les variables ne peuvent **prendre que deux valeurs**. On peut ainsi représenter la fonction logique à l'aide d'un tableau faisant correspondre à chaque combinaison des variables la valeur de la fonction (**0** ou **1**) correspondante. On appelle cette représentation « **table de vérité** ».

Exemple : $f(a,b) = a + b$ **signifie** : $f = 1$ si $a = 1$ ou $b = 1$ ou $a = b = 1$

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f(0,0) = 0$
$f(0,1) = 1$
$f(1,0) = 1$
$f(1,1) = 1$

La table de vérité comporte 2^n lignes (une pour chaque combinaison des variables d'entrée)

Figure**. Table de vérité**

1.2.2 Tableau de Karnaugh

Le tableau de Karnaugh est une représentation de la table de vérité en deux dimensions. Il comprend 2^n cases.

Exemple : $f(a,b) = a + b$

$b\backslash a$	*0*	*1*
0	*0*	*1*
1	*1*	*1*

Figure. **Tableau de Karnaugh**

Au-delà de deux variables, le tableau devrait être un volume. Pratiquement on conserve évidemment une représentation à deux dimensions mais il faut alors respecter une **règle** qui est **l'adjacence de deux lignes ou colonnes**. Les combinaisons des variables respectent donc un **code de Gray**.

Exemple à 4 variables :

code de Gray

code de Gray

$cd\backslash ab$	*00*	*01*	*11*	*10*
00	*0*	*1*	*0*	*1*
01	*1*	*1*	*1*	*1*
11	*0*	*1*	*0*	*1*
10	*1*	*1*	*1*	*1*

Figure. **Tableau de Karnaugh**

1.3 Formes Normales (Canoniques)

Les formes normales sont des expressions particulières de fonctions logiques, sous formes de ET de OU ("produits de sommes") ou de OU de ET ("sommes de produits"). **Dans chaque terme apparaissent toutes les variables.**

1.3.1 Forme normale disjonctive (FND)
Théorème n° 1 de Shannon :
Toute fonction logique peut se décomposer en un OU de deux ET logiques :

$$f\,(a,b,c,...) = a.\,f\,(1,b,c,...) + \bar{a}.\,f\,(0,b,c,...)$$

En utilisant successivement ce théorème on arrive à **la forme normale disjonctive** :

$f\,(a,b,c,...) = a.b.\,f\,(1,1,c,...) + \bar{a}.b.\,f\,(0,1,c,...) + a.\bar{b}.\,f\,(1,0,c,...) + \bar{a}.\bar{b}.\,f\,(0,0,c,...)$

La fonction s'écrit donc comme un OU de toutes les combinaisons possibles de n variables pondérées par des 0 et 1 (**il y a donc 2^n termes**). Les termes pondérés par des 0 disparaissent et il ne reste donc que les termes pondérés par des 1, d'où l'expression : "**développement de la fonction suivant les 1**".

Exemple 1 : soit f(a,b,c) définie par le tableau de Karnaugh suivant, déterminer sa FND.

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

d'où $f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.0 + \bar{a}b\bar{c}.0 + ab\bar{c}.0 + a\bar{b}\bar{c}.1 + \bar{a}\bar{b}c.1 + \bar{a}bc.1 + abc.0 + a\bar{b}c.1$

soit : $f(a,b,c) = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c$

*On note que ce résultat est obtenu directement à partir du tableau de Karnaugh (ou de la table de vérité) en écrivant que **f est l'union (+) des combinaisons de a, b, c pour lesquelles f vaut 1**.*

Exemple 2 : $f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c$
Trouver le tableau de Karnaugh (ou la table de vérité) de f.

sous sa forme normale, f s'écrit :

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.f(0,0,0) + \bar{a}\bar{b}c.f(0,0,1) + \bar{a}b\bar{c}.f(0,1,0) + \bar{a}bc.f(0,1,1)$$
$$+ a\bar{b}\bar{c}.f(1,0,0) + a\bar{b}c.f(1,0,1) + ab\bar{c}.f(1,1,0) + abc.f(1,1,1)$$

avec $f(0,0,0)=1 \quad f(0,0,1)=1 \quad f(0,1,0)=0 \quad f(0,1,1)=1$
$f(1,0,0)=0 \quad f(1,0,1)=1 \quad f(1,1,0)=0 \quad f(1,1,1)=0$

d'où le tableau de Karnaugh :

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1

On note que cela revient à mettre des **1** dans les cases définies par les combinaisons de variables présentes dans l'expression de ***f***.

1.3.2 Forme normale conjonctive (FNC)

Théorème n° 2 de Shannon :

Toute fonction logique peut se décomposer en un ET de deux OU logiques :

$$f(a,b,c,...) = (a + f(0,b,c,...)).(\overline{a} + f(1,b,c,...))$$

Cette forme est la duale de la FND. Comme précédemment l'utilisation successive de ce théorème permet d'arriver à la forme normale conjonctive :

Exemple 1 :

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

1[er] terme : $a+b+c+f(0,0,0)$

2[ème] terme : $a+b+\overline{c}+f(0,0,1)$

3[ème] terme : $a+\overline{b}+c+f(0,1,0)$

....

8[ème] terme : $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+f(1,1,1)$

$$f(a,b,c) = [(a+b+c)+0][(a+b+\overline{c})+1][(a+\overline{b}+c)+0][(a+\overline{b}+\overline{c})+1]$$
$$[(\overline{a}+b+c)+1][(\overline{a}+b+\overline{c})+1][(\overline{a}+\overline{b}+c)+0][(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})+0]$$

Les termes contenant 1 disparaissent :

$$f(a,b,c) = (a+b+c).(a+\overline{b}+c).(\overline{a}+\overline{b}+c).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$$

On note que ce résultat est obtenu directement à partir du tableau de Karnaugh (ou de la table de vérité) en écrivant que ***f est le produit (X) des combinaisons de a (vaut 0), b(vaut 0), c (vaut 0) pour lesquelles f vaut 0****.*

Exemple 2 :

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0

Développement suivant les 0 :

$$f(a,b,c) = (a+b+\overline{c}).(a+\overline{b}+c).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}).(\overline{a}+b+c).(\overline{a}+b+\overline{c})$$

Ne pas confondre les règles de développement suivant les "1" et les "0".

Exemple 3 : Passage de la FNC au tableau de Karnaugh

$f(a,b,c) = (a+b+c).(a+\overline{b}+c).(\overline{a}+\overline{b}+c).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$ s'écrit aussi :

$$f(a,b,c) = [(a+b+c)+f(0,0,0)][(a+b+\overline{c})+f(0,0,1)][(a+\overline{b}+c)+f(0,1,0)][(a+\overline{b}+\overline{c})+f(0,1,1)]$$
$$[(\overline{a}+b+c)+f(1,0,0)][(\overline{a}+b+\overline{c})+f(1,0,1)][(\overline{a}+\overline{b}+c)+f(1,1,0)][(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})+f(1,1,1)]$$

avec ici : $f(0,0,0)=0 \quad f(0,0,1)=1 \quad f(0,1,0)=0 \quad f(0,1,1)=1$

$f(1,0,0)=1 \quad f(1,0,1)=1 \quad f(1,1,0)=0 \quad f(1,1,1)=0$

d'où le tableau de Karnaugh :

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

V.2. Simplification des fonctions logiques

La simplification d'une fonction consiste à obtenir son expression la plus compacte possible afin de minimiser le nombre d'opérateurs logiques nécessaires à sa réalisation. On distingue deux méthodes de simplification : méthode **algébrique** ; méthode **graphique**.

2.1 Simplification algébrique

Cette technique de simplification repose sur l'utilisation des propriétés de l'algèbre de Boole et des théorèmes fondamentaux. Elle est moins systématique que la simplification graphique mais peut parfois donner des résultats rapidement.

- **Utilisation des identités particulières**

(1) $ab + a\overline{b} = a$ (4) $(a+b)(a+\overline{b}) = a$

(2) $ab + a = a$ (5) $a(a+b) = a$

(3) $a + \overline{a}b = a + b$ (6) $a(\overline{a}+b) = ab$

Exemple :

$$f = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}cd$$

$$f = ab + a\overline{b}cd = a(b + \overline{b}cd) = ab + acd$$

- **Ajout de terme existant (utilisation de l'idempotence)**

Exemple : $f = abc + \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c}$

$$f = abc + \overline{a}bc + abc + a\overline{b}c + abc + ab\overline{c}$$

$$f = bc + ac + ab$$

- **Suppression de terme inclus**

Exemple : $f = ab + \overline{b}c + ac$

$$f = ab + \overline{b}c + ac(b+\overline{b}) = ab + \overline{b}c + acb + ac\overline{b} = ab(1+c) + \overline{b}c(1+a) = ab + \overline{b}c$$

2.2 Simplification graphique

2.2.1 Principe

Cette méthode repose sur l'utilisation des tableaux de Karnaugh. Elle consiste à mettre en évidence des associations du type :

- $ab + a\overline{b} = a(b+\overline{b}) = a$
- $abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} = ab(c+\overline{c}) + a\overline{b}(c+\overline{c}) = a$

On remarque que les regroupements ci-dessus correspondent aux cas où l'on a 2, 4, 8, (2^n en général) **cases adjacentes** sur le tableau de Karnaugh, qui sont simultanément égales à 1.

2.2.2 Adjacence des cases

Deux cases adjacentes sur le tableau de Karnaugh correspondent à des combinaisons différant d'un seul bit (ceci est dû l'utilisation du code de Gray). Ceci est valable à l'intérieur du tableau mais aussi sur ses bords : en passant du bord droit au bord gauche ou du haut au bas il y a adjacence. Ceci revient à dire que l'on peut considérer le tableau comme une sphère.

- **Règle pratique**

La règle consiste donc à «fusionner » ces 2^n cases adjacentes pour trouver l'expression résultante. On regarde la ou les variables qui ***change*** **(nt)** entre les cases fusionnées ; ces variables sont alors **supprimées** dans la nouvelle expression simplifiée.

- **Exemples**

Exemple 1 :

c\ab	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	0

b change
a ne change pas (1)
c ne change pas (0)
$\Big\}\ a.\bar{c}$

c change
a ne change pas (0)
b ne change pas (0)
$\Big\}\ \bar{a}.\bar{b}$

Donc : $f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} = \bar{a}\bar{b} + a\bar{c}$

Exemple 2 :

c\ab	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

a change
b ne change pas (1)
c change
$\Big\}\ b$

Donc : $f = \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + abc + \bar{a}bc = b$

Exemple 3 :

cd\ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

a change
b ne change pas (0)
c change
d ne change pas (0)
$\Big\}\ \bar{b}\bar{d}$

Donc : $f = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} = \bar{b}\bar{d}$

- **Récapitulation des règles** :

1. On ne regroupe que $\mathbf{2^n}$ cases (2,4,8,16,…).
2. les regroupements sont forcément des rectangles ou carrés (compte tenu des permutations pour les bords). Pas de « **L** », pas de **croix**, …
3. l'expression sera d'autant plus compacte que l'étendue des regroupements est grande. Pour un regroupement occupant la moitié du tableau il n'y a plus qu'une variable, pour le quart il reste deux variables, pour un regroupement de deux cases, il reste **n-1** variables. A la limite un regroupement de **tout le tableau** fait disparaître toute variable (***f*** **=1**). D'une manière générale, un regroupement de $\mathbf{2^i}$ cases conduit à supprimer **i** variables.
4. Il est inutile de regrouper des « **1** » qui ont tous déjà été regroupés par ailleurs. On parle alors de terme inclus.

3. Combinaisons Impossibles :

Parfois des combinaisons particulières des valeurs des variables ne peuvent pas se produire, pour des raisons physiques ou technologiques. On utilise alors ces combinaisons pour simplifier la fonction.

Le principe consiste à dire que puisque la combinaison n'apparaît pas, on considère que si elle apparaissait, elle donnerait un 1 ou un 0, selon ce qui nous arrange pour la simplification (un ascenseur ne peut être à 2 étages au même instant).

Exemple 1 : on crée la fonction f(a,b,c,d) telle que f = 1 ssi 1 < N < 5 avec N codé en BCD.
On dispose de 4 bits pour coder les nombres de 0 à 9 ; or 4 bits permettent de coder jusqu'à 2^4 = 16 valeurs :

N	a	b	c	d	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	impossible				1 ou 0
11	(ne				1 ou 0
12	peut				1 ou 0
13	pas				1 ou 0
14	se				1 ou 0
15	produire)				1 ou 0

Tableau de Karnaugh :

cd \ ab	00	01	11	10
0	0	1	X	0
01	0	0	X	0
11	1	0	X	X
10	1	0	X	X

Si on ne tient pas compte des états 10 à 15, f s'écrit : $f = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$
En considérant que les combinaisons impossibles sont affectées arbitrairement des valeurs 0 ou 1 on peut obtenir : $f = \bar{b}c + b\bar{c}\bar{d}$

On remplit les cases avec le **symbole φ** qui montre que l'on peut choisir la valeur que l'on veut (0 ou 1) pour cette case.