

التوزيع البواسوني Poisson distribution

يسمى أيضا بقانون الاحتمالات الصغيرة ، وهو مشتق من التوزيع الثنائي. تتمثل تطبيقاته أساسا في حالات تكرار حوادث في وحدات قياسية معينة كالزمن، المسافة، الحجم...الخ.

أ. شروط تطبيق التوزيع البواسوني:

يتم تطبيق التوزيع البواسوني إذا توفرت الشروط التالية:

- عدد مرات تكرار التجربة n غير محدد، أي لا يوجد حد أعلى للمحاولات وغالبا ما يكون كبير جدا.
- التجربة تقبل نتيجتين فقط: نجاح p (يكون صغير جدا) أو فشل q بحيث $p + q = 1$
- استقلالية التجارب. وهذا يعني أن متوسط عدد النجاحات في وحدة قياسية معينة مستقل عن متوسط عددها في باقي الوحدات القياسية. (احتمال النجاح ثابت)

إذا تحققت هذه الشروط نقول أن x_i يخضع (يتبع) التوزيع البواسوني ونكتب:

$$x_i \sim P(\lambda)$$

بحيث:

- P : رمز التوزيع البواسوني (الحرف الأول من كلمة poisson)
- x : متغير عشوائي
- λ : معلمة التوزيع وتمثل متوسط عدد مرات النجاح في الوحدة القياسية المعتبرة.

II. قانون التوزيع الاحتمالي وتابع التوزيع:

يُعطى القانون الاحتمالي للتوزيع البواسوني بالعلاقة التالية:

$$p(x = X) = \frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

بحيث:

- λ : معلمة التوزيع وتمثل متوسط عدد مرات النجاح في الوحدة القياسية المعتبرة. $\lambda > 0$.
- e : يمثل أساس اللوغاريتم، علما أن: $e \approx 2.71828$.

- $p(x = X)$: يمثل احتمال تحقيق X نجاح في وحدة قياسية واحدة.

مثال رقم (01):

محاسب في شركة ما يجد 6 فواتير خاطئة في الأسبوع.

- أوجد احتمال وجود أربع فواتير خاطئة في أسبوع ما.

الحل:

قبل حساب الاحتمال يجب أولاً تحديد القانون الاحتمالي المناسب. نلاحظ أن:

- عدد المحاولات غير محدد أي أن عدد الفواتير المسحوبة في الأسبوع الواحد غير محدد و 6 تمثل متوسط الفواتير الخاطئة المتحصل عليها من سحب n فاتورة خلال وحدة قياسية زمنية هي أسبوع واحد.

- كل محاولة (أي سحب لفاتورة) تقبل فقط نتيجتين: إما النجاح الذي يمثل سحب فاتورة خاطئة أو فشل أي فاتورة غير خاطئة.

- متوسط عدد النجاحات (إيجاد فاتورة خاطئة) في الأسبوع هو $\lambda = 6$ ، وهو مستقل عن باقي الأسابيع.

$$x_i \sim P(6) \quad \text{إذن:}$$

ومنه فالقانون الاحتمالي هو :

$$p(x = X) = \frac{6^x \times e^{-6}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

بما أن المطلوب هو حساب احتمال وجود 4 فواتير خاطئة فهذا يعني أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x = 4)$.

$$p(x = 4) = \frac{6^4 \times e^{-6}}{4!}$$

$$p(x = 4) = 0.13385$$

مثال رقم (02):

تتلقى مؤسسة الجزائرية للمياه اتصالات هاتفية بمعدل 15 مكاملة في الساعة.

(1) أحسب احتمال أن تصل إلى الشركة 5 مكالمات في الساعة الموالية.

(2) أوجد احتمال أن تصل إلى الشركة على الأقل مكالمتين بين الساعة 8 و 8:12 دقيقة.

(3) إذا تغيب موظف الاستقبال عن 10 دقائق، أحسب احتمال عدم فقد أي مكاملة.

الحل:

x_i : متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات الواردة إلى الشركة خلال وحدة قياسية (الزمن).

ومنه، من الواضح أن: $x_i \sim P(\lambda)$

(1) حساب احتمال أن تصل إلى الشركة 5 مكالمات في الساعة الموالية:

بما أن: $x_i \sim P(\lambda = 15)$ فإن القانون الاحتمالي هو:

$$p(x = X) = \frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

$$p(x = X) = \frac{15^x \times e^{-15}}{15!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

إذن احتمال وصول 5 مكالمات إلى الشركة في الساعة الموالية هو:

$$p(x = 5) = \frac{15^5 \times e^{-15}}{5!}$$

$$p(x = 5) \approx 0.002$$

(2) حساب احتمال أن تصل إلى الشركة على الأقل مكالمتين بين الساعة 8 و 8:12 دقيقة:

نلاحظ أن الوحدة القياسية المعتبرة في هذا السؤال تختلف عن الوحدة القياسية المعتبرة في السؤال

الأول (وفي معطيات التمرين) حيث أن الوحدة القياسية في هذا السؤال هي 12 دقيقة بدلا من ساعة واحدة

(60 دقيقة) المذكورة في بداية التمرين والسؤال الأول. وعليه يجب إيجاد قيمة λ التي توافق 12 دقيقة.

$$\lambda = \frac{15 \times 12}{60} = 3$$
 باستخدام القاعدة الثلاثية نجد:

ومنه: $x_i \sim P(\lambda = 3)$ والقانون الاحتمالي هو:

$$p(x = X) = \frac{3^x \times e^{-3}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

إذن، احتمال أن تصل إلى الشركة على الأقل مكالمتين بين الساعة 8 و 8:12 دقيقة هو :

$$p(x \geq 2) = 1 - [p(x < 2)]$$

المحاضرة رقم (04): التوزيع البواسوني + التوزيع المنتظم المتقطع

$$p(x \geq 2) = 1 - [p(x = 0) + p(x = 1)]$$

$$p(x \geq 2) = 1 - \left[\frac{3^0 \times e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \times e^{-3}}{1!} \right]$$

$$p(x \geq 2) = 1 - 4e^{-3}$$

$$p(x \geq 2) = 0.80$$

(3) إذا تغيب موظف الاستقبال عن 10 دقائق، حساب احتمال عدم فقد أي مكاملة:

لاحظ أن الوحدة القياسية المعتبرة في هذا السؤال 10 دقائق (وهي مختلفة عنها في السؤالين السابقين) وعليه يجب إيجاد قيمة λ التي توافق 10 دقائق.

$$\lambda = \frac{15 \times 10}{60} = 2.5$$
 باستخدام القاعدة الثلاثية نجد:

ومنه: $x_i \sim P(\lambda = 2.5)$ والقانون الاحتمالي هو:

$$p(x = X) = \frac{(2.5)^x \times e^{-2.5}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

إذن، احتمال عدم فقد أي مكاملة خلال فترة تغيب الموظف هو:

$$p(x = 0) = \frac{(2.5)^0 \times e^{-2.5}}{0!}$$

$$p(x = 0) = e^{-2.5}$$

$$p(x = 0) = 0.082$$

III. القيم العددية المميزة:

• لتوقع الرياضي:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع البواسوني فإن التوقع الرياضي (المتوسط) يحسب بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \lambda$$

• التباين:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع البواسوني فإن التباين يحسب بالعلاقة التالية:

$$V(x) = \lambda$$

ويمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي:

$$\sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

IV. المميزات الشكلية:

• معامل الالتواء:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع البواسوني فإن معامل الالتواء يحسب بالعلاقة التالية:

$$L = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

- نلاحظ أن: $L > 0$ دائما ومنه فإن التوزيع البواسوني ملتوي إلى اليمين (موجب الالتواء).

• معامل التفلطح:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع البواسوني فإن معامل التفلطح يحسب بالعلاقة التالية:

$$K = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

- نلاحظ أن: $K > 0$ دائما ومنه فإن التوزيع البواسوني مدبب (غير مفلطح).

مثال رقم (03):

تستقبل محطة بيع الوقود خلال ساعة ما عدد من الزبائن بمعدل 6 أشخاص، وليكن x_i متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يصلون إلى المحطة خلال ساعة. المطلوب:

(1) حدد القانون الاحتمالي للمتغير x_i .

(2) أحسب المميزات العددية و الشكلية.

(3) أحسب الاحتمالات : $p(x > 0)$ ، $p(0 \leq x < 2)$

الحل:

(1) تحديد القانون الاحتمالي للمتغير x_i :

x_i متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يصلون إلى المحطة خلال ساعة.

واضح أن: $x_i \sim P(\lambda = 6)$

ومنه فالقانون الاحتمالي هو :

$$p(x = X) = \frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

$$p(x = X) = \frac{6^x \times e^{-6}}{x!}, \quad x = \{0, 1, 2, 3 \dots \dots\}$$

(2) حساب المميزات العددية والشكلية:

- $E(x) = \lambda \Rightarrow E(x) = 6$
- $V(x) = \lambda \Rightarrow V(x) = 6$
- $L = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow L = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.4082$

نلاحظ أن $L > 0$ هذا يعني أن التوزيع ملتوي نحو اليمين.

- $K = 3 + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow K = 3 + \frac{1}{6} \Rightarrow k = 3.17$

نلاحظ أن $k > 3$ هذا يعني أن التوزيع مدبب.

(3) حساب الاحتمالات:

$$p(x > 0) = 1 - [p(x \leq 0)]$$

$$p(x > 0) = 1 - [p(x = 0)]$$

$$p(x \geq 0) = 1 - \left[\frac{6^0 \times e^{-6}}{0!} \right]$$

$$p(x \geq 0) = 1 - 0.00247$$

$$p(x \geq 0) = 0.9975$$

$$p(0 \leq x < 2) = [p(x = 0) + p(x = 1)]$$

$$p(0 \leq x < 2) = \left[\frac{6^0 \times e^{-6}}{0!} \right] + \left[\frac{6^1 \times e^{-6}}{1!} \right]$$

$$p(0 \leq x < 2) = 7e^{-6} = 0.01734$$

التوزيع المنتظم المتقطع: Discret Uniform distribution

I. شروط تطبيق التوزيع المنتظم:

يرتبط تطبيق التوزيع المنتظم بنوع من التجارب الاحصائية يُعرف بالتجارب العشوائية المتجانسة. ينتج عن هذا النوع من التجارب قيما محددة و مختلفة للمتغير العشوائي لكن باحتمالات متساوية.

II. قانون التوزيع الاحتمالي للتوزيع المنتظم:

إذا كان x_i متغير عشوائي متقطع يأخذ قيما محددة $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ باحتمالات

متساوية، فإن x_i يتوزع وفقا للتوزيع المنتظم. ونكتب: $x_i \sim U(n)$

بحيث:

- H : رمز التوزيع المنتظم المتقطع (الحرف الأول من كلمة Uniform)
 - x : متغير عشوائي
 - n : عدد الوحدات الداخلة في التجربة، وبالتالي يشترط بأن تكون $n > 0$.
- ويُعطى القانون الاحتمالي للتوزيع المنتظم بالعلاقة التالية:

$$p(x = X) = \frac{1}{n}, \quad x = \{1, 2, 3 \dots n\}$$

مثال رقم (01): تريد مؤسسة اختيار قسم من أقسامها الخمسة يهدف إجراء دراسة حول الأداء. المطلوب:

1) أكتب قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x_i الذي يمثل رقم القسم الظاهر على ورقة السحب.

الحل:

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير x_i :

- نلاحظ أن عدد الوحدات الداخلة في التجربة هو 5 أقسام أي $n = 5$
- سيتم ترقيم الأقسام الخمسة بأرقام من 1 إلى 5 ويتم سحب قسم عشوائيا. وبما أن x_i يمثل رقم القسم الظاهر على ورقة السحب فإن قيم x_i هي: $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- ونلاحظ أن فرص كل الأقسام بالظهور ستكون متساوية ($1/5$ لكل قسم).

ومنه فالتوزيع الذي يتبعه x_i هو التوزيع المنتظم.

$$x_i \sim U(5)$$

وعليه، فالقانون الاحتمالي لـ x_i هو:

$$p(x = X) = \frac{1}{5}, \quad x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ويمكن إدراج جدول التوزيع الاحتمالي كالتالي:

x_i	1	2	3	4	5	
p_i	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	$\sum p_i = 1$

III. القيم العددية المميزة

• التوقع الرياضي:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المنتظم فإن التوقع الرياضي (المتوسط) يحسب بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \frac{n+1}{2}$$

• التباين:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المنتظم فإن التباين يحسب بالعلاقة التالية:

$$V(x) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

ويمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

IV. المميزات الشكلية:

• معامل الالتواء:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المنتظم فإن معامل الالتواء:

$$L = 0$$

- وهذا معناه أن التوزيع المنتظم متناظر.

• معامل التفلطح:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المنتظم فإن معامل التفلطح يحسب بالعلاقة التالية:

$$K = 3 - \frac{6}{5} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)$$

مثال رقم (02):

علبة بها 10 بطاريات مرقمة من 1 إلى 10، نسحب عشوائيا بطارية من العلبة ونعين المتغير العشوائي

x_i الذي يمثل رقم البطارية الظاهر. المطلوب:

- حدد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي x_i .

- أدرج تابع التوزيع.

- أحسب المميزات العددية والشكلية.

الحل:

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير x_i :

- نلاحظ أن عدد الوحدات الداخلة في التجربة هو 10 بطاريات أي $n = 10$

- x_i يمثل رقم البطارية المسحوبة وعليه فإن قيم x_i هي: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

- ونلاحظ أن فرص كل البطاريات بالظهور ستكون متساوية ($1/10$ لكل بطارية).

ومنه فالتوزيع الذي يتبعه x_i هو التوزيع المنتظم.

$$x_i \sim U(10)$$

وعليه، فالقانون الاحتمالي لـ x_i هو:

$$p(x = X) = \frac{1}{10}, \quad x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ويمكن إدراج جدول التوزيع الاحتمالي كالتالي:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
p_i	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	$\sum p_i = 1$

(2) إدراج تابع التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{10} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{10} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{10} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{10} & 5 \leq x < 6 \\ \frac{6}{10} & 6 \leq x < 7 \\ \frac{7}{10} & 7 \leq x < 8 \\ \frac{8}{10} & 8 \leq x < 9 \\ \frac{9}{10} & 9 \leq x < 10 \\ \frac{10}{10} = 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

(3) حساب المميزات الشكلية والعديدية:

- $E(x) = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} \Rightarrow E(x) = 5.5$
- $V(x) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{(10)^2-1}{12} \Rightarrow V(x) = 8.25$

ويمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي:

- $\sigma_x = \sqrt{8.25} = 2.87$
- $L = 0$
- $K = 3 - \frac{6}{5} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right) \Rightarrow K = 3 - \frac{6}{5} \left(\frac{10^2+1}{10^2-1} \right) \Rightarrow K = 1.77$