I.1 ***Quelques rappels sur le calcul vectoriel***

a) ***Le produit scalaire (interne)***

Soient deux vecteurs de même dimension, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n$ et $y = [y_1, \dots, y_n]^T \in \mathcal{R}^n$.

$$< x, y > = x^T\, y = y^T\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \text{ avec } i = 1, \dots, n.$$

Cette opération retourne un scalaire. Le produit scalaire est aussi appelé produit interne.

b) ***Le produit externe***

Considérons deux vecteurs de dimensions différentes, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n$ et $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathcal{R}^m$

$$> x, y < = xy^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_m \\ \vdots & x_iy_j & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_m \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m.$$

Cette opération retourne une matrice de n lignes et m colonnes.

c) ***Norme d'un vecteur***

la norme d'un vecteur $X \in \mathcal{R}^n$, notée $\|X\|$, est une fonction réelle qui satisfait les conditions suivantes :

- $\|X\| \geq 0$ et $\|X\| = 0 \Longrightarrow X = 0$.
- $\|\alpha X\| = |\alpha|. \|X\|$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

- Norme L_1 (norme absolue) : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
- Norme Euclidienne L_2 (norme 2) : $\|X\|_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
- Norme L_p (norme p, $p \geq 1$) : $\|X\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ = $(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$.
  p=2, c'est la norme euclidienne L^2.
  p=1, c'est la norme L^1 .
- Norme infinie : $\|X\|_\infty = max(|x_i|)$, $i = 1, \dots, n$.

I.2 ***Quelques rappels sur le calcul matriciel***

a) ***La trace d'une matrice***

La trace d'une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{\mathrm{n*n}}$ est égale à la somme des éléments de la diagonale de cette matrice : $trace(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

b) ***Les mineurs et les cofacteurs***

- **Les mineurs**

Les mineurs m_{ij} des éléments a_{ij} d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{\mathrm{n*n}}$, sont les déterminants de la partie restante de $\boldsymbol{A}$ lorsqu'on ne tient pas compte de la ligne *i* et de la colonne *j,* c'est à dire, la matrice obtenue en rayant la 1ère colonne et la *i*-ième ligne.

- **Les mineurs principaux**

Les mineurs principaux d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{\mathrm{n*n}}$, appelés aussi mineurs directeurs sont définis comme suit : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$; $m_1 = a_{11}$; $m_2 = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)$; $m_3 = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$;

$m_n = det(\boldsymbol{A})$

- **Les cofacteurs**

Les cofacteurs c_{ij} des éléments a_{ij} d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{\mathrm{n*n}}$, sont donnés par : $c_{ij} = (-1)^{i+j}. m_{ij}$

c) Le rang d'une matrice

Le rang d'une matrice quelconque correspond au nombre maximum de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes. C'est aussi l'ordre du plus grand mineur principal carré non nul, tandis que chaque mineur carré d'ordre r+1 est nul . Si *k* est cet ordre, on dit que la matrice est de rang *k*.

c) La Matrice inverse

La matrice inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ d'une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{n*n}$, est donnée par la relation : $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{adj(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}$; $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

Si la matrice est inversible. On dit alors que la matrice est régulière ou non singulière.

La matrice adjointe de $\mathbf{A}$ est la matrice des cofacteurs c_{ij} des éléments a_{ij} d'une matrice A carrée, $A \in \mathcal{R}^{n*n}$, lorsqu'elle est transposée, et elle donné par $adj(\boldsymbol{A}) = [c_{ij}]^T = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}^T$

d) Valeurs et vecteurs propres

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{n*n}$. Les valeurs propres λ_i de cette matrice (appelées aussi valeurs caractéristiques) sont les racines de l'équation polynomiale : $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$. Le nombre de valeurs propres non nulles λ_i est égale au rang de la matrice A..

Les vecteurs propres (ou vecteurs caractéristiques) $\boldsymbol{v_i}$ de cette matrices se déduisent de la définition suivante : $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$

- $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ est appelé polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$. ; $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ est appelé la matrice caractéristique de $\boldsymbol{A}$.
- Deux matrices sont dites semblables si elles ont le même polynôme caractéristique.
- Si $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{n*n}$, ayant pour valeurs propres λ_i, $i = 1, \dots, n$: $det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$; $trace(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- La matrice $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ possède les mêmes valeurs propres.
- La matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$ possède des valeurs propres inverses et mêmes vecteurs propres.

e) Matrice modale

Si les valeurs propres, λ_i, $i = 1, \dots, n$, d'une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{n*n}$ sont réelles et simples (distinctes), on forme alors deux nouvelles matrices, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{P}$, telles que :

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{P} = [v_1 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_n]$$

La matrice $\boldsymbol{D}$ s'appelle la *forme diagonale* de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{P}$ s'appelle la *matrice modale* (ou la matrice de passage), c'est donc la matrice formée par les composantes des vecteurs propres v_i.

Proposition

Soient $\boldsymbol{P}$ une matrice modale pour $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{D}$ la forme diagonale de $\boldsymbol{A}$. Alors $det(\boldsymbol{P}) \neq 0$ et on a $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ et $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$.

f) Normes d'une matrice

La norme d'une matrice A , $A \in \mathcal{R}^{m*n}$, est une fonction notée ||A||, elle satisfaire les contraintes suivantes :

- $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0 \Longrightarrow A = 0_{m*n}$; $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\|, \alpha \in \mathbb{C}$; $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$; $\|A*B\| \leq \|A\| * \|B\|$.

Les normes matricielles, sont définies de la même façon que les normes vectorielles.

On appelle p-norme d'une matrice A , $A \in \mathcal{R}^{m*n}$, la norme : $\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{1/p}$.

- Norme L_1: $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)$
- Norme L_∞ : $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$
- Norme de Frobenius : $\|A\| = \|A\|_F = \sqrt{trace(\boldsymbol{A^T A})} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.
- Norme spectrale : $\|A\|_F = max(\sqrt{w_i})$, w_i valeurs propres de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

g) Forme quadratique

Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré en n variables : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

On peut représenter la forme quadratique grâce aux notations matricielles. Pour cela, considérons $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée, $\boldsymbol{A} \in R^{n*n}$, et $\boldsymbol{x}$ un vecteur de *n* éléments, $\boldsymbol{x} \in R^n$: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\boldsymbol{t}}$ alors $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^T A x}$.

Remarque

On dit que de l'expression $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x^T A y}$ est de la forme bilinéaire, avec $\boldsymbol{y}$ un vecteur de dimension n, $\boldsymbol{y} \in R^n$.

***h)* Matrice définie positive (négative) et semi définie positive (négative)**

Soit une matrice $\boldsymbol{A} \in R^{n*n}$,

- $\boldsymbol{A}$ est définie positive ($\boldsymbol{A} > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0, \forall \boldsymbol{X} \neq 0$) Ssi ($a_{ii} > 0$ et $m_i > 0, i = 1, \dots, n$) ou $\lambda_i > 0$.
- $\boldsymbol{A}$ est définie négative ($\boldsymbol{A} < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} < 0, \forall \boldsymbol{X} \neq 0$) Ssi ($a_{ii} < 0$ et $(-1)^i m_i > 0, i = 1, \dots, n$) ou $\lambda_i < 0$.
- $\boldsymbol{A}$ est semi définie positive ($\boldsymbol{A} \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \geq 0, \forall \boldsymbol{X} \neq 0$) Ssi ($a_{ii} \geq 0$ et $m_i > 0, i = 1, \dots, n-1$, et $m_n = 0$) ou $\lambda_i \geq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ est semi définie négative ($\boldsymbol{A} \leq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leq 0, \forall \boldsymbol{X} \neq 0$) Ssi ($a_{ii} \leq 0$ et $(-1)^i m_i > 0, i = 1, \dots, n-1$, et $m_n = 0$) ou $\lambda_i \leq 0$.
- Sinon $\boldsymbol{A}$ est indéfinie (la matrice à des valeurs propres positives et négatives)

I.3. Notions sur les dérivées des vecteurs et des matrices

a) La différentiation par rapport à un scalaire

Soit $\boldsymbol{X}$ vecteur, $\boldsymbol{X} \in R^n$, et soit $\boldsymbol{A}$ une matrice, $A \in R^{m*n}$.

La dérivée du vecteur $\boldsymbol{X}$ par rapport à un scalaire t vaut : $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial t \\ \vdots \\ \partial x_n/\partial t \end{bmatrix}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{X}^T}{\partial t} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial t & \dots & \partial x_n/\partial t \end{bmatrix}$.

La dérivée de la matrice $\boldsymbol{A}$ par rapport à un scalaire t vaut : $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right]$.

Quelques propriétés sur la dérivation

Soient $\boldsymbol{A} \in R^{m*n}$ et $\boldsymbol{B} \in R^{m*n}$ des matrices et soit $\boldsymbol{X} \in R^n$ un vecteur :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} ; \quad \frac{\partial(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} ; \quad \frac{\partial(\boldsymbol{AX})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{X^T A X})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{X^T}}{\partial t}\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{X^T}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X^T A}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{A^{-1}}}{\partial t} = -\boldsymbol{A^{-1}}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{A^{-1}}; \quad \frac{\partial(\boldsymbol{AA^{-1}})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial t} = 0$$

b) ***Le gradient d'une fonction scalaire***

Soit une fonction scalaire, définie par : $f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où $\boldsymbol{X} \in R^n$ et $f: R^n \to R$.

Le gradient de la fonction f par rapport à $\boldsymbol{X}$ a pour expression :

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} = \nabla_{\mathrm{x}} f(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

Le vecteur gradient représente le vecteur des dérivées premières de la fonction f.

Propriétés

Soit la matrice A et les vecteurs X et Y,

a) $\frac{\partial}{\partial X} Y^T X = Y$ b) $\frac{\partial}{\partial Y} Y^T X = X$ c) $\frac{\partial}{\partial X} X^T A Y = AY$

d) $\frac{\partial}{\partial Y} X^T A Y = A^T X$ e) $\frac{\partial}{\partial X} AX = A^T$ f) $\frac{\partial}{\partial X} X^T A X = AX + A^T X$

Si la matrice A est symétrique $\frac{\partial}{\partial X} X^T A X = 2AX$.

c) La Jacobienne d'une fonction vectorielle

Soit une fonction vectorielle $f(\boldsymbol{X}) = [f_1(\boldsymbol{X}) \quad f_2(\boldsymbol{X}) \quad \dots \quad f_m(\boldsymbol{X})]^T$, où $\boldsymbol{X} \in R^n$ et $f: R^n \to R^m$

La matrice des dérivées premières de la fonction f relatives aux composantes x_j du vecteur $\boldsymbol{X}$ s'écrit :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X^T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{X})}{\partial x_j} \end{bmatrix} \in R^{m*n}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

On appelle cette matrice la matrice Jacobienne de f . Cette matrice s'écrit également :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathrm{x}} f_1(\boldsymbol{X})^T \\ \vdots \\ \nabla_{\mathrm{x}} f_m(\boldsymbol{X})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

d) La Hessienne d'une fonction scalaire

Etant donné une fonction scalaire $f(\boldsymbol{X})$, $f: R^n \to R$. La matrice Hessienne de $f(\boldsymbol{X})$ relative au vecteur $\boldsymbol{X} \in R^n$ est définie comme la matrice symétrique suivante :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix} \in R^{n*n}, i, j = 1, \dots, m$$

La matrice Hessienne est la matrice des dérivées secondes de la fonction scalaire f relativement au vecteur $\boldsymbol{X} \in R^n$. Elle représente aussi la matrice Jacobienne du gradient de la fonction scalaire f.

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial [\nabla_{\mathrm{x}} f(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} \end{bmatrix}^T = \nabla^2_{\mathrm{XX}} f(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^2(\boldsymbol{X})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^2(\boldsymbol{X})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^2(\boldsymbol{X})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^2(\boldsymbol{X})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

e) Développement (Expansion) en série de Taylor

f) L'expansion en série de Taylor à l'ordre n d'une une fonction scalaire $f\ (x)$ dépendant d'une unique variable $x \in R$ est :

$$f\ (x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} + \ \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^n} + \ \varepsilon(x_0)$$

où $\Delta x = x - x_0$ et $\varepsilon(x_0)$ sont les termes d'ordres supérieur impliquants les dérivées partielles d'ordre supérieur, négligeables lorsque $|\Delta x|$ est suffisamment petit.

g) Soit une fonction multivariable scalaire, définie par : $f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où $\boldsymbol{X} \ \in \ R^n$ et $f: R^n \to R$. L'expansion en série de Taylor de $f\ (\boldsymbol{X})$ au voisinage d'un point $\boldsymbol{X_0}$ en termes de $\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0} \ = \Delta x_i \ = x_i \ - x_{i0}$ $(i \ = \ 1, \dots, n)$ s'exprime ainsi :

$$f(\boldsymbol{X_0} + \Delta\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X_0}) + \Delta\boldsymbol{X}^T \nabla_{\mathrm{x}} f(\boldsymbol{X_0}) + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{X}^T \nabla_{\mathrm{x}}^2 f(\boldsymbol{X_0}) \Delta\boldsymbol{X} + \dots + \varepsilon(\boldsymbol{X_0})$$

Exemples

- Calculer les produits scalaire et externe du deux vecteurs suivants : $x = [3\ 2]^T$ et $y = [4\ 1]^T$.

- Soit le vecteur le vecteur X donné par $X = [-3 \ \ -1 \ \ 2]^T$, calculer les normes 1,2 et l'infinie correspondantes.

- Donner la matrice transposée de $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \in \ \mathcal{R}^{2*3}$

- Calculer la trace de la matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

- Calculer les mineurs m_{11}, m_{12}, m_{33}, les mineurs principaux et cofacteurs c_{11}, c_{12}, c_{33} de la matrice suivante :
  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- Calculer le déterminant de la matrice de l'exemple précédent

- Déterminer le rang de la matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

- Calculer le déterminant des matrices suivantes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- Calculer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice suivante : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

- Donner la forme matricielle de la forme quadratique suivante : $f_1(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2$

- Même question pour le polynôme $f_2(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 20x_1x_2 + 16x_2x_3 - 4x_1x_3$