Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatiques

Département de mathématiques Master 2, analyse fonctionnelle

Exercices corrigés
Optimisation

Exercice 1. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.*

1. *Dire pourquoi on a $f^*(x') = \sup\limits_{x \in dom(f)} (\langle x', x\rangle - f(x)), \quad \forall x' \in E'$.*
2. *Soit $a \in E$ et $f_1(x) = f(x+a)$. Montrer que pour tout $x' \in E'$, $f_1^*(x') = f^*(x') - \langle x', a\rangle$.*
3. *$f^*(0) = -\inf\limits_{x\in E} f(x)$.*
4. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions définies sur E, Montrer que*

$$\left(\inf_{i\in I} f_i\right)^* = \sup_{i\in I} f_i^*.$$

Correction de l'exercice 1.

1. Sachant que si $x \in dom(f)$ alors $f(x) < +\infty$, donc

$$f^*(x') = \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - f(x)) = \sup_{x\in dom(f)}(\langle x', x\rangle - f(x)).$$

2. Soit $x' \in E'$, nous avons par la définition

$$\begin{aligned} f_1^*(x') &= \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - f_1(x)) \\ &= \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - f(x+a)) \\ &= \sup_{y\in E}(\langle x', y\rangle - f(x)) - \langle x', a\rangle \quad (a \in E) \\ &= f^*(x') - \langle x', a\rangle. \end{aligned}$$

3. De même, on a

$$\begin{aligned} f^*(0) &= \sup_{x\in E}(-f(x)) \\ &= -\inf_{x\in E}(f(x). \end{aligned}$$

4. Soit $x' \in E'$, alors

$$\begin{aligned}
\left(\inf_{i\in I} f_i\right)^*(x') &= \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - \inf_{i\in I} f_i(x)) \\
&= \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle + \sup_{i\in I} -f_i(x)) \\
&= \sup_{x\in E}\sup_{i\in I}(\langle x', x\rangle - f_i(x)) \\
&= \sup_{i\in I}\sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - f_i(x)) \\
&= \left(\sup_{i\in I} f_i^*\right)(x').
\end{aligned}$$

Exercice 2. *Soient $f, g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit l'inf-convolution de f et g par*

$$(f \Box g)(x) = \inf_{x=x_1+x_2}(f(x_1) + g(x_2)).$$

Calculer $dom(f \Box g)$ et montrer que $f^* + g^* = (f \Box g)^*$.

Correction de l'exercice 2. On a

$$\begin{aligned}
dom(f\Box g) =& \{x \in E/\ (f\Box g)(x) < +\infty\} \\
=& \{x \in E/\ \inf_{x=x_1+x_2}(f(x_1) + g(x_2)) < +\infty\} \\
=& \{x \in E/\ f(x_1) + g(x_2) < +\infty,\ \forall x = x_1 + x_2 \in E\} \\
=& \{x_1, x_2 \in E/\ f(x_1) < +\infty \text{ et } g(x_2) < +\infty\} \\
=& dom(f) \cap dom(g).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(f\Box g)^*(x') &= \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - (f\Box g)(x)) \\
&= \sup_{x\in E}(\langle x', x\rangle - \inf_{x=x_1+x_2} f(x_1) + g(x_2)) \\
&= \sup_{x\in E}\sup_{x=x_1+x_2}(\langle x', x\rangle - f(x_1) - g(x_2)) \\
&= \sup_{x_1,x_2\in E}(\langle x', x_1 + x_2\rangle - f(x_1) - g(x_2)) \\
&= \sup_{x_1\in E}(\langle x', x_1\rangle - f(x_1)) + \sup_{x_2\in E}(\langle x', x_2\rangle - g(x_2)) \\
&= f^*(x') + g^*(x').
\end{aligned}$$

Exercice 3. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Montrer que la fonction conjuguée f^* de f est convexe semi-continue inférieurement.*

Correction de l'exercice 3. Pour tout $x \in E$, posons

$$\phi_x(x') = \langle x', x\rangle - f(x)$$

est une fonction affine. On a

$$\begin{aligned}
epi(f^*) =&\{(x',t) \in E' \times \mathbb{R}/\ f^*(x') \leq t\} \\
=&\{(x',t) \in E' \times \mathbb{R}/\ \sup_{x \in dom(f)} (\langle x', x\rangle - f(x)) \leq t\} \\
=&\{(x',t) \in E' \times \mathbb{R}/\ \langle x', x\rangle - f(x) \leq t,\ \forall x \in dom(f)\} \\
=& \bigcap_{x \in dom(f)} epi(\phi_x).
\end{aligned}$$

On sait que l'épigraphe d'une fonction affine est un sous ensemble convexe fermé, donc $epi(f^*)$ est un sous ensemble convexe fermé de $E' \times \mathbb{R}$.

Exercice 4. *Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est s.c.i. au point $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in E :\ \|x - x_0\| < \delta \textit{ on a } f(x) - f(x_0) > -\epsilon.$$

Montrer que f est s.c.i. si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ alors

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Montrer que si f est une fonction convexe fortement s.c.i. alors f est faiblement s.c.i.

Correction de l'exercice 4. Supposons que f est s.c.i. Si $\|x_n - x_0\| \to 0$ quand $n \to +\infty$ alors on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \|x_n - x_0\| < \delta \textit{ pour } n > N.$$

Donc si f est s.c.i.

$$f(x_n) > f(x_0) - \epsilon,\ \forall n > N.$$

On en déduit que

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) > f(x_0) - \epsilon,\ \forall \epsilon > 0.$$

Inversement, supposons qu'il existe $x_0 \in E$ où f n'est pas s.c.i. alors

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0, \exists x \in E :\ \|x - x_0\| < \delta \textit{ et } f(x) - f(x_0) \leq -\epsilon,$$

c'est à dire, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 telle que $f(x_n) - f(x_0) \leq -\epsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(x_0) - \epsilon,$$

contradiction.
Supposons à l'instant que f est convexe et fortement s.c.i. donc $epi(f)$ est un sous ensemble convexe fortement fermé de $E \times \mathbb{R}$ et par conséquent $epi(f)$ est un sous ensemble faiblement fermé de $E \times \mathbb{R}$. Alors f est faiblement s.c.i.

Exercice 5. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement. On appelle fonction de récession de f notée f'_∞ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$f'_\infty(d) = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

où $x \in dom(f)$, quelconque.

1. *Montrer que $(epi f)_\infty = epi f'_\infty$.*

2. *Pour $r \in \mathbb{R}$, soit $L_r(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq r\}$. Montrer que pour tout r tel que $L_r(f)$ est non vide, on a*

$$(L_r(f))_\infty = \{x' \in \mathbb{R}^n : \ f'_\infty(x') \leq 0\}.$$

Correction de l'exercice 5. Remarquons d'abord que si $x \in dom(f)$, alors $(x, f(x)) \in epi(f)$.

1. On a

$$\begin{aligned}
(d,r) \in epi f'_\infty \Leftrightarrow & f'_\infty(d) \leq r \\
\Leftrightarrow & \sup_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq r \\
\Leftrightarrow & \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq r, \quad \forall t > 0 \\
\Leftrightarrow & f(x+td) \leq rt + f(x), \quad \forall t > 0 \\
\Leftrightarrow & \big(x + td, rt + f(x)\big) \in epi(f), \quad (x \in dom(f)) \\
\Leftrightarrow & (x, f(x)) + t(d,r) \in epi(f) \\
\Leftrightarrow & (d,r) \in \big(epi f\big)_\infty.
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in L_r(f)$ quelconque, on a

$$\begin{aligned}
d \in (L_r(f))_\infty \Leftrightarrow & (x+td) \in L_r(f), \quad \forall t > 0 \\
\Leftrightarrow & f(x+td) \leq r, \quad \forall t > 0 \\
\Leftrightarrow & ((x+td), r) \in epi(f) \quad \forall t > 0 \\
\Leftrightarrow & (x, r) + t(d, 0) \in epi(f), \quad \forall t > 0 \\
\Leftrightarrow & (d, 0) \in (epi f)_\infty = epi f'_\infty \\
\Leftrightarrow & f'_\infty(d) \leq 0.
\end{aligned}$$

Exercice 6. *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $x \mapsto |x|$ une fonction convexe. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\partial f(x)$.*

Correction de l'exercice 6. Soit $x' \in \mathbb{R}$, on sait que

$$f^*(x') = \begin{cases} 0 & si \ |x'| \leq 1 \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x) \Leftrightarrow & f^*(x') + f(x) = \langle x', x \rangle, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & |x| = x'x, \ \text{tel que } |x'| \leq 1 \end{aligned}$$

on distigue tois cas :

$$\begin{aligned} &Si\ x = 0 \Rightarrow x' \in [-1, 1] \\ &Si\ x < 0 \Rightarrow x' = -1 \\ &Si\ x > 0 \Rightarrow x' = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & si\ x < 0 \\ \{1\} & si\ x > 0 \\ [-1, 1] & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. *Soit H un espace de Hilbert, soit C un sous ensemble non vide convexe fermé. On définit la projection P_C d'un point $x \in H$ sur C par*

$$\|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Rappelons que

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

On définit f sur H par

$$f(x) = \frac{1}{2}\Bigg(\|x\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2\Bigg).$$

Montrer que f est convexe et Fréchet différentiable avec $df(x) = P_C(x), \ \forall x \in H$.

Correction de l'exercice 7. Puisque

$$\begin{aligned} 2f(x) =& \|x\|^2 - \inf_{y \in C} \|x - y\| \\ =& \sup_{y \in C} (2\langle x, y \rangle - \|y\|^2). \end{aligned}$$

f est le suprémum des fonctions affines, donc convexe. Montrons qu'elle est F-différentiable. Pour celà, fixonx $x \in H$, pour tout $y \in H$ on a

$$\|(x + y) - P_C(x + y)\| \leq \|(x + y) - P_C(x)\|.$$

En utilisant la définition de f et du produit scalaire, on trouve

$$f(x + y) - f(x) - \langle P_C(x), y \rangle \geq 0.$$

D'autre part, puisque

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - P_C(x + y)\|,$$

on a par la lipschizité de P_C

$$\begin{aligned} f(x+y)-f(x)-\langle P_C(x),y\rangle \leq & \langle y, P_C(x+y)-P_C(x)\rangle \\ \leq & \|y\|\|P_C(x+y)-P_C(x)\| \\ \leq & \|y\|^2 \end{aligned}$$

d'où la Fréchet différentiablité de f.

Exercice 8. *Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire $\langle .,.\rangle$ et soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction.*

1. *Montrer que si $\partial f(x)\neq\emptyset$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, alors f est convexe.*

2. *Soit $A=\overline{B}(0,1)$ et $f=\mathbb{I}_A$ ($\mathbb{I}_A$ désigne la fonction indicatrice de A). Calculer $f^*=\mathbb{I}_A^*$. Choisissant à présent, $n=2$ et soit*

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x-1)^2+y^2\leq 1\}=\overline{B}((0,1),1),$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=0\}=\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}^2\}.$$

Calculer $\partial\mathbb{I}_A(0,0)$ et $\partial\mathbb{I}_D(0,0)$ et conclure.

Correction de l'exercice 8.

1. Soient $u,v\in\mathbb{R}^n$, et soit $\lambda\in]0,1[$. On sait que $\partial f(x)\neq\emptyset$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. En particulier pour $x=\lambda u+(1-\lambda)v)$, il existe donc $x'\in\partial f(\lambda u+(1-\lambda)v)$. Par définition, on a

$$f(y)\geq f(\lambda u+(1-\lambda)v)+\langle x',\lambda u+(1-\lambda)v\rangle,\ \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Notamment, pour $y=u$, on obtient

$$f(u)\geq f(\lambda u+(1-\lambda)v)+\langle x',(1-\lambda)(u-v)\rangle, \tag{1}$$

et pour $y=v$, on a

$$f(v)\geq f(\lambda u+(1-\lambda)v)+\langle x',\lambda(v-u)\rangle. \tag{2}$$

Multipliant (1) par λ et (2) par $(1-\lambda)$, on aura

$$\begin{aligned} \lambda f(u) &\geq \lambda f(\lambda u+(1-\lambda)v)+\lambda(1-\lambda)\langle x',u-v\rangle, \\ (1-\lambda)f(v) &\geq (1-\lambda)f(\lambda u+(1-\lambda)v)-\lambda(1-\lambda)\langle x',u-v\rangle. \end{aligned}$$

En sommant ces deux dernières inégalités, il vient que

$$\lambda f(u)+(1-\lambda)f(v)\geq \lambda f(\lambda u+(1-\lambda)v).$$

D'où la convexité de f.

2. Soit $x' \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} f^*(x') &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (\langle x', x\rangle - f(x)) \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (\langle x', x\rangle - \mathbb{I}_A(x)) \\ &= \sup \big[\sup_{x\in A}(\langle x', x\rangle, \sup_{x\notin A}(\langle x', x\rangle - \infty)\big] \\ &= \sup_{x\in A}\langle x', x\rangle = \|x'\|. \end{aligned}$$

Soit $C = \overline{B}((0,1),1)$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_C^* &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x', y') &\mapsto \mathbb{I}_C^*(x', y') \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{I}_C^*(x', y') = \sup_{(x,y)\in\overline{B}((0,1),1)} \langle (x', y'), (x, y)\rangle.$$

Par le changement de variable $x - 1 = u$ donc $(u, y) \in \overline{B}((0,1),1)$ et alors

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_C^*(x', y') &= \sup_{(u,y)\in\overline{B}((0,1),1)} \langle (x', y'), (u+1, y)\rangle \\ &= \sup_{(u,y)\in\overline{B}((0,1),1)} \langle (x', y'), (u, y)\rangle + \langle (x', y'), (1, 0)\rangle \\ &= \|(x', y')\| + x' = |x'| + |y'| + x'. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\partial\mathbb{I}_C(0,0)$. On sait que

$$(x', y') \in \partial\mathbb{I}_C(0,0) \Leftrightarrow \mathbb{I}_C^*(x', y') + \mathbb{I}_C(0,0) = \langle (x', y'), (0,0)\rangle = 0$$

il s'ensuit que $\mathbb{I}_C^*(x', y') = |x'| + |y'| + x' = 0$. On distingue trois cas :

Si $x' = 0 \Rightarrow y' = 0$

Si $x' < 0 \Rightarrow y' = 0$

Si $x' > 0 \Rightarrow$ cette équation n'a pas de solutions.

On en déduit que

$$\partial\mathbb{I}_C(0,0) = \{(x', 0),\ x' \leq 0\}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \partial\mathbb{I}_D(0,0) =& \{(x', y') \in \mathbb{R}^2,\ \langle (x', y'), (x, y)\rangle \leq 0\ \forall (x, y) \in D\} \\ =& \{(x', y') \in \mathbb{R}^2,\ \langle (x', y'), (0, y)\rangle \leq 0\ \forall y \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(x', y') \in \mathbb{R}^2,\ y''y \leq 0\ \forall y \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\partial\mathbb{I}_C(0,0) + \partial\mathbb{I}_D(0, 0\{(x', 0), x' \leq 0\}.$$

D'autre part,

$$(\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(x,y) = \begin{cases} 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \\ +\infty \; sinon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \partial(\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(0,0) =& \{(x',y') \in \mathbb{R}^2, \; (\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(x,y) \geq (\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(0,0) + \langle (x',y'),(x,y)\rangle, \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ =& \{(x',y') \in \mathbb{R}^2, \; (\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(0,0) \geq (\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(0,0) + \langle (x',y'),(0,0)\rangle\} \\ & \cap \{(x',y') \in \mathbb{R}^2, \; +\infty \geq 0 + \langle (x',y'),(x,y)\rangle, \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \\ =& \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On observe que

$$\partial(\mathbb{I}_C + \mathbb{I}_D)(0,0) \not\subset \partial(\mathbb{I}_C)(0,0) + \partial(\mathbb{I}_D)(0,0).$$

F. Aliouane
f_aliouane@univ-jijel.dz