Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatiques
Département de mathématiques

$2^{\text{ème}}$ année Master analyse fonctionnelle Le 19 Janvier 2023

Corrigé type d'examen d'optimisation

Exercice 1.

Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x' \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons que $x' \in \partial g(x_0)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
& g(x) \geq g(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Leftrightarrow & g(x) - \langle x', x \rangle \geq g(x_0) - \langle x', x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Leftrightarrow & \langle x', x \rangle - g(x) \leq \langle x', x_0 \rangle - g(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Leftrightarrow & \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle x', x \rangle - g(x) \big) \leq \langle x', x_0 \rangle - g(x_0) \\
\Leftrightarrow & g^*(x') \leq \langle x', x_0 \rangle - g(x_0) \\
\Leftrightarrow & g^*(x') + g(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle.
\end{aligned}$$

On montre maintenant que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Nous avons, pour tout $x' \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
g^*(x') &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle x', x \rangle - g(x) \big) \\
&\geq \langle x', x_0 \rangle - g(x_0),
\end{aligned}$$

donc

$$g^*(x') + g(x_0) \geq \langle x', x_0 \rangle.$$

De (ii), on a

$$g^*(x') + g(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle.$$

D'où

$$g^*(x') + g(x_0) = \langle x', x_0 \rangle.$$

Reste à montrer que $(iii) \Rightarrow (i)$. Supposons que (iii) a lieu. On a,

$$\begin{aligned}
& g^*(x') + g(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
\Rightarrow & \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle x', x \rangle - g(x) \big) + g(x_0) = \langle x', x_0 \rangle \\
\Rightarrow & \langle x', x_0 \rangle \geq \langle x', x \rangle - g(x) + g(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow & g(x) \geq g(x_0) + \langle x', x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow & x' \in \partial g(x_0).
\end{aligned}$$

3. Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe s.c.i. paire et croissante sur $[0, +\infty[$. Soit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \theta(\|x\|)$.

(a) Montrons que f est propre, convexe s.c.i. Il est clair que f est propre car θ est propre. Montrons qu'elle est convexe. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) = \theta(\|\lambda x + (1 - \lambda) y\|).$$

La fonction $x \longmapsto \|x\|$ est convexe. Donc

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \le \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|.$$

Puisque θ est croissante et convexe, on aura

$$\begin{aligned}
\theta(\|\lambda x + (1-\lambda)y\|) \le& \theta(\|x\| + (1-\lambda)\|y\|)\\
\le& \lambda\theta(\|x\|) + (1-\lambda)\theta(\|y\|)\\
\le& \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que f est s.c.i. Montrons que ses ensembles de niveau sont fermés. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $h(x) = \|x\|$ et soit $A_\lambda(f)$ les ensembles de niveau de f. On a

$$\begin{aligned}
A_\lambda(f) =& f^{-1}([\lambda, +\infty[)\\
=& \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \le \lambda\}\\
=& \{x \in \mathbb{R}^n :\ \theta(\|x\|) \le \lambda\}\\
=& \{x \in \mathbb{R}^n :\ \theta(h(x)) \le \lambda\}\\
=& \{x \in \mathbb{R}^n :\ \theta \circ h(x) \le \lambda\}\\
=& A_\lambda(\theta \circ h)\\
=& h^{-1}(\theta^{-1}([\lambda, +\infty[).
\end{aligned}$$

Puisque θ est s.c.i. et h est continue, alors $A_\lambda(\theta \circ h)$ est fermé, et donc f est s.c.i.
(b) Exprimons f^* en fonction de θ^*. Nous avons,

$$\begin{aligned}
f^*(x') =& \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(\langle x', x\rangle - f(x)\big)\\
=& \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{\langle x', x\rangle}{\|x\|}\|x\| - \theta(\|x\|)\right)\\
=& \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t=\|x\|} \left(t\frac{\langle x', x\rangle}{\|x\|} - \theta(t)\right)\\
=& \sup_{t\ge 0} \left(t \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\langle x', x\rangle}{\|x\|} - \theta(t)\right)\\
=& \sup_{t\ge 0} \big(t\|x'\| - \theta(t)\big)\\
=& \theta^*(\|x'\|)
\end{aligned}$$

car θ est paire.
(c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\partial f(x) =& \{y \in \mathbb{R}^n :\ f^*(y) + f(x) = \langle y, x\rangle\}\\
=& \{y \in \mathbb{R}^n :\ \theta^*(\|y\|) + \theta(\|x\|) = \langle y, x\rangle\}.
\end{aligned}$$

Par définition de θ^*,

$$\|y\|\|x\| \le \theta^*(\|y\|) + \theta(\|x\|).$$

On a pour tout $y \in \partial f(x)$

$$\theta^*(\|y\|) + \theta(\|x\|) = \langle y, x\rangle \le \|y\|\|x\|.$$

Donc

$$\langle y, x\rangle = \|y\|\|x\| \quad \text{et} \quad \theta^*(\|y\|) + \theta(\|x\|) = \|y\|\|x\|.$$

Alors $\|y\| \in \partial\theta(\|x\|)$. Donc

$$\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| \in \partial\theta(\|x\|), \ et \ \langle y, x\rangle = \|y\|\|x\|\}.$$

Si $\theta(t) = \frac{1}{2}t^2$, alors

$$\begin{aligned} \theta^*(x) =& \sup_{t\in\mathbb{R}} \big(tx - \theta(t)\big) \\ =& \sup_{t\in\mathbb{R}} \big(tx - \frac{1}{2}t^2\big). \end{aligned}$$

Soit $h(t) = tx - \frac{1}{2}t^2$, $h'(t) = x - t = 0$, alors $t = x$. Donc, $\theta^*(x) = \frac{1}{2}x^2$.
D'où,

$$\begin{aligned} \partial\theta(t) =& \{y \in \mathbb{R} : \ \theta^*(y + \theta(t) = \langle t, x\rangle\} \\ =& \{y \in \mathbb{R} : \ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}t^2 = tx\} \\ =& \{y \in \mathbb{R} : \ x^2 + t^2 - 2tx = 0\} \\ =& \{y \in \mathbb{R} : \ x = t\} = \{t\}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \partial f(x) =& \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| \in \partial\theta(\|x\|), \ et \ \langle y, x\rangle = \|y\|\|x\|\} \\ =& \{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, x\rangle = \|y\|\|x\| \ et \ \|y\| = \|x\|\}. \end{aligned}$$