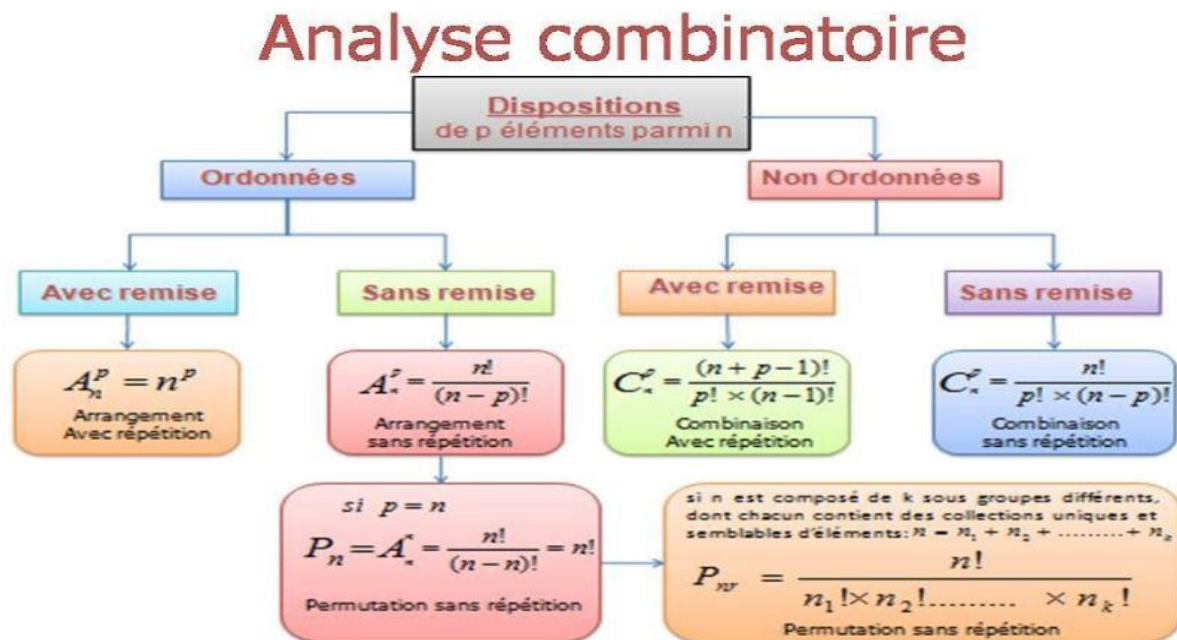


Partie B : Probabilités

Chapitre 1 : Analyse Combinatoire



Objectifs

L'objectif du chapitre 1 est de :

- ✓ Rechercher les possibilités de valeurs d'une variable aléatoire.
- ✓ Savoir le nombre de possibilités d'objets à former à partir des éléments de base.
- ✓ Compter le nombre de possibilités pour une expérience aléatoire.



Prérequis

Il est recommandé aux apprenants de connaître.

- Méthodes du raisonnement mathématique.
- Les ensembles, les relations et les applications.

Mots clés :

Arrangements, Permutations, Combinaisons, Ordre, Répétition.

I. Introduction

L'analyse combinatoire est un ensemble de techniques mathématiques qui servent à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini (souvent de cardinalité grande).

II. Principe de multiplication

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.

Principe : Suppose qu'une expérience est la succession de m sous-expériences. Si la i -ème expérience à n_i résultats possibles pour $i=1, \dots, m$ alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est : $n = n_1 n_2 \dots n_m$

III. Arrangement (Expérience ordonnée)

Tirer P éléments parmi une totalité de n éléments et les trier.

1. Arrangement sans répétition : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple : 15 candidats se présentent à un concours. De combien de façons différentes seront classées les trois premiers ?

Réponse : Il s'agit d'ordonner $p = 3$ candidats parmi $n = 15$ sans répétition, donc on a un arrangement sans répétition. $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 2730$

2. Arrangement avec répétition : $A_n^p = n^p$

Exemple : Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés dans l'alphabet français de 26 lettres ?

Réponse : Remarquons ici que : $n = 26$ et $p = 3$.

L'ordre est important dans un mot.

On peut répéter une lettre dans un mot.

On a donc un arrangement avec répétition. $A_n^p = n^p = 26^3 = 17576$ cas possibles.

IV. Permutation (Expérience ordonnée)

Pour le cas particulier $p = n$, l'arrangement est appelé permutation notée P_n .

1. Permutation sans répétition : $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(0)!} = n!$

Exemple : Quel est le nombre de manières d'ordonner les trois chiffres {1; 2; 3} ?

Réponse : Le nombre de manières est $P_n = P_3 = 3! = 6$.

2. Permutation avec répétition : $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ ($n = \sum_{i=1}^k n_i$)

Exemple : Quel est le nombre de manières d'ordonner les lettres suivantes {A ; A ; B ; B ; B ; C} ?

Réponse : Le nombre de manières est $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = P_6^{2, 3, 1} = \frac{6!}{2!3!1!} = 60$.

V. Combinaison (Expérience non ordonnée)

Tirer aléatoirement p éléments parmi une totalité de n éléments et former des objets aléatoires sans tenir compte de l'ordre des éléments combinés.

1. Combinaison sans répétition : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $p \leq n$

Exemple : On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de résultats possibles ?

Réponse : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{32!}{5!(32-5)!}$

2. Combinaison avec répétition : $C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple : Les combinaisons avec répétition de 2 éléments pris dans {1; 2; 3} sont:

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = 6$$

VI. Méthode de travail

Pour toute expérience il faut connaître :

1. L'effectif total n et le nombre de tirage p
2. Appliquer le schéma suivant

$$\text{L'expérience est} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ordonnée} \\ \text{Non ordonnée} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Avec répétition} \\ \text{Sans répétition} \\ \text{avec répétition} \\ \text{sans répétition} \end{array} \right.$$