# Probabilités & Statistique

Partie B : Probabilités

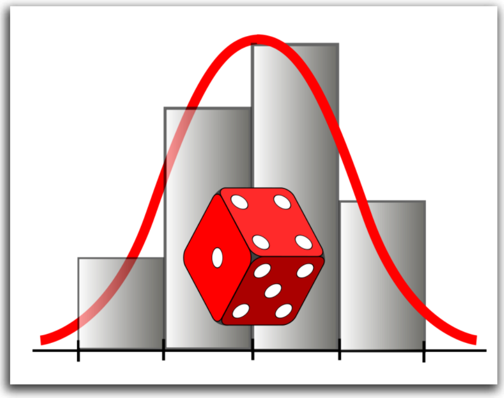
Dr. Ahlam GUIATNI

Université de Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil et Hydraulique

Email : ahlam.guiatni@univ.jijel.dz

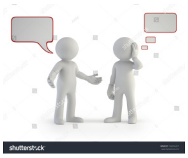


*Dr. Ahlam GUIATNI*

# Table des matières

# Chapitre 2 : Introduction aux probabilités

## 1. Objectifs

**L'objectif du chapitre 1 est de :** 

- Explorer les espaces probabilisés.
- Comprendre les notions d'univers, expériences aléatoires, événement.
- Utiliser des notions élémentaires de probabilité.
- Exprimer la probabilité d'un événement ou issues.
- Calculer des probabilités lors d'expériences aléatoires à une ou deux épreuves.
- Connaître et savoir utiliser les formules des probabilités équiprobables.
- Définir l'indépendance de deux événements.
- Appréhender les probabilités conditionnelles.

## 2. Prérequis

Il est recommander aux apprenants de connaître :

- La théorie des ensembles.
- Les espaces et ses propriétés.

## 3. Introduction

*La théorie des probabilités* constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain.

L'objet de la théorie des probabilités est de fournir un formalisme mathématique précis, propre à décrire des situations dans lesquelles intervient le "hasard", c'est-à-dire des situations dans lesquelles un certain nombre de conditions étant réunies (les causes), plusieurs conséquences sont possibles (les effets) sans que l'on puisse a priori savoir laquelle sera réalisée.

**Probabilités = "mathématisation du hasard".**

La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude. En voici quelques exemples :

| Expérience | Résultat observable |
|---|---|
| Lancer d'un dé | Un entier $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ |
| Questionnaire à 100 question binaires | Suite $\Omega$ de 100 réponses $\omega \in \{oui\,,\,non\}^{100}$ |
| Lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile | Un entier : le temps d'attente du premier succès |

# 4. Espace de probabilités

## 4.1. Expérience aléatoire et événements

**Expérience aléatoire :**

On appelle expérience aléatoire (ou événement) toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsqu' on répète l'expérience dans les même conditions.

***Exemple***

*Le jet d'un dé* à 6 faces et l'observation de la face supérieure est une épreuve.

**Espace des événements: (ou ensemble fondamental)**

C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une épreuve, on le notera généralement par Ω.

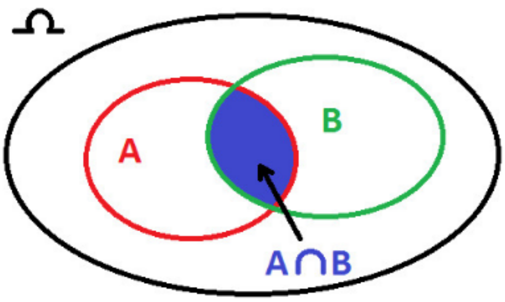
***Exemple***

Le jet d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

**Événements élémentaires et composés :**

Un événement élémentaire est un sous-ensemble de Ω à un seul élément $A=\{6\}$.

Un événement composé est un ensemble d'événements élémentaires $B=\{2,4,6\}$.




*Expérience aléatoire et événements*

## 4.2. Relations et opérations sur les événements

Le tableau suivant représente la correspondance entre deux langage :langage ensembliste et langage probabiliste.

| Notations | Vocabulaire ensembliste | Vocabulaire probabiliste |
|---|---|---|
| Ø | Ensemble vide | Événement impossible |
| Ω | Ensemble plein | Événement certain |
| ω | Élément de Ω | Événement élémentaire |
| A | Sous-ensemble de Ω | Événement |
| $\omega \in A$ | ω appartient à A | L'événement A est réalisé |

| | | |
|---|---|---|
| A = B | Ensembles A et B sont égaux | Les événements A et B sont identique |
| $A \subset B$ | A inclus dans B (A implique B) | A ne peut être réalisé sans que B le soit |
| $A \cup B$ | Réunion de A et B (A ou B) | Un au moins des deux événements est réalisé |
| $A \cap B$ | Intersection de A et B (A et B) | Les deux événement sont réalisés |
| $A \cap B = \emptyset$ | A et B sont disjoints | Les événements A et B sont incompatibles |
| $\overline{A} = \Omega - A \text{ ou } A^c$ | Complémentaire de A dans Ω | L'événement A n'est pas réalisé |

**Remarque**

1. Les opérations logiques (et, ou, négation) sur les événements peuvent bien sur faire intervenir plus de deux événements.

   Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements liés à une épreuve d'ensemble fondamental Ω:

   - Réalisation de l'un au moins des événements $A_i$ ; $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ .
   - Réalisation dans tous les événements $A_i$ ; $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ .
   - Toutes les opérations sur les ensembles restent valables sur les modèles probabilistes (commutativité, associativité, distributivité, ...)
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \overline{\cup_{i=1}^{n} A_i} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ .

   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{\cap_{i=1}^{n} A_i} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ .
3. Deux événements A et B sont dits incompatibles si la réalisation simultanée des événements A et B est impossible $(A \cap B = \emptyset)$ .
4. Système complet d'événements : une partiton de Ω est un système complet d'événement, Autrement dit, des événements $(A_i)_{i \in I}$ forment un système complet si :
   - $A_i \neq \emptyset \,; \forall i = 1, 2, \ldots, n$ .
   - $A_i \cap A_j = \emptyset \,; \forall i \neq j \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,n}\right) \Rightarrow$ incompatibles.
   - $\cup_{1=i}^{n} A_i = \Omega$ .

# 5. Probabilités

## 5.1. Introduction

Une fois défini l'ensemble d'événements auxquels on s'intéresse, on va essayer de traduire par un nombre leurs probabilités de réalisation.

### 5.2. Mesure de probabilités

**Définition**

Soit P(Ω) l'ensemble des sous-parties de Ω.

La probabilité est une application de chaque événement des parties de Ω dans $\mathbb{R}$. Cette application notée P s'appelle « **mesure de probabilité** ».

$$P : P(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$E_i \to P(E_i)$$

Le nombre $P(E_i)$ s'appelle probabilité de réalisation de l'événement $E_i$.

**Complément**

1. $P(\emptyset)=0$
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

**Remarque**

$\vee A \subset \Omega$:

1. $P(A)=\dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$
2. $P(A) \geq 0$
3. $P(\Omega)=1 ; (\sum_{i=1}^{n} p_i=1)$
4. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
5. Si A et B sont incompatibles $(A \cap B=\emptyset)$ alors : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

### 5.3. Sigma-algèbre

Soit Ω l'ensemble fondamental lié à une épreuve, un sous-ensemble S de P(Ω) $(S \subset P(\Omega))$ est dit σ-algébre de partie de Ω si :

- $\Omega \in S$
- $A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

## 6. Probabilité conditionnelle et indépendance

### 6.1. Probabilités conditionnelle

**Définition**

Soit (Ω, S, P) un espace probabilisé, soient A, B deux événements, tels que $P(B)>0$, La probabilités conditionnelle de A sachant B est définie par: $P(A/B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A.B)}{P(B)}$.

***Remarque***

- $P(A/B) \neq P(B/A)$
- $P(A/A) = 1$

***Exemple***

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, les faces 3 et 6 sont blanches, les faces 1, 2 et 4 sont rouges, la face 5 est bleue. On suppose que le dé est truqué et on a les probabilités des événements élémentaires suivantes :

P({1}) = 0.1 ; P({2}) = P({3}) = P({4}) =0.2 ; P({5}) =P({6}) = 0.15.

Quelle est la probabilité d'obtenir une face avec un numéro pair sachant que la face est blanche?

**Solution**

Notons les événements :

N : « numéro pair »

B : « face blanche »

On cherche la probabilité P(N/B).

$$P(N/B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)}$$

On a : $P(B) = P(\{3\} \cup \{6\}) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = 0.2 + 0.15 = 0.35$

$$P(N \cap B) = P(\{6\}) = 0.15$$

D'où $P(N/B) = \frac{0.15}{0.35} = 0.42$

## 6.2. Événements indépendants

***Définition***

Dans un espace probabilisé (Ω, S, P), deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

***Complément***

A et B indépendants $\Leftrightarrow A \textit{ et } \overline{B} \textit{ indépendants}.$
$\Leftrightarrow \overline{A} \textit{ et } B \textit{ indépendants}.$
$\Leftrightarrow \overline{A} \textit{ et } \overline{B} \textit{ indépendants}.$

## 6.3. Formule des probabilités totales

Soit $\{A_i ; i \in I\}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement. Alors :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(B/A_i)$$

Cette formule permet de calculer la probabilité d'un événement B en le décomposant suivant un système complet d'événements.

## 6.4. Formule de Bayes

Soit (Ω, S, P) un espace probabilisé et $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de Ω (système complet de Ω), si B est un autre événement alors :

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)} \quad \forall\ i=\overline{1.n}$$

**Exemple**

Un laboratoire d'analyse chimique reçoit un lot de tube à essai, Ces tubes sont fournis par trois sociétés différentes $A_1, A_2\, et\, A_3$ dans les proportions suivantes: 50%, 30% et 20%.

2% des tubes fabriqués par $A_1$, 3% de ceux fabriqués par $A_2$ et 4% de ceux fabriqués par $A_3$ présentent des défauts. On choisit au hasard un tube à essai dans le lot reçu.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
2. Sachant que le tube choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la société $A_1$ ?

**Solution**

$A_1, A_2, A_3$ événements provient de l'usine $A_1, A_2, A_3$ et D événement tube défectueux alors :

$$P(A_1)=0.5\,;\, P(A_2)=0.3\,;\, P(A_3)=0.2$$
$$P(D/A_1)=0.002\,;\, P(D/A_2)=0.003\,;\, P(D/A_3)=0.004$$

1. La probabilité qu'il soit défectueux est : (probabilité totale)

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(D/A_i)=0.5(0.002)+0.003(0.3)+0.004(0.2)=0.0027$$

2. La probabilité qu'il provienne de la société A sachant que le tube choisi est défectueux est : (la formule de Bayes)

$$P(A_1/D)=\frac{P(A_1).P(D/A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(D/A_i)}=\frac{0.5(0.002)}{0.0027}=0.37$$