

## القوانين الاحتمالية المستمرة الخاصة

### Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

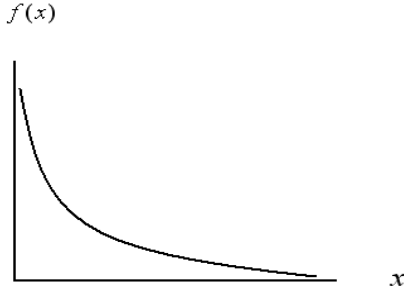
#### التوزيع الأسّي Exponential distribution

##### شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير  $X$  متغير عشوائي له توزيع أسّي، مداه هو  $0 < X < \infty$  فإن دالة كثافة احتماله

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ هي:}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



##### معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي  $(\lambda)$

##### خصائص التوزيع الأسّي

الوسط الحسابي  $\mu$ ، والتباين  $\sigma^2$  لهذا المتغير هما:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

##### دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي  $F(x)$  الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = (1 - e^{-\lambda x})$$

مثال

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسّي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.
- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير  $x$  يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن  $0 < x < \infty$  ،  
فإن المتوسط  $1/\theta = 2$  ، ومن ثم تصبح قيمة  $(\theta)$  هي:  $(\theta = 0.5)$  ، وتكتب دالة كثافة  
الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5 e^{-0.5x}, 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \leq 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

### 3/6/8 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملاً التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

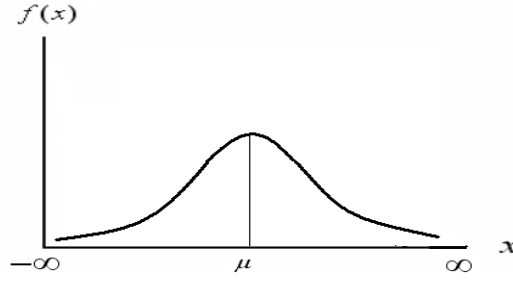
#### شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f

إذا كان المتغير  $X$  متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو  $-\infty < X < \infty$  فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, \pi = 22/7$$

(١٨-٨)

وهذا التوزيع له منحنى متمائل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي  $\mu$  .

## معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

$$\text{الوسط الحسابي : } E(x) = \mu \quad \text{والتباين : } \text{var}(x) = \sigma^2$$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير  $x$  بالرموز :  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$  ويعني ذلك أن المتغير العشوائي  $x$  يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط  $\mu$  ، وتباين  $\sigma^2$  .

## خصائص التوزيع الطبيعي

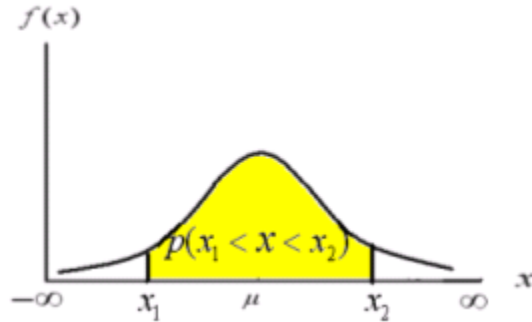
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

$$1- \text{الوسط الحسابي } \mu \quad 2- \text{التباين } \sigma^2$$

$$3- \text{منحنى هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط } \mu$$

## كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو  $p(x_1 < X < x_2)$  ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة ( الاحتمال ) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويل رياضي Transform، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)$$

ويعرف المتغير الجديد  $z$  بالمتغير الطبيعي القياسي Standard Normal Variable ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty, \pi = 22/7 \quad (8-19)$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

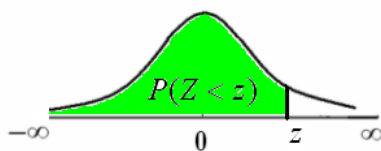
1- متوسطه هو:  $E(z) = 0$       2- تباينه هو:  $\text{var}(z) = 1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير  $z$  بالرموز:  $z \sim N(0,1)$  ويعني ذلك أن المتغير العشوائي  $x$  يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

3- يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي:  $F(z) = P(Z < z)$  ، كما هو مبين بالرسم التالي:

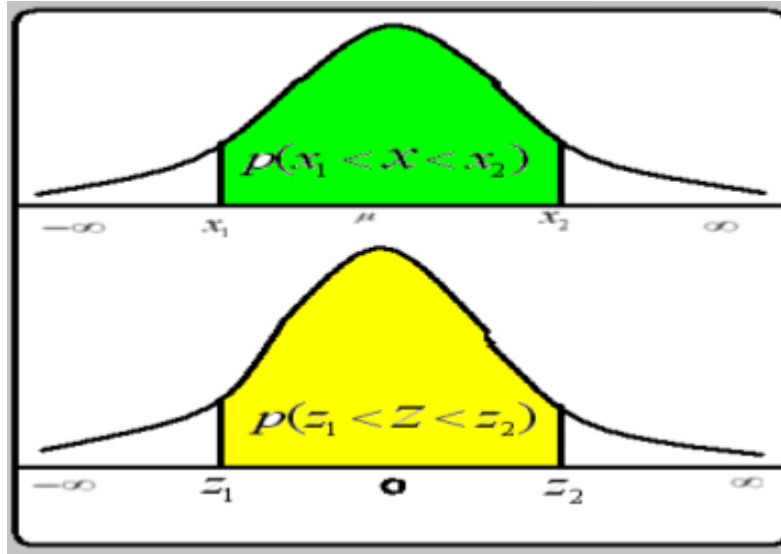


ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال  $p(x_1 < X < x_2)$  باستخدام التحويلة  $z = (x - \mu)/\sigma$  :

1- يتم تحويل القيم الطبيعية  $(x_1, x_2)$  إلى قيم طبيعية قياسية:

$$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma, \quad z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$$

2- ومن ثم يكون الاحتمال:  $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$  :



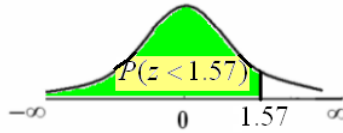
3- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال  $F(z) = P(Z < z)$

4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات  
أوجد الاحتمالات التالية:

أ-  $P(z < 1.57)$  ب-  $P(z < -2.33)$  ج-  $P(z > 1.96)$  د-  $P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

أ- نحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال  $P(z < 1.57) = F(1.57)$  أسفل المنحنى كما يلي

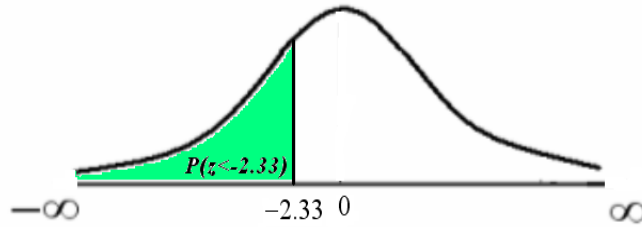


ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

| z    | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07    | .08 | .09 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|-----|-----|
| ...  |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |
| 1.00 |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |
| 1.10 |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |
| 1.20 |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |
| 1.30 |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |
| 1.40 |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |
| 1.50 |     |     |     |     |     |     |     | 0.9418 |     |     |
| ...  |     |     |     |     |     |     |     |        |     |     |

ويكون الاحتمال المطلوب هو:  $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

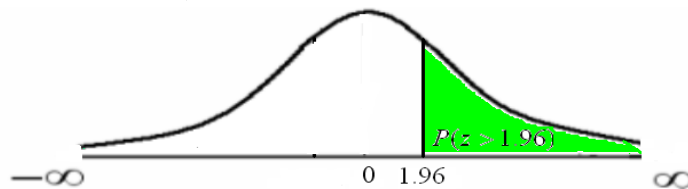
ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال  $P(z < -2.33) = F(-2.33)$  موضحة كالآتي:  
 $P(z < -2.33)$



| z    | .00 | .01 | .02 | .03    | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|------|-----|-----|-----|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| -    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| 2.70 |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| -    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| 2.60 |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| -    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| 2.50 |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| -    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| 2.40 |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| -    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| 2.30 |     |     |     | 0.0099 |     |     |     |     |     |     |
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |
| .    |     |     |     |        |     |     |     |     |     |     |

ومن ثم يكون :  $P(z < -2.33) = 0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال  $P(z > 1.96)$  كالآتي:



وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

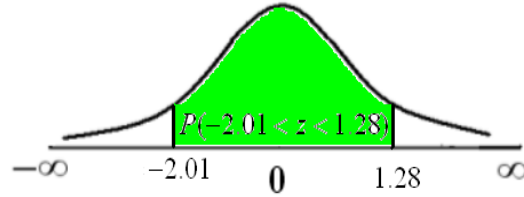
$$P(z > 1.96) = 1 - p(z < 1.96) = 1 - F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 نجد أن :

$$p(z < 1.96) = 0.9750 \text{ ، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:}$$

$$P(z > 1.96) = 1 - 0.9750 = 0.0250$$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال  $P(-2.01 < z < 1.28)$  هي:



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01 < z < 1.28) = F(1.28) - F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$$

مثال

إذا كان الدخل الشهري للأسرة في أحد مناطق الوطن يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألف دج، وتباينه 900. والمطلوب:

- 1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل الشهري.
- 2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.
- 3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ألف دج ؟
- 4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحل

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل الشهري.

بفرض أن  $x$  متغير عشوائي يعبر عن الدخل الشهري بالألف دج، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعامله هي:

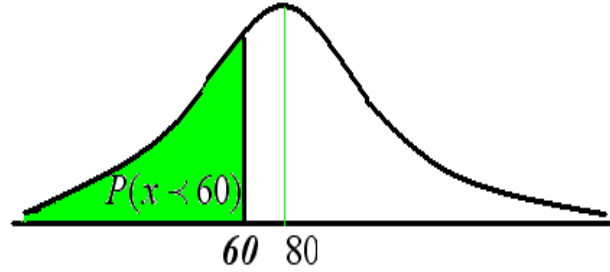
$$\text{أ- المتوسط} \quad E(x) = \mu = 80 \quad \text{ب- التباين هو:} \quad Var(x) = \sigma^2 = 900$$

$$\text{أي أن:} \quad x \sim N(80, 900)$$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \pi = 22/7$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ألف دج هي:  $P(x < 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$\begin{aligned} P(x < 60) &= P\left(z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(z < \frac{60 - 80}{30}\right) = P(z < -0.67) = F(-0.67) \end{aligned}$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x < 60) = P(z < -0.67) = 0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير  $(x)$  الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو  $(x_1)$  ، فإن :

$$P(x < x_1) = P\left(z < \frac{x_1 - 80}{30}\right) = 0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود 0.06. أي أن قيمة  $z = 1.96$  ، ويكون :

$$1.96 = \frac{x_1 - 80}{30}, \quad \text{Then } x_1 = 30(1.96) + 80 = 138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف دج في السنة.