I. HAFSAOUI

Corrigé Travaux dirigés N°2

Exercice 01

1. Bilan d'énergie autour du corps :

$$\rho\, C\, V\, \frac{dT}{dt} = -\,\mathrm{h}\,.\,\mathrm{S}\,(T - T_\infty) + P_g \qquad (1)$$

$$\frac{dT}{(T - T_\infty) - \frac{P_g}{h\,.S}} = -\,\frac{h\,.S}{\rho\, C\, V}\; dt \qquad (2)$$

Posons le changement de variable :

$$\theta = (T - T_\infty) - \frac{P_g}{h.S}$$

L'équation (2) devient :

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\,\frac{h\,.S}{\rho\, C\, V}\; dt$$

La condition initiale :

$$\theta(t=0) = \theta_0 = (T(t=0) - T_\infty) - \frac{P_g}{h.S} = (T_0 - T_\infty) - \frac{P_g}{h.S}$$

La solution est : $\theta(t) = \theta_0\,.\,exp\left(-\,\frac{h\,.S}{\rho\, C\, V}\,.\,t\right)$

$$\boxed{(T(t) - T_\infty) - \frac{P_g}{h.S} = \left[(T_0 - T_\infty) - \frac{P_g}{h.S}\right].\,exp\left(-\,\frac{h\,.S}{\rho\, C\, V}\,.\,t\right)}$$

2. Le temps au bout duquel la température du cylindre atteint **15°C** :

$$(15 - 5) - \frac{P_g}{h.S} = \left[(30 - 5) - \frac{P_g}{h.S}\right].\,exp\left(-\,\frac{h\,.S}{\rho\, C\, V}\,.\,t\right)$$

On trouve **: t=1000s=16.9min**

hafsaoui@univ-jijel.dz

Exercice 02

1. Equation de la chaleur : $\lambda\, \Delta \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} = \rho\, C\, \frac{dT}{dt}$ **(1)**

- Pas de source interne : **P=0**
- Solide infini : **T(x,t)**
- **a=λ/ρC**

2. Alors l'équation de la chaleur **(1)** devient dans ce cas : $\boldsymbol{a}\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$ **(2)**

On pose $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{T} - \boldsymbol{T_S}$ L'équation (2) devient : $\boldsymbol{a}\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ **(3)**

On pose le changement de variable : $\boldsymbol{u} = \frac{x}{2\sqrt{a.t}}$ Alors :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{4at}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{u}{2t}\frac{\partial \theta}{\partial u}$$

L'équation de la chaleur devient : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + 2\,\mathrm{u}\ \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0$ **(4)**

En posant $\boldsymbol{y} = \frac{\partial \theta}{\partial u}$ L'équation (4) devient : $\frac{\partial y}{\partial u} + 2\,\mathrm{u}\,\boldsymbol{y} = 0$

dont la solution est : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_0} \exp\left(-\boldsymbol{u}^2\right)$ d'où :

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y_0} \int_{u_0}^{u} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \qquad \textbf{(5)}$$

- Condition aux limites : En **x=0** **T=Ts** Alors $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u_0}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{u_0} = 0$
- Condition initiale : A **t=0** **T=T0** Alors $\boldsymbol{\theta_0} = \boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_S}$

L'équation (5) devient :

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y_0} \int_{0}^{u} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi = A\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{u} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi = A.\,erf(u)$$

Avec $\boldsymbol{\theta_0} = A\,erf(+\infty) = A$

Finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\theta_0}.\,erf(u) \Rightarrow T = T_S + (T_0 - T_S)\,erf(u)}$$

Tableau des valeurs de la fonction erf

u	erf u	u	erf u	u	erf u
0.0	0.0000	0.8	0.74210	1.60	0.97635
0.05	0.05637	0.85	0.77067	1.65	0.98038
0.1	0.11246	0.9	0.79691	1.70	0.98379
0.15	0.16800	0.95	0.82089	1.75	0.98667
0.2	0.22270	1.0	0.84270	1.80	0.98909
0.25	0.27633	1.05	0.86244	1.85	0.99111
0.3	0.32863	1.10	0.88020	1.90	0.99279
0.35	0.37938	1.15	0.89612	1.95	0.99418
0.4	0.42839	1.20	0.91031	2.00	0.995322
0.45	0.47548	1.25	0.92290	2.1	0.997020
0.5	0.52050	1.30	0.93401	2.2	0.998137
0.55	0.56332	1.35	0.94376	2.3	0.998857
0.6	0.60386	1.40	0.95228	2.4	0.999311
0.65	0.64203	1.45	0.95970	2.5	0.999593
0.7	0.67780	1.50	0.96610	3.0	0.999978
0.75	0.71116	1.55	0.97162	3.6	1.00000

Exercice 03

a) Le nombre de Biot vaut : $Bi = \frac{h\,R}{k} = \frac{10 \quad 0.005}{20} = 0.0025$

Biot étant inférieur à 0.1 la résistance thermique interne est donc négligeable $\Rightarrow T = T(t)$

Bilan :

$$\cancel{E_{IN}} - E_{OUT} + \cancel{E_g} = E_{accumulé}$$

$$-4\pi R^2 h\,(T - T_{air}) = \rho C_p \left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left[-\frac{\rho C_p R}{3h}\right]\frac{\partial T}{(T - T_{air})} = \partial t \quad \Rightarrow \quad \left[-\frac{\rho C_p R}{3h}\right]\int_{T_{t=O}}^{T_t}\frac{\partial T}{(T - T_{air})} = \int_0^t \partial t$$

$$t = \left[-\frac{\rho C_p R}{3h}\right] Ln\frac{T_t - T_{air}}{T_{t=0} - T_{air}}$$

application numérique :

$$t = \left[-\frac{3000 \quad 1000 \quad 0.005}{3 \quad 10}\right] Ln\frac{335 - 20}{400 - 20} = \quad 500 \quad 0.1876 \quad = 93.80\ s$$

hafsaoui@univ-jijel.dz