Université Mohamed Seddik Ben Yahia
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques
Master 2 : Analyse Fonctionnelle

Analyse Asymptotique
2023

TD N^o 1

Exercice 01 :

Soit D un domaine de $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$; $x_0 \in \overline{D}$ et deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ definies sur D à valeurs reele ou complexe.
Démontrer les opérations suivantes

1. Si $\varphi = O(\psi)$ et $\alpha > 0$ alors $|\varphi|^\alpha = O(|\psi|^\alpha)$.
2. Si $\varphi_i = O(\psi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ et a_i des constantes alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i = O(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i||\psi_i|)$.
3. Si $\varphi_i = O(\psi_i)$, $\psi_i \leq \psi$, $i = 1, 2, \dots, n$ et a_i des constantes alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i = O(\psi)$.
4. Si $\varphi_i = O(\psi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i = O(\prod\limits_{i=1}^{n} \psi_i)$.
5. Soit $D =]a, b[\subset \mathbb{R}$, si $\varphi = O(\psi)$; $x \to b$, φ et ψ sont intégrable dans D, alors $\int\limits_x^b \varphi(x)dx = O(\int\limits_x^b |\psi(x)|dx)$, $x \to b$.
6. Soit $\xi \in]\alpha, \beta[$ un paramètre et soient $\varphi(x, \xi)$ et $\psi(x, \xi)$ deux fonctions dépendent du paramètre ξ, et $\varphi(x, t) = O(\psi(x, t))$ uniformément quand $x \to x_0$, alors $\int\limits_\alpha^\beta \varphi(x, \xi)d\xi = O(\int\limits_\alpha^\beta |\psi(x, \xi)|d\xi)$, $x \to b$.

Exercice 02 :

Soit $\gamma > 0$, le but de l'exercice est de prouver que $e^{\gamma n} = o(n!)$. $(n \in \mathbb{N}^*)$
Pour cela, on pose, pour $n \geq 1, u_n = e^{\gamma n}$ et $v_n = n!$.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq c\,(\frac{1}{2})^{n-n_0}v_n$.
3. Conclure $e^{\gamma n} = o(n!)$.