Université Mohamed Seddik Ben Yahia
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques
Master 2 : Analyse Fonctionnelle

Analyse Asymptotique
2023

TD N^o 2

Exercice 01 :

On étudie la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Etablire que pour tout $t > -1,\ \ln(1+t) \leq t$ et en deduire
$$ln(1+t) \geq \frac{t}{t+1}$$
2. Observer que
$$\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$$
et en deduire un équivalent simple de S_n.
3. Montrer que la suite $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. Sa limite est appelée constante d'Euler et est usuellement notée γ.

Exercice 02 :

Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 03 :

Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée

- ⋆ $u_n = \ln(n+1)$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.
- ⋆ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ à la précision $\frac{1}{n^2}$
- ⋆ $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ à la précision $\frac{1}{n}$
- ⋆ $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$

Exercice 04 :

Soit $n \geq 1$

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2., en déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \circ(\frac{1}{n}^2)$.