Université Mohamed Seddik Ben Yahia
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques
Master 2 : Analyse Fonctionnelle

Analyse Asymptotique
2023

TD N^o 2 (2)

Exercice 05 :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}.$$

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que $u_n \leq n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Donner un équivalent simple de (u_n).
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 06 :

I) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Déterminer un développement asymptotique à la précision $n^{-r}, r \in \mathbb{N}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t.$$

II) Même question pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \mathrm{ch}(n)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 07 :

I) Calculer les deux premier termes non nuls du développement asymptotique de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x},$$

suivant la suite $\delta_n(x) = x^n$ au voisinage de $x = 0$.

II) Même question pour la fonction g définie par

$$g(x) = \int_x^{+\infty} t^{-a} e^{-t}\mathrm{d}t;\ a > 0,\ x > 0.$$

suivant la suite $\delta_n(x) = x^{-n}$ au voisinage de $x = +\infty$.