

Laboratoire de Physique Théorique

# INTEGRALES DE CHEMINS

---

Salah Haouat

Master 2 Physique Théorique

---

2021/2022

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Construction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Rappel essentiel</b>	<b>5</b>
1.1	Notation bra-ket . . . . .	5
1.2	Opérateur d'évolution . . . . .	6
1.2.1	Représentation de Schrödinger . . . . .	6
1.2.2	Propriétés . . . . .	6
1.3	Formules utiles . . . . .	7
1.3.1	Intégrales gaussiennes . . . . .	7
1.3.2	Représentation intégrale de la fonction $\delta$ . . . . .	7
1.3.3	Développement de Laplace du déterminant . . . . .	7
1.3.4	Dérivée fonctionnelle . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Le propagateur</b>	<b>9</b>
2.1	Définition . . . . .	9
2.2	Equation de Chapman-Kolmogorov . . . . .	9
2.3	Propagateur et opérateur d'évolution . . . . .	9
2.4	Décomposition spectrale du propagateur . . . . .	10
2.5	Représentation de Heisenberg . . . . .	11
2.6	Fonction de Green . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Les intégrales de chemins</b>	<b>15</b>
3.1	Construction du propagateur . . . . .	15
3.2	Interprétation . . . . .	17
3.3	Dérivation de l'équation de Schrödinger . . . . .	19
3.4	La particule libre . . . . .	21
<b>II</b>	<b>Premières applications</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Intégrales de chemins pour les actions quadratiques</b>	<b>25</b>
4.1	Actions quadratiques . . . . .	25
4.2	Particule libre . . . . .	27
4.3	Le potentiel linéaire . . . . .	28
4.4	L'oscillateur harmonique . . . . .	30
<b>III</b>	<b>Théorie des perturbations</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Calcul fonctionnel</b>	<b>35</b>
5.1	Eléments de matrices . . . . .	35

5.2	Méthode de la source . . . . .	37
<b>6</b>	<b>L'amplitude de transition vide-vide</b>	<b>39</b>
6.1	Amplitude vide-vide . . . . .	39
6.1.1	Etat fondamental (vide) . . . . .	39
6.1.2	Amplitude de transition vide-vide . . . . .	39
6.1.3	Fonctionnelle génératrice . . . . .	40
6.2	Intégrale gaussienne et fonctions de Green . . . . .	41
6.2.1	Cas d'une intégrale discrète . . . . .	41
6.2.2	Cas d'une intégrale continue : fonction de Green . . . . .	42
6.3	Théorème de Wick . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Théorie des perturbations</b>	<b>45</b>
7.1	Développement perturbatif . . . . .	45
7.2	Amplitude de transition d'ordre 1 . . . . .	46
7.3	Formule de récurrence . . . . .	47
7.4	Amplitude de transition d'ordre supérieur à 1 . . . . .	47
7.5	Diagrammes de Feynman . . . . .	48
7.6	Equation de Bethe-Salpeter . . . . .	48
7.7	Fonction de Green causale . . . . .	48
7.8	Equation de Lippmann-Schwinger . . . . .	49
<b>IV</b>	<b>Intégrales de chemins en théorie des champs</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Le champ scalaire libre</b>	<b>53</b>
8.1	Systèmes à plusieurs degrés de liberté . . . . .	53
8.2	Le champ scalaire réel . . . . .	53
8.3	Calcul de la fonctionnelle génératrice . . . . .	54
8.4	Le propagateur de Feynman . . . . .	56
8.5	Fonctions de Green . . . . .	57
8.5.1	Fonction de Green à 2 points . . . . .	57
8.5.2	Fonction de Green à 4 points . . . . .	58
8.5.3	Fonction de Green à $(2n)$ points . . . . .	59

Première partie

# Construction



## Rappel essentiel

## 1.1 Notation bra-ket

Suivant le premier postulat de la mécanique quantique, l'état d'un système quantique est décrit par une fonction d'état  $\psi_a(x)$ . Dans le formalisme bra-ket de Dirac, on peut décrire l'état du système par un ket  $|\psi_a\rangle \equiv |a\rangle$  avec

$$\psi_a(x) = \langle x | \psi_a \rangle = \langle x | a \rangle. \quad (1.1)$$

Considérons les kets  $|x\rangle$  vecteurs propre à l'opérateur  $\hat{x}$

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \quad (1.2)$$

avec la relation d'orthogonalité

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') \quad (1.3)$$

et la relation de fermeture

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1. \quad (1.4)$$

Nous avons alors

$$|\psi_a\rangle = |a\rangle = \left( \int dx |x\rangle \langle x| \right) |\psi_a\rangle = \int dx \langle x | \psi_a \rangle |x\rangle = \int dx \psi_a(x) |x\rangle$$

Introduisons maintenant les kets  $|p\rangle$  vecteurs propre à l'opérateur  $\hat{p}$

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad (1.5)$$

Ces kets vérifient la relation de fermeture

$$\int dp |p\rangle \langle p| = 1 \quad (1.6)$$

et la relation d'orthogonalité

$$\langle p | p' \rangle = \delta(p - p'). \quad (1.7)$$

Nous avons alors

$$\langle p | p' \rangle = \int dx \langle p | x \rangle \langle x | p' \rangle = \delta(p - p').$$

Comme

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{\frac{i}{\hbar}x(p-p')}$$

Nous obtenons

$$\langle x | p \rangle \langle p' | x \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}x(p-p')},$$

## 1 Rappel essentiel

Ce qui implique que  $\langle x | p \rangle$  est une onde plane.

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) \quad (1.8)$$

et

$$\langle p | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}px\right). \quad (1.9)$$

## 1.2 Opérateur d'évolution

### 1.2.1 Representation de Schrödinger

La mécanique quantique formulée par Schrödinger consiste à résoudre l'équation d'onde (dite éq. de Schrödinger) pour un état  $|\psi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (1.10)$$

où  $H$  est l'opérateur Hamiltonien du système. Nous supposons que  $H$  est indépendant du temps.

Il est clair que

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle + \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle\right) \Delta t + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right) \quad (1.11)$$

ou bien

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle \Delta t + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right) \quad (1.12)$$

ce qui nous permet d'écrire, pour  $\Delta t \ll 1$ ,

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H \Delta t\right) |\psi(t)\rangle \quad (1.13)$$

Il vient immédiatement que

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.14)$$

avec

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right) \quad (1.15)$$

### 1.2.2 Propriétés

L'opérateur d'évolution  $U(t, t_0)$  vérifie, parmi autres, les propriétés suivantes :

1- Pour un instant intermédiaire  $t_1$ , on a

$$U(t, t_1) U(t_1, t_0) = U(t, t_0) \quad (1.16)$$

2- La décomposition spectrale : Considérons la base des kets  $|\varphi_k\rangle$  propres à  $H$

$$H |\varphi_k\rangle = E_k |\varphi_k\rangle \quad (1.17)$$

En insérant la relation de fermeture

$$\sum_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| = 1 \quad (1.18)$$

dans l'équation (1.15), nous obtenons la décomposition spectrale de l'opérateur d'évolution.

$$U(t, t_0) = \sum_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k (t-t_0)} |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| \quad (1.19)$$

## 1.3 Formules utiles

### 1.3.1 Intégrales gaussiennes

Nous avons les intégrales gaussiennes suivantes

$$\int d\xi \exp[-a\xi^2] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1.20)$$

$$\int d\xi \exp[-a\xi^2 + b\xi] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{b^2}{4a}\right] \quad (1.21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\alpha(x-a)^2 - \beta(x-b)^2\right] dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}} \exp\left[-\frac{\beta\alpha}{\alpha+\beta}(a-b)^2\right]. \quad (1.22)$$

Intégrale de Fresnel

$$\int dp \exp[ip^2] = \sqrt{\frac{\pi i}{a}}. \quad (1.23)$$

Nous pouvons aussi montrer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int d\xi \exp(-a\xi^2) f(\xi+x) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{1}{4a} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] f(x) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} f(x) + \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{4a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{32a^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.3.2 Representation intégrale de la fonction $\delta$

Nous pouvons toujours représenter la fonction  $\delta$  par l'intégrale suivante

$$\delta(x_1 - x_2) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(x_1 - x_2)\right]. \quad (1.25)$$

Nous avons aussi

$$\int \frac{dx}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} x(p_1 - p_2)\right] = \delta(p_1 - p_2). \quad (1.26)$$

### 1.3.3 Développement de Laplace du déterminant

Le développement de Laplace du déterminant d'une matrice  $\mathbf{M} = [a_{ij}]$  selon une ligne est la somme du produit des éléments de cette ligne par leur cofacteur respectif.

Le cofacteur d'un élément  $a_{ij}$  est :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$



## 1 Rappel essentiel

où  $M_{ij}$  est le déterminant de la sous matrice obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{M}$ .

Exemple :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 71 \\ &= 7 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 71 \end{aligned}$$

### 1.3.4 Dérivée fonctionnelle

La dérivée fonctionnelle est définie par

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon} \quad (1.27)$$

de sorte que

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) + \epsilon \delta(x-y) - f(x)}{\epsilon} = \delta(x-y) \quad (1.28)$$

Exemple : Considérons

$$I = \exp \left[ i \int_0^T g(x) f(x) dx \right]. \quad (1.29)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\exp \left[ i \int g(x) [f(x) + \epsilon \delta(x-y)] dx \right] - \exp \left[ i \int g(x) f(x) dx \right]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \exp \left[ i \int g(x) f(x) dx \right] \exp \left[ i \epsilon \int g(x) \delta(x-y) dx \right] - \exp \left[ i \int_0^T g(x) f(x) dx \right] \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\exp \left[ i \epsilon g(y) \right] - 1}{\epsilon} \exp \left[ i \int g(x) f(x) dx \right] \\ \frac{\delta I}{\delta f(y)} &= i g(y) \exp \left[ i \int g(x) f(x) dx \right] \end{aligned}$$

nous obtenons alors le résultat important suivant

$$\frac{\delta}{\delta f(y)} \exp \left[ i \int_0^T g(x) f(x) dx \right] = i g(y) \exp \left[ i \int g(x) f(x) dx \right] \quad (1.30)$$

# Le propagateur

## 2.1 Definition

Par definition le propagateur est l'amplitude de transition de l'état  $\psi(x, t_0)$  à l'état  $\psi(y, t)$  qui vérifie

$$\psi(y, t) = \int dx \mathcal{K}(y, t; x, t_0) \psi(x, t_0). \quad (2.1)$$

## 2.2 Equation de Chapman-Kolmogorov

Considérons les états  $\psi(x_1, t_1)$ ,  $\psi(x_2, t_2)$  et  $\psi(x_3, t_3)$  avec  $t_1 < t_2 < t_3$ .  
Suivant la définition (2.1), nous avons

$$\psi(x_2, t_2) = \int dx_1 \mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1), \quad (2.2)$$

$$\psi(x_3, t_3) = \int dx_2 \mathcal{K}(x_3, t_3; x_2, t_2) \psi(x_2, t_2) \quad (2.3)$$

et

$$\psi(x_3, t_3) = \int dx_1 \mathcal{K}(x_3, t_3; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1). \quad (2.4)$$

En insérant (2.3) dans (2.2) nous obtenons

$$\psi(x_3, t_3) = \int dx_1 \int dx_2 \mathcal{K}(x_3, t_3; x_2, t_2) \mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1). \quad (2.5)$$

L'équation obtenue a la même forme que l'équation (2.4) avec

$$\mathcal{K}(x_3, t_3; x_1, t_1) = \int dx_2 \mathcal{K}(x_3, t_3; x_2, t_2) \mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1). \quad (2.6)$$

Cette dernière équation est dite l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Comme généralisation nous pouvons écrire

$$\mathcal{K}(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \mathcal{K}(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.7)$$

## 2.3 Propagateur et opérateur d'évolution

Partons de l'équation

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.8)$$

## 2 Le propagateur

et multiplions à gauche par le bra  $\langle y|$  pour avoir

$$\langle y | \psi(t) \rangle = \langle y | U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle. \quad (2.9)$$

En insérant une relation de fermeture  $\int dx |x\rangle \langle x| = 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle y | \psi(t) \rangle &= \int dx \langle y | U(t, t_0) | x \rangle \langle x | \psi(t_0) \rangle \\ &= \int dx \langle y | U(t, t_0) | x \rangle \psi(x, t_0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Par comparaison de l'équation (2.10) et l'équation (2.1) nous en tirons l'expression du propagateur en fonction de l'opérateur d'évolution

$$\mathcal{K}(y, t; x, t_0) = \langle y | U(t, t_0) | x \rangle. \quad (2.11)$$

## 2.4 Décomposition spectrale du propagateur

Considérons d'abord les vecteurs  $|\varphi_n\rangle$  états propres à  $H$ ,

$$H |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle \quad (2.12)$$

Ces vecteurs vérifient les relations suivantes

$$\sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = 1 \quad (2.13)$$

et

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{mn} \quad (2.14)$$

Décomposons maintenant l'état à l'instant  $t_a$  sur la base des  $|\varphi_n\rangle$

$$|\psi(t_a)\rangle = \sum_n C_n(t_a) |\varphi_n\rangle \quad (2.15)$$

où les  $C_n(t_a)$  sont des fonctions du temps

$$C_n(t_a) = \langle \varphi_n | \psi(t_a) \rangle \quad (2.16)$$

Comme

$$|\psi(t_b)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_b - t_a)\right) |\psi(t_a)\rangle, \quad (2.17)$$

il vient que

$$|\psi(t_b)\rangle = \sum_n C_n(t_a) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_b - t_a)\right) |\varphi_n\rangle. \quad (2.18)$$

$$= \sum_n \langle \varphi_n | \psi(t_a) \rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right) |\varphi_n\rangle \quad (2.19)$$

En multipliant par le bra  $\langle x_b |$  et en insérant la relation de fermeture  $\int dx_a |x_a\rangle \langle x_a|$ , nous obtenons

$$\langle x_b | \psi(t_b) \rangle = \sum_n \int dx_a \langle \varphi_n | x_a \rangle \langle x_a | \psi(t_a) \rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right) \langle x_b | \varphi_n \rangle \quad (2.20)$$

avec

$$\langle x_b | \psi(t_b) \rangle = \psi(x_b, t_b) \quad (2.21)$$

$$\langle x_a | \psi(t_a) \rangle = \psi(x_a, t_a) \quad (2.22)$$

$$\langle x_b | \varphi_n \rangle = \varphi_n(x_b) \quad (2.23)$$

$$\langle \varphi_n | x_a \rangle = \varphi_n^*(x_a) \quad (2.24)$$

La fonction d'onde  $\psi(x_b, t_b)$  se déduit ainsi de la fonction d'onde  $\psi(x_a, t_a)$  à l'instant  $t_a$

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_a \left\{ \sum_n \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right] \varphi_n(x_b) \varphi_n^*(x_a) \right\} \psi(x_a, t_a) \quad (2.25)$$

Nous obtenons alors la décomposition spectrale du propagateur

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_n \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right] \varphi_n(x_b) \varphi_n^*(x_a) \quad (2.26)$$

Il est à noter que  $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$  ne dépend que de  $x_a, x_b$  et  $T = t_b - t_a$ .

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) \equiv K(x_b, x_a; T)$$

**Exercice :** Démontrer la décomposition spectrale du propagateur directement à partir de la propriété (1.19)

## 2.5 Représentation de Heisenberg

Rappelons d'abord la définition de base des opérateurs et des vecteurs dans l'image de Heisenberg. Soit  $|\psi\rangle$  l'état du système à un instant donné  $t_0$  qui correspond à une observable  $\hat{O}$  (nous supposons que  $t_0 = 0$ ). Dans l'image Schrödinger, à un instant  $t > 0$ , l'état du système est

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t, 0) |\psi(0)\rangle_S = U(t, 0) |\psi\rangle \quad (2.27)$$

L'opérateur  $O$  est par contre indépendant du temps

$$\hat{O}_S(t) = \hat{O}. \quad (2.28)$$

Dans l'image de Heisenberg, c'est l'opérateur qui évolue dans le temps  $\hat{O}_H(t) \neq \hat{O}_H(0)$ . Le vecteur d'état ne dépend pas du temps

$$|\psi(t)\rangle_H = |\psi\rangle_H = |\psi\rangle = |\psi(0)\rangle_S. \quad (2.29)$$

Il vient alors

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t, 0) |\psi(0)\rangle_S = U(t, 0) |\psi\rangle_H \quad (2.30)$$

## 2 Le propagateur

ce qui nous permet d'établir le lien entre le vecteur d'état de Schrödinger et celui de Heisenberg

$$|\psi\rangle_H = U^+(t, 0) |\psi(t)\rangle_S. \quad (2.31)$$

Si  $|\psi(t)\rangle_S$  à l'instant  $t$  est la fonction propre de l'opérateur  $O_S$  correspondante à la valeur propre  $\lambda$ , le vecteur  $|\psi\rangle_H$  est la fonction propre de l'opérateur  $\hat{O}_H(t)$  à l'instant  $t$  avec la même valeur propre  $\lambda$ .

Nous écrivons alors

$$O_S |\psi(t)\rangle_S = \lambda |\psi(t)\rangle_S = O_S U(t, 0) |\psi\rangle_H \quad (2.32)$$

ce qui implique que

$$O_S U(t, 0) |\psi\rangle_H = \lambda U(t, 0) |\psi\rangle_H. \quad (2.33)$$

En multipliant la dernière équation par  $U^+(t, 0)$  nous obtenons l'équation

$$U^+(t, 0) O_S U(t, 0) |\psi\rangle_H = \lambda |\psi\rangle_H \quad (2.34)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\hat{O}_H(t) |\psi\rangle_H = \lambda |\psi\rangle_H \quad (2.35)$$

avec

$$\hat{O}_H(t) = U^+(t, 0) \hat{O}_S U(t, 0) \quad (2.36)$$

La dernière équation exprime l'évolution des observables dans l'image de Heisenberg et elle s'écrit le plus souvent sans aucun indice

$$\hat{O}(t) = U^+(t, 0) \hat{O} U(t, 0). \quad (2.37)$$

Considérons maintenant l'opérateur de position  $\hat{x}$  dans l'image de Schrödinger. Nous avons l'équation aux valeurs propres

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle. \quad (2.38)$$

Dans l'image de Heisenberg l'opérateur de position à l'instant  $t$  est

$$\hat{x}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \hat{x} e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (2.39)$$

Multipliant l'équation (2.38) par  $e^{\frac{i}{\hbar} H t}$  et insérant l'identité  $e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t} = 1$ , nous obtenons l'équation

$$e^{\frac{i}{\hbar} H t} \hat{x} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t} |x\rangle = x e^{\frac{i}{\hbar} H t} |x\rangle \quad (2.40)$$

qui est de la forme

$$\hat{x}(t) |x, t\rangle = x |x, t\rangle \quad (2.41)$$

avec

$$|x, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H t} |x\rangle. \quad (2.42)$$

Les kets  $|x, t\rangle$  sont donc des kets propres de l'opérateur  $\hat{x}(t)$ . Il est évident que

$$\langle x_2, t | x_1, t \rangle = \delta(x_2 - x_1). \quad (2.43)$$

De plus nous avons

$$\begin{aligned}\langle x_2, t | \left[ \int dx |x, t\rangle \langle x, t| \right] |x_1, t\rangle &= \int dx \langle x_2, t | x, t\rangle \langle x, t | x_1, t\rangle \\ &= \int dx \delta(x_2 - x) \delta(x - x_1) \\ &= \delta(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

ce qui implique la relation de fermeture

$$\int dx |x, t\rangle \langle x, t| = 1. \quad (2.44)$$

Prenons maintenant le produit scalaire  $\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$ . Nous avons

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \langle x_b | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_b} e^{\frac{i}{\hbar} H t_a} | x_a \rangle = \langle x_b | \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} H (t_b - t_a) \right] | x_a \rangle. \quad (2.45)$$

Nous en déduisons donc que  $\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$  est le propagateur dans la représentation de Heisenberg

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle. \quad (2.46)$$

**Exercice :** Dériver l'équation de Chapman-Kolmogorov à partir de la représentation de Heisenberg.

## 2.6 Fonction de Green

Nous définissons la fonction de Green causale par

$$G(x_b, x_a; T) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(T) K(x_b, x_a; T). \quad (2.47)$$

La fonction  $\Theta(T)$  assure la causalité (aucun effet ne survient avant sa cause).

Dans ce cas,  $G(x_b, x_a; T)$  est une solution de l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G(x, x_0; t - t_0) - \hat{H} G(x, x_0; t - t_0) = \delta(t - t_0) \delta(x - x_0). \quad (2.48)$$

En introduisant la transformée de Fourier

$$G(x_b, x_a; E) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_b, x_a; T) e^{\frac{i}{\hbar} E T} dT, \quad (2.49)$$

nous pouvons voir que

$$(E + i\epsilon - \hat{H}) G(x, x_0; E) = \delta(x - x_0) \quad (2.50)$$

De plus  $G(x, x_0; E)$  est l'élément de matrice d'un opérateur  $\hat{G}(E)$

$$G(x, x_0; E) = \langle x | \hat{G}(E) | x_0 \rangle \quad (2.51)$$

avec

$$\hat{G}(E) = \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon}. \quad (2.52)$$

La prescription que la singularité dans ces opérateurs doit être régularisée en ajoutant  $+i\epsilon$ , où  $\epsilon$

## 2 Le propagateur

est une quantité infinitésimale positive, dans le dénominateur découle de la définition (2.49) dans laquelle l'énergie  $E$  doit avoir une petite partie imaginaire positive pour que l'intégrale sur  $T$  converge.

La fonction de Green causale a la décomposition spectrale suivante

$$G(x_b, x_a; E) = \sum_n \frac{\psi_n(x_b) \psi_n^*(x_a)}{E - E_n + i\epsilon} \quad (2.53)$$

**Exercice :** Dériver la décomposition (2.53).

# Les intégrales de chemins

## 3.1 Construction du propagateur

Considérons une particule qui peut se mouvoir dans un espace unidimensionnel (l'axe  $ox$ , par exemple) et qui a comme hamiltonien

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(x) = \hat{T} + \hat{V}. \quad (3.1)$$

où  $\hat{T}$  et  $\hat{V}$  sont respectivement l'opérateur énergie cinétique et l'opérateur énergie potentielle. Comme nous l'avons déjà vu le propagateur (i.e. l'amplitude de transition du point  $(x_a, t_a)$  au point  $(x_b, t_b)$ ) est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \langle x_b | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_b - t_a)\right) | x_a \rangle \\ &= \langle x_b | \left[ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{t_b - t_a}{N}\right) \right]^N | x_a \rangle \\ &= \langle x_b | \left[ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\hat{T}\varepsilon + \hat{V}\varepsilon)\right) \right]^N | x_a \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec  $\varepsilon = \frac{t_b - t_a}{N}$ . Pour construire  $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ , en éliminant les opérateurs  $\hat{T}$  et  $\hat{V}$ , nous insérons d'abord  $(N-1)$  relations de fermeture

$$1 = \int dx_n |x_n\rangle \langle x_n| \quad (3.3)$$

pour obtenir

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \langle x_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\hat{T}\varepsilon + \hat{V}\varepsilon)\right) | x_{n-1} \rangle \quad (3.4)$$

avec  $x_b = x_N$  et  $x_a = x_0$ .

Notons que comme  $\hat{T}$  et  $\hat{V}$  ne commutent pas, il est évident que dans le cas général

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\hat{T}\varepsilon + \hat{V}\varepsilon)\right) \neq \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{T}\varepsilon\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V}\varepsilon\right) \quad (3.5)$$

mais pour  $\varepsilon \ll 1$  nous pouvons utiliser la formule de Trotter

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} (\hat{T}\varepsilon + \hat{V}\varepsilon)\right) \approx \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{T}\varepsilon\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V}\varepsilon\right) \quad (3.6)$$

pour trouver



### 3 Les intégrales de chemins

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \langle x_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{T} \varepsilon\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V} \varepsilon\right) | x_{n-1} \rangle. \quad (3.7)$$

Pour une deuxieme fois nous insérons  $N$  relations de fermeture mais dans la base des impulsions

$$1 = \int dp_n |p_n\rangle \langle p_n| \quad (3.8)$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \langle x_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{T} \varepsilon\right) \int dp_n |p_n\rangle \langle p_n| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V} \varepsilon\right) | x_{n-1} \rangle \\ &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \int dp_n \langle x_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{T} \varepsilon\right) | p_n \rangle \\ &\quad \times \langle p_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V} \varepsilon\right) | x_{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

et tenons compte du fait que

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{T} \varepsilon\right) | p_n \rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon\right) | p_n \rangle \quad (3.10)$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{V} \varepsilon\right) | x_{n-1} \rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} V(x_{n-1}) \varepsilon\right) | x_{n-1} \rangle. \quad (3.11)$$

Il n'est pas alors difficile d'arriver à

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_n x_n\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon - \frac{i}{\hbar} V(x_{n-1}) \varepsilon\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_n x_{n-1}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ou bien à

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \int \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\ &\quad \times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[ p_n \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right) - \left( \frac{p_n^2}{2m} + V(x_{n-1}) \right) \right] \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ici nous pouvons factoriser le partie dependant en  $p_n$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \int \prod_{n=1}^N \left\{ \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon + \frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})\right] \right\} \\ &\quad \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N V(x_{n-1}) \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour effectuer les intégrations sur les impulsions nous utilisons l'identité qui nous donne

$$\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon + \frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1}) \right] = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} m \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2\varepsilon} \right]$$

et l'intégrale (3.14) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \times \\ &\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left( m \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2\varepsilon} - V(x_{n-1}) \varepsilon \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En posant

$$A_n^\varepsilon = m \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2\varepsilon} - V(x_{n-1}) \varepsilon \quad (3.16)$$

nous obtenons finalement l'expression du propagateur

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N A_n^\varepsilon \right] \quad (3.17)$$

A la limite  $\varepsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$  la somme devient une intégrale

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N A_n^\varepsilon &= \sum_{n=1}^N \varepsilon \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_{n-1}) \right] \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\sum_{n=1}^N A_n^\varepsilon = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (3.19)$$

et cette formulation est ainsi basée sur le Lagrangien classique  $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x)$ .

Nous écrivons alors

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int Dx \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \right) \right] \quad (3.20)$$

avec

$$Dx = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \prod_{n=1}^{N-1} \left( dx_n \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right). \quad (3.21)$$

## 3.2 Interprétation

Considérons une source  $S$  de particules approximativement monoénergétiques placée en position  $A$ . Le flux de particules est mesuré sur un écran  $C$  face à la source. Imaginez maintenant un troisième écran placé en position  $B$ , entre  $A$  et  $C$ , avec deux fentes qui peuvent être ouvertes ou fermées.

Lorsque la première fente est ouverte et la seconde fermée, nous mesurons un flux  $F_1$ , lorsque la première fente est fermée et la seconde ouverte, nous mesurons un flux  $F_2$  et lorsque les deux

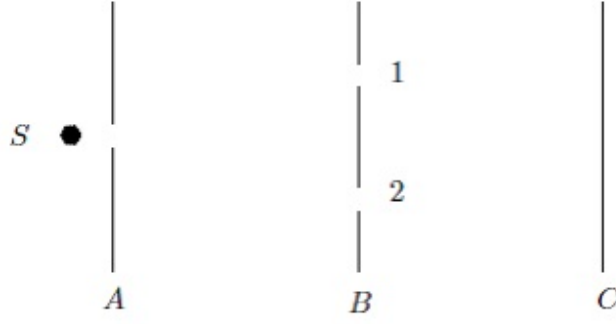


Figure 3.1

fentes sont ouvertes, nous mesurons un flux  $F$ , avec

$$F = F_1 + F_2 + F_{int} \quad (3.22)$$

où  $F_{int}$  correspond à l'interférence entre deux ondes passant respectivement par 1 et 2

$$F_i = |\phi_i|^2 \quad (3.23)$$

et

$$F = |\phi_1 + \phi_2|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + 2\text{Re} |\phi_1^* \phi_2|. \quad (3.24)$$

Selon l'interprétation de Copenhague,  $F$  doit être interprété comme une densité de probabilité. Ce qui s'additionne est, alors, l'amplitude de probabilité et non la probabilité elle-même. La différence entre la composition classique et la composition quantique des probabilités est donnée par l'interférence entre des trajectoires classiquement distinctes.

Imaginons maintenant plusieurs écrans placés en positions  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{N-1}$  paramétrisés par  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ . Nous supposons que chaque écran contient plusieurs trous et nous notons  $x_k(t_i)$  la position d'un trou ( $k$ ) dans l'écran  $B_i$ .

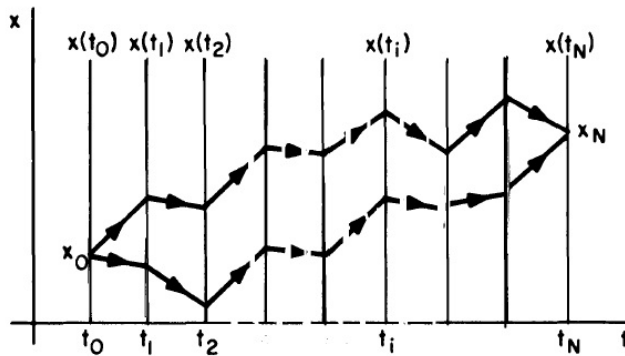


Figure 3.2

Dans ce cas nous avons pour l'amplitude de transition de  $x_0$  à  $x_N$

$$A = \sum_{x_k(t_1), x_k(t_2), \dots, x_k(t_{N-1})} \phi(\{x_k(t_i)\}). \quad (3.25)$$

A la limite  $N \rightarrow \infty$ , nous pouvons écrire

$$\mathcal{A} = \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \dots \int dx_{N-1} \phi(\{x_n\}). \quad (3.26)$$

Dans la formulation de Feynman  $\phi(\{x_n\}) \propto \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(\{x_n\})\right\}$  et ainsi

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(x_N, t_N; x_0, t_0) = \sum_{\text{trajectoires}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\text{trajectoires}]\right\}. \quad (3.27)$$

### 3.3 Dérivation de l'équation de Schrödinger

Le but de ce paragraphe est d'obtenir l'équation de Schrödinger à partir de la formulation de Feynman. C'est ainsi que nous devons considérer une transition infinitésimale entre les deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . Suivant la construction précédente le propagateur infinitésimal est

$$\mathcal{K}(x, t + \Delta t; y, t) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(m \frac{(x-y)^2}{2\Delta t} - V(y) \Delta t\right)\right]. \quad (3.28)$$

et la fonction d'onde à l'instant  $t + \Delta t$  est donné par

$$\psi(x, t + \Delta t) = \int dy \mathcal{K}(x, t + \Delta t; y, t) \psi(y, t). \quad (3.29)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \psi(x, t + \Delta t) &= \int dy \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(m \frac{(x-y)^2}{2\Delta t}\right)\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} V(y) \Delta t\right] \psi(y, t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nous utilisons le développement

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar} V(y) \Delta t\right] = 1 - \frac{i}{\hbar} V(y) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.31)$$

pour avoir

$$\begin{aligned} \psi(x, t + \Delta t) &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \int dy \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(m \frac{(x-y)^2}{2\Delta t}\right)\right] \times \\ &\quad \left(\psi(y, t) - \frac{i}{\hbar} V(y) \psi(y, t) \Delta t\right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3 Les intégrales de chemins

Maintenant nous faisons le changement  $y \rightarrow \xi = y - x$

$$\begin{aligned}
 \psi(x, t + \Delta t) &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \int d\xi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \xi^2\right) \\
 &\quad \times \left( \psi(x + \xi, t) - \frac{i}{\hbar} V(x + \xi) \psi(x + \xi, t) \Delta t \right) \\
 &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \left( \int d\xi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \xi^2\right) \psi(x + \xi, t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{\hbar} \Delta t \int d\xi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \xi^2\right) V(x + \xi) \psi(x + \xi, t) \right) \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Nous faisons ensuite le developpement de  $\psi(x + \xi, t)$

$$\psi(x + \xi, t) = \psi(x, t) + \xi \psi'(x, t) + \frac{1}{2} \xi^2 \psi''(x, t) + \dots \quad (3.34)$$

et nous utilisons

$$\int d\xi \quad \xi \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon} \xi^2\right) = 0 \quad (3.35)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \int d\xi \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\Delta t} \xi^2\right) \psi(x + \xi, t) &= \psi(x, t) \int d\xi \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\Delta t} \xi^2\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \int d\xi \xi^2 \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\Delta t} \xi^2\right) + \dots \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Maintenant nous utilisons

$$\begin{aligned}
 \int d\xi \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon} \xi^2\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\varepsilon} \\
 \int d\xi \xi^2 \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon} \xi^2\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{2a}\right) (\sqrt{\varepsilon})^3 \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

pour avoir

$$\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \int d\xi \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\Delta t} \xi^2\right) \psi(x + \xi, t) = \psi(x, t) + \left(\frac{i\hbar\Delta t}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t)\right) + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.38)$$

et

$$\frac{i}{\hbar} \Delta t \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t)}} \int d\xi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \xi^2\right) V(x + \xi) \psi(x + \xi, t) = \frac{i}{\hbar} V(x) \psi(x, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)$$

ce qui nous donne

$$\psi(x, t + \Delta t) = \psi(x, t) + \frac{i\hbar\Delta t}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \frac{i}{\hbar} V(x) \psi(x, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.39)$$

ou bien

$$\frac{\psi(x, t + \Delta t) - \psi(x, t)}{\Delta t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \frac{i}{\hbar} V(x) \psi(x, t) \quad (3.40)$$

d'où on tire à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t). \quad (3.41)$$

### 3.4 La particule libre

Considérons, comme exemple, le propagateur associé à une particule libre. Nous avons

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\varepsilon} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2 \right]. \quad (3.42)$$

A l'aide de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \exp \left[ -\alpha (x_n - x_{n-1})^2 - \beta (x_n - x_{n+1})^2 \right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} \exp \left[ -\frac{\beta\alpha}{\alpha + \beta} (x_{n+1} - x_{n-1})^2 \right]. \quad (3.43)$$

Nous obtenons

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_b - t_a)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right\}. \quad (3.44)$$

#### Exercice :

Pour une particule libre nous avons

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \left( \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right]$$

1) En écrivant le dernier facteur sous la forme

$$\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right] = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_N x_N - p_1 x_0) - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_{n+1} - p_n) \right]$$

et en effectuant les intégrations sur les coordonnées intermédiaires, montrer que

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \left( \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_N (x_N - x_0) \right] \int \prod_{n=1}^{N-1} dp_n \prod_{n=1}^{N-1} \delta(p_{n+1} - p_n) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon \right)$$

2) En effectuant maintenant les intégrations sur  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N-1}$  et en notant  $p_N = p$ , écrire  $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$  sous la forme

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int dp \exp \left( -\frac{i}{\hbar} E_p (t_b - t_a) \right) \varphi_p(x_b) \varphi_p^*(x_a) \quad (3.45)$$

avec

$$E_p = \frac{p^2}{2m} \quad \text{et} \quad \varphi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left( \frac{i}{\hbar} p x \right) \quad (3.46)$$



Deuxième partie

# Premières applications





# Intégrales de chemins pour les actions quadratiques

## 4.1 Actions quadratiques

Le but de cette section est de calculer explicitement le propagateur associé aux systèmes ayant un Lagrangien quadratique. Considérons alors un système physique qui a le lagrangien quadratique

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + f(t)\dot{x} + g(t)x + h(t)\dot{x}. \quad (4.1)$$

Selon la définition le propagateur est donné par

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \right\}. \quad (4.2)$$

Pour calculer  $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ , cherchons d'abord l'équation du mouvement classique, qui n'est rien d'autre que l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (4.3)$$

Il est facile d'obtenir

$$m\ddot{x}_{cl} + m\omega^2 x_{cl} + \dot{f}(t)x_{cl} - g(t) + \dot{h}(t) = 0 \quad (4.4)$$

Faisons ensuite le changement

$$x(t) = x_{cl}(t) + y(t) \quad (4.5)$$

avec

$$\int Dx = \int Dy \quad (4.6)$$

et

$$x_b = x(t_b) = x_{cl}(t_b) \quad (4.7)$$

$$x_a = x(t_a) = x_{cl}(t_a) \quad (4.8)$$

$$y_a = y(t_a) = 0 \quad (4.9)$$

$$y_b = y(t_b) = 0 \quad (4.10)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 S[x(t)] &= \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \\
 &\int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}_{cl} + \dot{y})^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (x_{cl} + y)^2 + f(t) (\dot{x}_{cl} + \dot{y}) (x_{cl} + y) \right. \\
 &\quad \left. + g(t) (x_{cl} + y) + h(t) (\dot{x}_{cl} + \dot{y}) \right] dt
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Le rearrangement de ces termes nous donne pour  $S[x(t)]$

$$\begin{aligned}
 S[x(t)] &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2 + f(t) \dot{x}_{cl} x_{cl} + g(t) x_{cl} + h(t) \dot{x}_{cl} \right] dt \\
 &\quad + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + f(t) \dot{y} y \right] dt \\
 &\quad + \int_{t_a}^{t_b} [m \dot{y} \dot{x}_{cl} - m \omega^2 y x_{cl} + f(t) (\dot{y} x_{cl} + \dot{x}_{cl} y) + g(t) y + h(t) \dot{y}] dt
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$S[x(t)] = S_{cl} + S_{fl} + S_0 \tag{4.13}$$

où

$$\begin{aligned}
 S_{cl} &= S[x_{cl}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2 + f(t) \dot{x}_{cl} x_{cl} + g(t) x_{cl} + h(t) \dot{x}_{cl} \right] dt \\
 S_{fl} &= S_{fl}[y(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + f(t) \dot{y} y \right] dt \\
 S_0 &= \int_{t_a}^{t_b} [m \dot{y} \dot{x}_{cl} - m \omega^2 y x_{cl} + f(t) (\dot{y} x_{cl} + \dot{x}_{cl} y) + g(t) y + h(t) \dot{y}] dt
 \end{aligned}$$

Cependant qu'on peut montrer que  $S_0 = 0$ . La demonstration se fait de la manière suivante ; on a

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \int_{t_a}^{t_b} [m \dot{y} \dot{x}_{cl} - m \omega^2 y x_{cl} + f(t) (\dot{y} x_{cl} + \dot{x}_{cl} y) + g(t) y + h(t) \dot{y}] dt \\
 S_0 &= \int_{t_a}^{t_b} m \dot{y} \dot{x}_{cl} dt - \int_{t_a}^{t_b} m \omega^2 y x_{cl} dt + \int_{t_a}^{t_b} f(t) (\dot{y} x_{cl} + \dot{x}_{cl} y) dt + \int_{t_a}^{t_b} g(t) y dt + \int_{t_a}^{t_b} h(t) \dot{y} dt
 \end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie et en tenant compte de  $y_a = y(t_a) = y_b = y(t_b) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_a}^{t_b} m \dot{y} \dot{x}_{cl} dt &= [m y \dot{x}_{cl}]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} m y \ddot{x}_{cl} dt = - \int_{t_a}^{t_b} m y \ddot{x}_{cl} dt \\
 \int_{t_a}^{t_b} f(t) (\dot{y} x_{cl} + \dot{x}_{cl} y) dt &= [f(t) y x_{cl}]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \dot{f}(t) y x_{cl} dt = - \int_{t_a}^{t_b} \dot{f}(t) y x_{cl} dt \\
 \int_{t_a}^{t_b} h(t) \dot{y} dt &= [h(t) y]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \dot{h}(t) y dt = - \int_{t_a}^{t_b} \dot{h}(t) y dt
 \end{aligned}$$

nous arrivons à

$$\begin{aligned}
S_0 &= \int_{t_a}^{t_b} m \dot{y} \dot{x}_{cl} dt - \int_{t_a}^{t_b} m \omega^2 y x_{cl} dt + \int_{t_a}^{t_b} f(t) (\dot{y} x_{cl} + \dot{x}_{cl} y) dt + \int_{t_a}^{t_b} g(t) y dt + \int_{t_a}^{t_b} h(t) \dot{y} dt \\
&= - \int_{t_a}^{t_b} m y \ddot{x}_{cl} dt - \int_{t_a}^{t_b} m \omega^2 y x_{cl} dt - \int_{t_a}^{t_b} \dot{f}(t) y x_{cl} dt + \int_{t_a}^{t_b} g(t) y dt - \int_{t_a}^{t_b} \dot{h}(t) y dt \\
&= - \int_{t_a}^{t_b} \left[ m y \ddot{x}_{cl} + m \omega^2 y x_{cl} + \dot{f}(t) y x_{cl} - g(t) y + \dot{h}(t) y \right] dt \\
&= - \int_{t_a}^{t_b} y \left[ m \ddot{x}_{cl} + m \omega^2 x_{cl} + \dot{f}(t) x_{cl} - g(t) + \dot{h}(t) \right] dt = 0 .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x_{cl}(t)] \right\} \int Dy \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[y(t)] \right\} .
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Posons en dernière étape

$$\int Dy \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[y(t)] \right\} = K(0, t_b; 0, t_a) = A(t_b - t_a) = A(T) \tag{4.16}$$

pour avoir

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = A(T) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x_{cl}(t)] \right\} . \tag{4.17}$$

Pour le facteur de fluctuation  $A(T)$  il n'est pas difficile de montrer que

$$A(T) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\hbar} \left| \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_a \partial x_b} \right|} . \tag{4.18}$$

## 4.2 Particule libre

Pour une particule libre on a

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{4.19}$$

L'équation du mouvement classique s'écrit

$$m \ddot{x}_{cl} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_{cl} = 0 \Rightarrow x_{cl}(t) = At + B \tag{4.20}$$

Pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ , nous considérons les condition initiales

$$x_a = x_{cl}(t_a) = At_a + B \tag{4.21}$$

$$x_b = x_{cl}(t_b) = At_b + B \tag{4.22}$$

ce qui nous donne

$$A = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \quad (4.23)$$

$$B = \frac{x_a t_b - x_b t_a}{t_b - t_a} \quad (4.24)$$

et pour  $x_{cl}(t)$  ;

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{cl}(t) &= \frac{(t_b - t)x_a + (t - t_a)x_b}{t_b - t_a} \\ \dot{x}_{cl}(t) &= \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} = \dot{x}_{cl}(t_a) = \dot{x}_{cl}(t_b) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dans se cas l'action classique se calcule. Le résultat est

$$\begin{aligned} S_{cl} = S[x_{cl}(t)] &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \ddot{x}_{cl}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} \\ &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t_b) \dot{x}_{cl}(t_b) - \frac{1}{2} m x_{cl}(t_a) \dot{x}_{cl}(t_a) \\ &= \frac{1}{2} m x_b \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} - \frac{1}{2} m x_a \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \\ &= \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le facteur de fluctuation est alors

$$A(t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_b - t_a)}} \quad (4.27)$$

Le propagateur est donc

$$K(x_b, t_b / x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_b - t_a)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right\}. \quad (4.28)$$

## 4.3 Le potentiel linéaire

Pour une particule soumise à l'action d'une force  $F = k$ , on a

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + kx. \quad (4.29)$$

La solution de l'équation du mouvement classique

$$\ddot{x}_{cl} = \frac{k}{m} \quad (4.30)$$

est

$$x_{cl}(t) = \frac{k}{2m} t^2 + \alpha t + \beta \quad (4.31)$$

avec

$$x_a = \frac{k}{2m} t_a^2 + \alpha t_a + \beta \quad (4.32)$$

$$x_b = \frac{k}{2m} t_b^2 + \alpha t_b + \beta \quad (4.33)$$

Il est facile de déterminer les constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$

$$\alpha = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} - \frac{k}{2m} (t_b + t_a) \quad (4.34)$$

$$\beta = \frac{k}{2m} t_b t_a + \frac{x_a t_b - x_b t_a}{(t_b - t_a)} \quad (4.35)$$

Dans ce cas on a

$$\dot{x}_{cl}(t) = \frac{k}{m} t + \alpha \quad (4.36)$$

$$\dot{x}_{cl}(t_a) = \frac{k}{m} t_a + \alpha \quad (4.37)$$

$$\dot{x}_{cl}(t_b) = \frac{k}{m} t_b + \alpha \quad (4.38)$$

Le calcul de l'action  $S_{cl}$  se réalise de la manière suivante

$$\begin{aligned} S_{cl} = S[x_{cl}(t)] &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2(t) + k x_{cl}(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \ddot{x}_{cl}(t) - k x_{cl}(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} k x_{cl}(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m x_b \dot{x}_{cl}(t_b) - \frac{1}{2} m x_a \dot{x}_{cl}(t_a) + \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} k x_{cl}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (4.39)$$

Le premier terme directement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} &= \frac{1}{2} m x_b \dot{x}_{cl}(t_b) - \frac{1}{2} m x_a \dot{x}_{cl}(t_a) \\ &= \frac{1}{2} m x_b \left[ \frac{k}{m} t_b + \alpha \right] - \frac{1}{2} m x_a \left[ \frac{k}{m} t_a + \alpha \right] \\ &= \frac{k}{2} (x_b t_b - x_a t_a) + \frac{1}{2} m \left( \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} - \frac{k}{2m} (t_b + t_a) \right) (x_b - x_a) \\ &= \frac{m (x_b - x_a)^2}{2 (t_b - t_a)} - \frac{k}{4} (t_b + t_a) (x_b - x_a) + \frac{k}{2} (x_b t_b - x_a t_a) \\ &= \frac{m (x_b - x_a)^2}{2 (t_b - t_a)} + \frac{1}{4} k (t_b - t_a) (x_a + x_b) \end{aligned} \quad (4.40)$$

#### 4 Intégrales de chemins pour les actions quadratiques

Pour le 2<sup>ème</sup> terme, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} k x_{cl}(t) \right] dt = \\
 & \frac{1}{2} k \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{k}{2m} t^2 + \alpha t + \beta \right] dt = \\
 & \frac{1}{2} k \left[ \frac{k}{6m} t^3 + \frac{1}{2} \alpha t^2 + \beta t \right]_{t_a}^{t_b} = \\
 & \frac{1}{2} k \left[ \frac{k}{6m} (t_b^3 - t_a^3) + \frac{1}{2} \alpha (t_b^2 - t_a^2) + \beta (t_b - t_a) \right]
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

D'où il vient le resultat suivant

$$\begin{aligned}
 \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} k x_{cl}(t) \right] dt &= \frac{1}{2} k \left[ \frac{k}{6m} (t_b^3 - t_a^3) + \frac{1}{2} \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} (t_b^2 - t_a^2) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} k \left[ \frac{k}{4m} (t_b + t_a) (t_b^2 - t_a^2) - \frac{k}{2m} t_b t_a (t_b - t_a) + x_a t_b - x_b t_a \right]
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

ou bien

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} k x_{cl}(t) \right] dt = \left[ -\frac{k^2 (t_b - t_a)^3}{24m} + \frac{k}{4} (t_b - t_a) (x_a + x_b) \right] \tag{4.43}$$

L'expression finale de  $S_{cl}$  est donc

$$\begin{aligned}
 S_{cl} &= \frac{m (x_b - x_a)^2}{2 (t_b - t_a)} + \frac{1}{4} k (t_b - t_a) (x_a + x_b) - \frac{k^2 (t_b - t_a)^3}{24m} + \frac{k}{4} (t_b - t_a) (x_a + x_b) \\
 &= \frac{m (x_b - x_a)^2}{2 T} + \frac{k}{2} T (x_a + x_b) - \frac{k^2}{24m} T^3
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

avec

$$T = t_b - t_a \tag{4.45}$$

Le facteur de fluctuation est encore,

$$A(T) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}}. \tag{4.46}$$

C'est ainsi que nous obtenons l'expression finale du propagateur

$$K(x_b, t_b / x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m (x_b - x_a)^2}{2 T} + \frac{k}{2} T (x_a + x_b) - \frac{k^2}{24m} T^3 \right] \right\}. \tag{4.47}$$

## 4.4 L'oscillateur harmonique

Pour l'oscillateur harmonique, on a

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \tag{4.48}$$

La solution de l'équation du mouvement classique

$$\ddot{x}_{cl} + \omega^2 x_{cl} = 0 \quad (4.49)$$

est de la forme

$$x_{cl}(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4.50)$$

avec

$$x_a = A \sin \omega t_a + B \cos \omega t_a \quad (4.51)$$

$$x_b = A \sin \omega t_b + B \cos \omega t_b \quad (4.52)$$

Pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ , multiplions (4.51) par  $\cos \omega t_b$  et (4.52) par  $\cos \omega t_a$

$$x_a \cos \omega t_b = A \sin \omega t_a \cos \omega t_b + B \cos \omega t_a \cos \omega t_b \quad (4.53)$$

$$x_b \cos \omega t_a = A \sin \omega t_b \cos \omega t_a + B \cos \omega t_b \cos \omega t_a \quad (4.54)$$

et faisons la difference

$$x_a \cos \omega t_b - x_b \cos \omega t_a = A \sin \omega t_a \cos \omega t_b - A \sin \omega t_b \cos \omega t_a \quad (4.55)$$

Nous obtenons

$$A = \frac{x_a \cos \omega t_b - x_b \cos \omega t_a}{\sin \omega t_a \cos \omega t_b - \sin \omega t_b \cos \omega t_a} \quad (4.56)$$

$$= \frac{x_b \cos \omega t_a - x_a \cos \omega t_b}{\sin \omega (t_b - t_a)} \quad (4.57)$$

Multiplions maintenant (4.51) par  $\sin \omega t_b$  et (4.52) par  $\sin \omega t_a$

$$x_a \sin \omega t_b = A \sin \omega t_a \sin \omega t_b + B \cos \omega t_a \sin \omega t_b \quad (4.58)$$

$$x_b \sin \omega t_a = A \sin \omega t_b \sin \omega t_a + B \cos \omega t_b \sin \omega t_a \quad (4.59)$$

et faisons la difference

$$x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b = B \cos \omega t_b \sin \omega t_a - B \cos \omega t_a \sin \omega t_b. \quad (4.60)$$

Nous obtenons

$$B = \frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b}{\cos \omega t_b \sin \omega t_a - \cos \omega t_a \sin \omega t_b} \quad (4.61)$$

$$B = -\frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b}{\sin \omega (t_b - t_a)} \quad (4.62)$$



#### 4 Intégrales de chemins pour les actions quadratiques

Alors  $x_{cl}(t)$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 x_{cl}(t) &= \frac{x_b \cos \omega t_a \sin \omega t - x_b \sin \omega t_a \cos \omega t - x_a \cos \omega t_b \sin \omega t + x_a \sin \omega t_b \cos \omega t}{\sin \omega (t_b - t_a)} \\
 &= x_b \frac{\cos \omega t_a \sin \omega t - \sin \omega t_a \cos \omega t}{\sin \omega (t_b - t_a)} + x_a \frac{\sin \omega t_b \cos \omega t - \cos \omega t_b \sin \omega t}{\sin \omega (t_b - t_a)} \\
 &= x_b \frac{\sin \omega (t - t_a)}{\sin \omega (t_b - t_a)} + x_a \frac{\sin \omega (t_b - t)}{\sin \omega (t_b - t_a)}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

et

$$\dot{x}_{cl}(t) = \omega x_b \frac{\cos \omega (t - t_a)}{\sin \omega (t_b - t_a)} - \omega x_a \frac{\cos \omega (t_b - t)}{\sin \omega (t_b - t_a)} \tag{4.64}$$

$$\dot{x}_{cl}(t_a) = \frac{\omega x_b - \omega x_a \cos \omega (t_b - t_a)}{\sin \omega (t_b - t_a)} \tag{4.65}$$

$$\dot{x}_{cl}(t_b) = \frac{\omega x_b \cos \omega (t_b - t_a) - \omega x_a}{\sin \omega (t_b - t_a)} \tag{4.66}$$

En utilisant l'intégration par partie pour le terme de l'énergie cinétique,  $S_{cl}$  se calcule rapidement

$$\begin{aligned}
 S_{cl} &= S[x_{cl}(t)] \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2(t) \right] dt \\
 &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \ddot{x}_{cl}(t) dt - \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m x_{cl}(t) [\ddot{x}_{cl}(t) + \omega^2 x_{cl}(t)] dt
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Ici nous utilisons l'équation du mouvement classique  $\ddot{x}_{cl}(t) + \omega^2 x_{cl}(t) = 0$  pour avoir

$$\begin{aligned}
 S_{cl} &= \frac{1}{2} m x_{cl}(t_b) \dot{x}_{cl}(t_b) - \frac{1}{2} m x_{cl}(t_a) \dot{x}_{cl}(t_a) \\
 &= \frac{1}{2} m x_b \dot{x}_{cl}(t_b) - \frac{1}{2} m x_a \dot{x}_{cl}(t_a) \\
 &= \frac{1}{2} m x_b \frac{\omega x_b \cos \omega (t_b - t_a) - \omega x_a}{\sin \omega (t_b - t_a)} - \frac{1}{2} m x_a \frac{\omega x_b - \omega x_a \cos \omega (t_b - t_a)}{\sin \omega (t_b - t_a)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m \omega}{\sin \omega (t_b - t_a)} [x_b^2 \cos \omega (t_b - t_a) - x_b x_a - x_a x_b + x_a^2 \cos \omega (t_b - t_a)] \\
 &= \frac{m \omega}{2 \sin \omega (t_b - t_a)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega (t_b - t_a) - 2 x_b x_a]
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Le facteur de fluctuation est cette fois ci donné par

$$A(t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m \omega}{2 i \pi \hbar \sin \omega (t_b - t_a)}} \tag{4.69}$$

Dans ce cas le propagateur prend la forme suivante

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m \omega}{2 i \pi \hbar \sin \omega T}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m \omega}{2 \sin \omega T} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega T - 2 x_b x_a] \right\}. \tag{4.70}$$

Troisième partie

# **Théorie des perturbations**



## 5.1 Éléments de matrices

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'élaborer une représentation "intégrale de chemin" pour des éléments de matrices de la forme  $\langle x_b, t_b | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_k(t_k) | x_a, t_a \rangle$ , où  $\hat{O}_k(t)$  est une fonction arbitraire de l'opérateur  $\hat{x}(t)$ . Nous commençons d'abord par l'élément de matrice

$$\langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle, \quad (5.1)$$

où  $t_b > t_c > t_a$ . En premier lieu, nous insérons une relation de fermeture

$$\int dx_c |x_c, t_c\rangle \langle x_c, t_c| = 1, \quad (5.2)$$

où  $|x_c, t_c\rangle$  est un ket propre de l'opérateur  $\hat{x}(t_c)$

$$\hat{x}(t_c) |x_c, t_c\rangle = x_c |x_c, t_c\rangle. \quad (5.3)$$

Nous obtenons alors

$$\langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle = \int dx_c \langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) | x_c, t_c \rangle \langle x_c, t_c | x_a, t_a \rangle \quad (5.4)$$

$$= \int dx_c x_c \langle x_b, t_b | x_c, t_c \rangle \langle x_c, t_c | x_a, t_a \rangle \quad (5.5)$$

$$= \int dx_c x_c K(x_b, t_b; x_c, t_c) K(x_c, t_c; x_a, t_a). \quad (5.6)$$

Maintenant nous faisons la discrétisation de chaque propagateur

$$K(x_c, t_c; x_a, t_a) = \int \left( \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \right) \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{ac}\right), \quad (5.7)$$

avec

$$S_{ac} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 - \varepsilon V(x_{n-1}) \right) \right\} \quad (5.8)$$

et

$$K(x_b, t_b; x_c, t_c) = \int \left( \prod_{n=N+1}^{N+N'-1} dx_n \right) \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^{N'} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cb}\right)$$

avec

$$S_{cb} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=N+1}^{N+N'} \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 - \varepsilon V(x_{n-1}) \right) \right\}. \quad (5.9)$$

## 5 Calcul fonctionnel

Comme les indices  $n$  avec  $0 < n < N$  sont utilisés dans discrétisation du premier propagateur, nous avons utilisé pour le deuxième propagateur, les indices  $N < n < N + N'$ . Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle &= \int dx_c \left( \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \right) \left( \prod_{n=N+1}^{N+N'-1} dx_n \right) \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^{N+N'} x_c \\ &\quad \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{ac}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cb}\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Le point  $x_N$  est  $x_c$ . Nous pouvons écrire ainsi

$$\int dx_c \left( \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \right) \left( \prod_{n=N+1}^{N+N'-1} dx_n \right) = \int \prod_{n=1}^{N+N'-1} dx_n \quad (5.11)$$

et

$$S_{ac} + S_{cb} = S_{ab} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+N'} \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 - \varepsilon V(x_{n-1}) \right) \right\}. \quad (5.12)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle &= \\ \int \prod_{n=1}^{N+N'-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^{N+N'} x_c \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+N'} \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 - \varepsilon V(x_{n-1}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

La dernière équation n'est rien d'autre que la forme discrétisée de l'intégrale de chemin suivante

$$\langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle = \int Dx \, x(t_c) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\}. \quad (5.14)$$

Ce résultat peut être généralisé à tout opérateur de la forme

$$\hat{O}(t) = \hat{O}(\hat{x}(t)). \quad (5.15)$$

En suivant les mêmes étapes nous obtenons

$$\langle x_b, t_b | \hat{O}(t) | x_a, t_a \rangle = \int Dx \, O(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\}. \quad (5.16)$$

Considérons maintenant l'élément de matrice

$$\langle x_b, t_b | \hat{x}(t_d) \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle \quad (5.17)$$

avec la condition  $t_b > t_d > t_c > t_a$ . Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b | \hat{x}(t_d) \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle &= \int dx_d \int dx_c \, x_d \, x_c \\ &\quad K(x_b, t_b; x_d, t_d) K(x_d, t_d; x_c, t_c) K(x_c, t_c; x_a, t_a). \end{aligned} \quad (5.18)$$

En faisant la discrétisation des trois propagateurs écrire l'élément de matrice considéré sous forme d'une intégrale de chemin

$$\langle x_b, t_b | \hat{x}(t_d) \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle = \int Dx \, x(t_c) \, x(t_d) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\}. \quad (5.19)$$

Maintenant considérons l'intégrale de chemin

$$\int Dx \, x(t_c) \, x(t_d) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\} \quad / \quad t_c > t_d$$

mais avec la condition  $t_c > t_d$ . Dans ce cas, nous pouvons montrer que

$$\int Dx \, x(t_c) \, x(t_d) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\} = \langle x_b, t_b | \hat{x}(t_c) \hat{x}(t_d) | x_a, t_a \rangle. \quad (5.20)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int Dx \, x(t_c) \, x(t_d) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\} = \\ \langle x_b, t_b | [\hat{x}(t_d) \hat{x}(t_c) \theta(t_d - t_c) + \hat{x}(t_c) \hat{x}(t_d) \theta(t_c - t_d)] | x_a, t_a \rangle. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Si nous définissons le produit cronologique de deux opérateurs

$$\mathbf{T} \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) = \hat{O}_2(t_2) \hat{O}_1(t_1) \theta(t_2 - t_1) + \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \theta(t_1 - t_2)$$

nous obtenons le résultat final

$$\langle x_b, t_b | \mathbf{T} \hat{x}(t_d) \hat{x}(t_c) | x_a, t_a \rangle = \int Dx \, x(t_d) x(t_c) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\}. \quad (5.22)$$

Ce résultat peut aussi être généralisé au cas des opérateurs de la forme

$$\hat{O}_k(t) = \hat{O}_k(\hat{x}(t)). \quad (5.23)$$

$$\langle x_b, t_b | \mathbf{T} \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) | x_a, t_a \rangle = \int Dx \, O_1(t_1) O_2(t_2) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\} \quad (5.24)$$

D'une manière générale, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b | \mathbf{T} [\hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_n(t_n)] | x_a, t_a \rangle = \\ \int Dx \, O_1(t_1) O_2(t_2) \dots O_n(t_n) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

## 5.2 Méthode de la source

En physique expérimentale, pour connaître les propriétés d'un système physique (par exemple un atome), nous le laissons interagir avec une perturbation et nous étudions sa réponse. Cette technique expérimentale a une analogue théorique formelle qui nous permet l'étude d'un système physique à partir de son interaction avec une source. a connaissance. Pour donner une illustration, considérons un système avec

$$S_0 = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \quad (5.26)$$

## 5 Calcul fonctionnel

et faisons-le interagir avec une force externe dependant du temps

$$S[J] = S_0 + \int_{t_a}^{t_b} J(t) x(t) dt. \quad (5.27)$$

Dans ce cas l'équation du mouvement devient

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = J(t). \quad (5.28)$$

Nous définissons maintenant l'amplitude de transition

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[J] \right\} \quad (5.29)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\} F[J] \quad (5.30)$$

où la fonctionnelle  $F[J]$  est donnée par

$$F[J] = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} J(t) x(t) dt \right]. \quad (5.31)$$

Nous avons les dérivées fonctionnelles suivantes

$$\frac{\delta F[j]}{\delta J(t_1)} = \frac{i}{\hbar} x(t_1) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} J(t) x(t) dt \right] \quad (5.32)$$

$$\frac{\delta^2 F[j]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2)} = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 x(t_1) x(t_2) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} J(t) x(t) dt \right] \quad (5.33)$$

$$\frac{\delta^n F[j]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)} = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n x(t_1) x(t_2) \dots x(t_n) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} J(t) x(t) dt \right]. \quad (5.34)$$

Il vient alors

$$\langle x_b, t_b | \hat{x}(t_1) | x_a, t_a \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J}{\delta J(t_1)} \Big|_{J=0}. \quad (5.35)$$

D'une manière générale nous avons

$$\langle x_b, t_b | \mathbf{T}[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | x_a, t_a \rangle = \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta^n \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J}{\delta J(t_1) \delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (5.36)$$

# L'amplitude de transition vide-vide

Nous supposons qu'un système physique arbitraire est initialement (à  $t_i = t_a \rightarrow -\infty$ ) dans son état fondamental puis change sous l'influence d'une source externe  $J(t)$ , pendant une durée finie (de  $-T$  à  $+T$ ). Après que la source soit éteinte à  $t_f = t_b \rightarrow +\infty$ , l'état fondamental du système est toujours le même (à une phase), mais le système peut être excité. Nous voulons calculer la probabilité de transition pour que le système soit encore dans son état fondamental. Une telle transition est appelée transition vide-vide.

Compte tenu de l'interaction avec la source le Hamiltonien du système s'écrit

$$H_J = H_0 - J(t)x. \quad (6.1)$$

## 6.1 Amplitude vide-vide

### 6.1.1 Etat fondamental (vide)

En physique quantique, l'état fondamental d'un système est l'état qui correspond à la plus basse énergie. Cet état est appelé aussi état du vide. Dans ce paragraphe nous montrons qu'à la limite  $t_b - t_a \rightarrow \infty$ , la contribution dominante à l'amplitude de transition  $\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0$  vient de l'état du vide.

Considérons la décomposition spectrale du propagateur relatif à  $H_0$

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0 = \sum_n \phi_n(x_b) \phi_n^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_b - t_a)} \quad (6.2)$$

où  $\phi_n(x)$  sont les fonctions propres de  $H_0$  et  $E_n$  sont les énergies correspondantes. Si nous effectuons une simple rotation de Wick  $T \rightarrow -iT$  et nous faisons tendre l'intervalle de temps  $t_b - t_a$  vers l'infini ( $t_b - t_a \rightarrow \infty$ ), nous pouvons voir que l'amplitude de transition domine le propagateur vide-vide par l'énergie la plus basse  $E_0$  figurant dans la série.

Ainsi donc

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0 \underset{t_b - t_a \rightarrow \infty}{\approx} \phi_0(x_b) \phi_0^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t_b - t_a)} \quad (6.3)$$

En considérant le temps physique (réel), le même résultat se maintient puisque les contributions des états excités oscillent beaucoup plus rapidement et disparaissent rapidement par rapport à celle de l'état fondamental.

### 6.1.2 Amplitude de transition vide-vide

L'amplitude de transition pour que le système soit encore dans son état fondamental est donnée par

$$\langle 0 | \exp \left( \frac{i}{\hbar} H_J 2T \right) | 0 \rangle = \langle 0, T | 0, -T \rangle_J = \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J. \quad (6.4)$$



## 6 L'amplitude de transition vide-vide

En insérant deux relations de fermeture  $\int dx_1 |x_1\rangle \langle x_1| = \int dx_2 |x_2\rangle \langle x_2| = 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J &= \int dx_1 \int dx_2 \langle 0 | x_2 \rangle \langle x_2 | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_J 2T\right) | x_1 \rangle \langle x_1 | 0 \rangle \\ &= \int dx_1 \int dx_2 \phi_0(x_1) \phi_0^*(x_2) \langle x_2, T | x_1, -T \rangle_J \end{aligned} \quad (6.5)$$

D'autre part, nous avons

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J = \int dx_1 \int dx_2 \langle x_b, t_b | x_2, T \rangle_J \langle x_2, T | x_1, -T \rangle_J \langle x_1, -T | x_a, t_a \rangle_J \quad (6.6)$$

Compte tenu du fait que la source  $J(t)$  s'annule lorsque  $t < -T$  où  $t > T$ , nous pouvons écrire

$$\langle x_1, -T | x_a, t_a \rangle_J = \langle x_1, -T | x_a, t_a \rangle_0 \quad (6.7)$$

$$\langle x_b, t_b | x_2, T \rangle_J = \langle x_b, t_b | x_2, T \rangle_0. \quad (6.8)$$

Nous avons alors

$$\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J = \int dx_1 \int dx_2 \langle x_b, t_b | x_2, T \rangle_0 \langle x_2, T | x_1, -T \rangle_J \langle x_1, -T | x_a, t_a \rangle_0. \quad (6.9)$$

Suivant l'équation (6.3), nous avons, dans les limites  $t_b - T \rightarrow +\infty$ ,  $t_a + T \rightarrow -\infty$  et  $T \rightarrow +\infty$ ,

$$\langle x_b, t_b | x_2, T \rangle_0 = \phi_0(x_b) \phi_0^*(x_2) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0(t_b - T)} \quad (6.10)$$

$$\langle x_1, -T | x_a, t_a \rangle_0 = \phi_0(x_1) \phi_0^*(x_a) e^{\frac{i}{\hbar} E_0(T + t_a)} \quad (6.11)$$

L'amplitude de transition  $\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J &= \phi_0(x_b) \phi_0^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0(t_b - t_a)} e^{\frac{i}{\hbar} 2E_0 T} \int dx_1 \int dx_2 \phi_0(x_1) \phi_0^*(x_2) \langle x_2, T | x_1, -T \rangle_J \\ &= \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0 e^{\frac{i}{\hbar} 2E_0 T} \int dx_1 \int dx_2 \phi_0(x_1) \phi_0^*(x_2) \langle x_2, T | x_1, -T \rangle_J \end{aligned} \quad (6.12)$$

De la dernière équation nous pouvons extraire l'intégrale suivante

$$\int dx_1 \int dx_2 \phi_0(x_1) \phi_0^*(x_2) \langle x_2, T | x_1, -T \rangle_J = \frac{\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J}{\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0} e^{-\frac{i}{\hbar} 2E_0 T}$$

Le résultat final est donc

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J = \frac{\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J}{\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0} e^{-\frac{i}{\hbar} 2E_0 T}, \quad (6.13)$$

qui est l'amplitude de transition vide-vide en présence de la source.

### 6.1.3 Fonctionnelle génératrice

A partir de l'équation (6.13), nous pouvons écrire

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} 2E_0 T} \quad (6.14)$$

et, par conséquent,

$$\frac{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J}{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_0} = \frac{\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_J}{\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_0} \quad (6.15)$$

Nous définissons alors la fonctionnelle génératrice  $Z[J]$  par

$$Z[J] = \frac{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J}{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_0} = \frac{\int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [L(x, \dot{x}) + J(t) x(t)] dt \right\}}{\int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) dt \right\}} \quad (6.16)$$

de sorte que

$$\langle 0 | \mathbf{T} [\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | 0 \rangle = \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (6.17)$$

Nous remarquons ici que  $Z[J]$  ne dépend pas de  $x_b$  et  $x_a$ . Nous pouvons alors choisir des conditions aux limites périodiques ( $x_b = x_a = x$ ) où tout simplement les conditions de Dirichlet ( $x_b = x_a = 0$ ).

## 6.2 Intégrale gaussienne et fonctions de Green

Supposons que le mouvement du système est régi par l'action quadratique suivante

$$\frac{i}{\hbar} S^0[J] = \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \Omega^2(t) x^2 + J(t) x \right] dt. \quad (6.18)$$

Il est bien connu que l'intégrale de chemin correspondante à cette action est gaussienne. Elle se calcule directement, en considérant la discrétisation de  $S^0[J]$ .

### 6.2.1 Cas d'une intégrale discrète

Comme nous avons vu dans le cas de l'oscillateur harmonique, la forme discrétisée de  $\frac{i}{\hbar} S^0[J]$  qui s'écrit

$$\frac{i}{\hbar} S^0[J] = \frac{i}{\hbar} \left( \sum_{i,k=1}^{N-1} \frac{1}{2} M_{ik} x_i x_k + \varepsilon \sum_{i=1}^{N-1} J_i x_i \right), \quad (6.19)$$

peut se mettre sous forme matricielle

$$\frac{i}{\hbar} S^0[J] = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} X^t M X + \frac{\varepsilon}{2} (X^t \bar{J} + \bar{J}^t X) \right], \quad (6.20)$$

où  $X^t = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$  et  $\bar{J}^t = (J_1, J_2, \dots, J_{N-1})$  avec  $J_k = J(t_k)$ .

Nous introduisons maintenant la matrice inverse de  $M$

$$\sum_k (M^{-1})_{ik} M_{kl} = \sum_k M_{ik} (M^{-1})_{kl} = \delta_{il} \quad (6.21)$$

et nous faisons le changement de variable

$$Y = X + \varepsilon M^{-1} \bar{J}, \quad (6.22)$$

## 6 L'amplitude de transition vide-vide

où les composantes  $y_i$  sont données par

$$y_i = x_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N (M^{-1})_{ij} J_j. \quad (6.23)$$

Nous obtenons alors

$$\frac{1}{2} X^t M X + \frac{\varepsilon}{2} (X^t \bar{J} + \bar{J}^t X) = \frac{1}{2} Y^t M Y - \left( \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \bar{J}^t M^{-1} \bar{J} \quad (6.24)$$

et, par conséquent,

$$\langle x, t_b | x, t_a \rangle_J = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{J}^t (M^{-1}) \bar{J} \right] \int \left( \prod_{n=1}^{N-1} dy_n \right) \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N \exp \left[ \frac{i}{\hbar} Y^t M Y \right] \quad (6.25)$$

La fonction génératrice est alors

$$Z^0 [J] = \frac{\langle x, t_b | x, t_a \rangle_J}{\langle x, t_b | x, t_a \rangle_0} = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{J}^t (M^{-1}) \bar{J} \right]. \quad (6.26)$$

### 6.2.2 Cas d'une intégrale continue : fonction de Green

En faisant une intégration par partie nous pouvons écrire  $\frac{i}{\hbar} S^0 [J]$  sous la forme

$$\frac{i}{\hbar} S^0 [J] = \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} x \left( -\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{m}{2} \Omega^2(t) \right) x dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} J(t) x dt. \quad (6.27)$$

Soit  $\Delta(t, t')$  l'inverse de l'opérateur  $\mathbb{M} = -\frac{m}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2(t) \right)$ . Nous avons alors

$$-\frac{m}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2(t) \right) \Delta(t, t') = \delta(t - t'). \quad (6.28)$$

En effet  $\Delta(t, t')$  est la fonction de Green associée à l'équation

$$\left( -\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} - \frac{m}{2} \Omega^2(t) \right) x = 0. \quad (6.29)$$

Nous avons dans ce cas

$$\langle x, t_b | x, t_a \rangle_J = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{\det \mathbb{M}}} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{4} \int dt \int dt' \Delta(t, t') J(t) J(t') \right) \quad (6.30)$$

et

$$Z^0 [J] = \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{4} \int dt \int dt' \Delta(t, t') J(t) J(t') \right) \quad (6.31)$$

qui est exactement la limite continue de l'expression (6.26).

Nous définissons maintenant la fonction de Green à  $n$  points

$$G^0(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle 0 | \mathbf{T} [\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | 0 \rangle, \quad (6.32)$$

qui se calcule à partir de  $Z^0[J]$

$$G^0(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z^0[J]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (6.33)$$

La fonction de Green à 2 points s'écrit alors

$$G^0(t_1, t_2) = i\hbar \Delta(t_1, t_2). \quad (6.34)$$

## 6.3 Théorème de Wick

L'identité (6.33) conduit au théorème de Wick. Chaque fois qu'une dérivée agit sur l'exponentielle du membre de droite de (6.31), elle engendre un facteur  $\int dt \Delta(t, t_k) J(t)$ . Une autre dérivée devra agir ultérieurement sur ce facteur, sinon le terme correspondant s'annulera dans la limite  $J = 0$ . Nous en concluons que la fonction de Green  $G^0(t_1, t_2, \dots, t_n)$  est obtenue de la manière suivante : on considère tous les appariements possibles des points  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ( $n$  doit donc être pair). A chaque paire  $(t_i, t_j)$  on associe la fonction de Green  $G^0(t_i, t_j) = i\hbar \Delta(t_i, t_j)$ .

$$G^0(t_1, t_2, \dots, t_{2n}) = \sum_P G^0(t_1, t_2) G^0(t_3, t_4) \dots G^0(t_{2n-1}, t_{2n}). \quad (6.35)$$

Par exemple considérons la fonction de Green à 4 points

$$G^0(t_1, t_2, t_3, t_4) = G^0(t_1, t_2) G^0(t_3, t_4) + G^0(t_1, t_3) G^0(t_2, t_4) + G^0(t_1, t_4) G^0(t_2, t_3). \quad (6.36)$$



# Théorie des perturbations

Bien que l'importance du formalisme des intégrales de chemin dans le calcul des éléments des matrices (amplitudes de transitions, valeurs moyennes...etc) soit très claire, son utilisation ne semble pas aussi claire. Cela est dû au fait que les intégrales de chemin se calculent exactement seulement pour les actions quadratiques (intégrales gaussiennes) tandis que la partie de l'action qui décrit l'interaction du système considéré, est souvent non-Gaussienne. Lorsque l'interaction, la partie non-gaussienne de l'action est faible par rapport à la partie quadratique, alors nous nous attendons à ce qu'un développement en série de perturbations soit applicable l'expansion de perturbation soit applicable.

## 7.1 Développement perturbatif

Considérons un système physique décrit par le lagrangien

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x). \quad (7.1)$$

Le propagateur associé à ce système peut s'écrire sous la forme

$$K(x_b, x_a; T) = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V(x) dt \right\}. \quad (7.2)$$

En effectuant le développement de Taylor

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V(x) dt \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^T V(x) dt \right)^n, \quad (7.3)$$

nous pouvons écrire  $K(x_b, x_a; T)$  sous forme d'une série

$$K(x_b, x_a; T) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n K_n(x_b, x_a; T) \quad (7.4)$$

où  $K_n(x_b, x_a; T)$  est l'amplitude de transition d'ordre  $n$  donnée par

$$K_n(x_b, x_a; T) = \frac{1}{n!} \int Dx \left( \int_0^T V(x) dt \right)^n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt \right\}. \quad (7.5)$$

L'amplitude de transition d'ordre 0 est le propagateur de la particule libre

$$\begin{aligned} K_0(x_b, x_a; T) &= \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt \right\} \\ &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

## 7.2 Amplitude de transition d'ordre 1

Pour calculer l'amplitude de transition d'ordre 1,

$$K_1(x_b, x_a; T) = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt \right\} \left( \int_0^T V(x) dt \right), \quad (7.7)$$

nous considérons la forme discrétisée du dernier facteur qui s'écrit

$$\int_0^T V(x) dt = \sum_{l=1}^N \varepsilon V(x_l). \quad (7.8)$$

Nous avons alors

$$K_1(x_b, x_a; T) = \varepsilon \sum_{l=1}^N \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N V(x_l) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\}. \quad (7.9)$$

Maintenant, nous écrivons la mesure dans la dernière équation sous la forme

$$\left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N \prod_{n=1}^{N-1} dx_n = dx_l \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^l \prod_{n=1}^{l-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^{N-l} \prod_{n=l+1}^{N-1} dx_n \quad (7.10)$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} K_1(x_b, x_a; T) &= \varepsilon \sum_{l=1}^N \int dx_l V(x_l) \times \\ &\quad \int \prod_{n=1}^{l-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^l \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^l \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\} \times \\ &\quad \int \prod_{n=l+1}^{N-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^{N-l} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=l+1}^N \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Compte tenu de la forme discrétisée du propagateur libre, la dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$K_1(x_b, x_a; T) = \varepsilon \sum_{l=1}^N \int dx_l V(x_l) K_0(x_b, x_l; T - l\varepsilon) K_0(x_l, x_a; l\varepsilon) \quad (7.12)$$

où bien sous forme integrale

$$K_1(x_b, x_a; T) = \int_0^T dt \int dx K_0(x_b, x; T - t) V(x) K_0(x, x_a; t) \quad (7.13)$$

## 7.3 Formule de récurrence

Nous nous proposons maintenant de trouver une relation de récurrence entre les  $K_n(x_b, x_a; T)$ . Nous écrivons d'abord (pour  $n \neq 0$ )

$$\frac{1}{n!} \left( \int_0^T V(x(t)) dt \right)^n = \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V(x(t_1)) V(x(t_2)) \dots V(x(t_n)). \quad (7.14)$$

Ensuite nous faisons la discrétisation de l'intégrale sur  $t_1$

$$\frac{1}{n!} \left( \int_0^T V(x(t)) dt \right)^n = \varepsilon \sum_{l=1}^N V(x_l) \int_0^{l\varepsilon} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V(x(t_2)) \dots V(x(t_n)). \quad (7.15)$$

ce qui nous conduit à la forme discrétisée de l'amplitude  $K_n(x_b, x_a; T)$

$$K_1(x_b, x_a; T) = \varepsilon \sum_{l=1}^N \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^N V(x_l) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\}. \quad (7.16)$$

Ici nous utilisons la même procédure utilisée au calcul de  $K_n(x_b, x_a; T)$ . Nous séparons les intégrales sur les points intermédiaires  $\{x_n/n < l\}$  des intégrales sur les points  $\{x_n/n > l\}$

$$\begin{aligned} K_n(x_b, x_a; T) &= \varepsilon \sum_{l=1}^N \int dx_l V(x_l) \times \\ &\quad \int \prod_{n=l+1}^{N-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^{N-l} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=l+1}^N \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\} \times \\ &\quad \int \prod_{n=1}^{l-1} dx_n \left( \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \right)^l \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^l \left( \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right) \right\} \times \\ &\quad \int_0^{l\varepsilon} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n V(x(t_2)) \dots V(x(t_n)). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Les deux dernières lignes de cette expression sont tout simplement  $K_{n-1}(x_l, x_a; l\varepsilon)$  tandis que la deuxième ligne représente  $K_0(x_b, x_l; T - l\varepsilon)$ . Nous obtenons alors

$$K_n(x_b, x_a; T) = \int_0^T dt \int dx K_0(x_b, x; T-t) V(x) K_{n-1}(x, x_a; t) \quad (7.18)$$

## 7.4 Amplitude de transition d'ordre supérieur à 1

Calculons maintenant l'amplitude de transition du deuxième ordre  $K_2(x_b, x_a; T)$ . Suivant la formule de récurrence, nous avons

$$K_2(x_b, x_a; T) = \int_0^T dt_2 \int dx_2 K_0(x_b, x_2; T-t_2) V(x_1) K_1(x_2, x_a; t_2) \quad (7.19)$$

En substituant  $K_1(x_2, x_a; t_2)$  par son expression (7.13), nous obtenons pour  $K_2(x_b, x_a; T)$



$$K_2(x_b, x_a; T) = \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int dx_1 \int dx_2 K_0(x_b, x_2; T - t_2) V(x_2) K_0(x_2, x_1; t_2 - t_1) V(x_1) K_0(x_1, x_a; t_1) \quad (7.20)$$

Par induction, nous arrivons à la formule suivante

$$K_n(x_b, x_a; T) = \int_0^T dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n K_0(x_b, x_n; T - t_n) V(x_n) K_0(x_n, x_{n-1}; t_n - t_{n-1}) V(x_{n-1}) \dots V(x_2) K_0(x_2, x_1; t_2 - t_1) V(x_1) K_0(x_1, x_a; t_1). \quad (7.21)$$

## 7.5 Diagrammes de Feynman

La lecture de droite à gauche de l'amplitude de transition  $K_n(x_b, x_a; T)$  nous permet de représenter chaque contribution à la série des perturbations par un diagramme de Feynman comme il est montré dans la figure suivante

- Chaque ligne représente le propagateur libre entre deux points d'espace-temps
- Un vertex représente le potentiel d'interaction  $V$ .
- avec intégrations sur les points intermédiaires

## 7.6 Equation de Bethe-Salpeter

L'équation (7.4) peut s'écrire sous la forme

$$K(x_b, x_a; T) = K_0(x_b, x_a; T) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n K_n(x_b, x_a; t) \quad (7.22)$$

En utilisant la formule de récurrence pour  $K_n(x_b, x_a; t)$ , nous obtenons

$$K(x_b, x_a; T) = K_0(x_b, x_a; T) - \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \int dx K_0(x_b, x; T - t) V(x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} K_{n-1}(x, x_a; t). \quad (7.23)$$

La dernière somme n'est rien d'autre que  $K(x, x_a; t)$ . Nous avons alors l'équation de Bethe-Salpeter.

$$K(x_b, x_a; T) = K_0(x_b, x_a; T) - \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \int dx K_0(x_b, x; T - t) V(x) K(x, x_a; t) \quad (7.24)$$

$$U_0^+(T, 0) U(T, 0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt V_I(t) U_0^+(t, 0) U(t, 0)$$

$$U_I(t, 0) = U_0^+(t, 0) U(t, 0).$$

$$U_I(t_f, t_i) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V_I(t) U_I(t_f, t_i)$$

## 7.7 Fonction de Green causale

Nous définissons la fonction de Green causale par

$$G(x_b, x_a; T) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(T) K(x_b, x_a; T) \quad (7.25)$$

Ici la fonction  $\Theta(T)$  assure la causalité (aucun effet ne vient avant sa cause).

Nous pouvons montrer que la fonction de Green  $G(x, x_0; T)$  vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} G(x, x_0; T) - \hat{H} G(x, x_0; T) = \delta(T) \delta(x_b - x_a). \quad (7.26)$$

Si nous introduisons la transformée de Fourier

$$G(x_b, x_a; E) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_b, x_a; T) e^{\frac{i}{\hbar} ET} dT \quad (7.27)$$

Nous obtenons l'équation

$$(E + i\epsilon - \hat{H}) G(x, x_0; E) = \delta(x_b - x_a) \quad (7.28)$$

qui admet comme solution

$$G(x, x_0; E) = \langle x | \hat{G}(E) | x_0 \rangle$$

avec

$$\hat{G}(E) = \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} \quad (7.29)$$

La prescription que la singularité dans ces opérateurs doit être régularisée en ajoutant  $+i\epsilon$ , où  $\epsilon$  est une quantité infinitésimale positive, dans le dénominateur découle de la définition (7.27) dans laquelle l'énergie  $E$  doit avoir une petite partie imaginaire positive pour que l'intégrale sur  $T$  converge.

## 7.8 Equation de Lippmann-Schwinger

En terme des fonctions de Green causales  $G(x_b, x_a; T)$  l'équation de Bethe-Salpeter peut s'écrire sous la forme

$$G(x_b, x_a; T) = G_0(x_b, x_a; T) + \int_0^T dt \int dx G_0(x_b, x; T-t) V(x) G(x, x_a; t) \quad (7.30)$$

Nous en déduisons alors l'équation

$$G(x_b, x_a; E) = G_0(x_b, x_a; E) + \int dx G_0(x_b, x; E) V(x) G(x, x_a; E) \quad (7.31)$$

qui est une représentation des opérateurs  $\hat{G}(E)$  et  $\hat{G}_0(E)$

$$\hat{G}(E) = \hat{G}_0(E) + \hat{G}_0(E) \hat{V} \hat{G}(E)$$

Nous avons alors l'équation de Lippmann-Schwinger

$$\frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} = \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\epsilon} + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon}. \quad (7.32)$$

### Exercice :

1) A partir de l'identité

$$(A + B) \frac{1}{A + B} = 1 \quad (7.33)$$

montrer que

$$\frac{1}{A + B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A + B} \quad (7.34)$$

et en déduire la série de perturbations

$$\frac{1}{A + B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots - \dots \quad (7.35)$$

2) En posant  $A = E - \hat{H}_0 + i\epsilon$  et  $B = V$ , dériver directement l'équation de Lippmann-Schwinger.

Quatrième partie

# **Intégrales de chemins en théorie des champs**



# Le champ scalaire libre

## 8.1 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Précédemment nous avons étudié des systèmes avec une seule particule se mouvant le long d'un axe (à une dimension). Ces systèmes sont à un seul degré de liberté

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int \mathcal{D}q \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{L}(q, \dot{q})] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}q \exp \{ i \mathcal{S}[q] \}\end{aligned}$$

Cependant, la méthode des intégrales de chemins peut être généralisée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté  $q^1, q^2, \dots, q^k$

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int \mathcal{D}q^1 \int \mathcal{D}q^2 \dots \int \mathcal{D}q^k \\ &\quad \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{L}(q^1, \dots, q^k, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k)] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}q^1 \int \mathcal{D}q^2 \dots \int \mathcal{D}q^k \exp \{ i \mathcal{S}[q^1, \dots, q^k] \}\end{aligned}$$

## 8.2 Le champ scalaire réel

En généralisant les notions précédentes aux cas  $k \rightarrow \infty$ , on se convainc aisément que l'amplitude de probabilité  $K([\Phi]_f, t_f; [\Phi]_i, t_i)$  de trouver le système dans la configuration  $\Phi_f$  à l'instant  $t_f$ , sachant qu'il était dans la configuration  $\Phi_i$  à l'instant  $t_i$  peut s'écrire

$$K([\Phi]_f, t_f; [\Phi]_i, t_i) = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS_0[\Phi, t_f, t_i]}$$

où l'intégrale porte sur toutes les configurations possibles du champ  $\Phi$ , pour  $t_i < t < t_f$ .

$$\int \mathcal{D}\Phi = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N [d\Phi_j^1 d\Phi_j^2 \dots d\Phi_j^{M-1}]$$

Nous avons encore une fois, l'action (classique) dans l'exposant parce que  $e^{iS_0[\Phi, t_f, t_i]}$  est l'action du champ scalaire réel libre

$$\begin{aligned}S_0[\Phi; t_f, t_i] &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \mathcal{L}_0(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right].\end{aligned}\tag{8.1}$$

avec

$$\mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2), \quad (8.2a)$$

Cependant, cette représentation de l'élément de matrice de transition entre les configurations de champ n'est qu'une étape intermédiaire car ce n'est pas la quantité pertinente dans la théorie des champs.

En prenant les limites  $t_i \rightarrow -\infty$ , et  $t_f \rightarrow +\infty$ , nous pouvons définir l'amplitude vide-vide en présence d'une source  $J(x)$  par

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J = \text{const.} \cdot \int \mathcal{D}\Phi \ e^{iS_0[\Phi] + i \int d^4x [J(x)\Phi(x)]}. \quad (8.3)$$

où  $S_0[\Phi]$  est cette fois-ci

$$S_0[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_0 = \text{const.} \cdot \int \mathcal{D}\Phi \ e^{iS_0[\Phi]}. \quad (8.4)$$

Comme dans la mécanique quantique nous définissons la fonctionnelle génératrice par

$$Z_0[J] = \frac{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_J}{\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_0}, \quad (8.5)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp \{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) + J\Phi] \}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp \{ i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) \}}. \quad (8.6)$$

### 8.3 Calcul de la fonctionnelle génératrice

En effectuant une integration par partie sous l'hypothèse que les termes de bornes sont nuls, nous pouvons écrire

$$\int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) =$$

$$\frac{1}{2} \int d^4x \Phi(x) (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \Phi(x) \quad (8.7)$$

ou encore

$$\int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) =$$

$$\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \Phi(x) K_0(x, y) \Phi(y) \quad (8.8)$$

avec

$$K_0(x, y) = \delta^4(x - y) (-\partial^\mu \partial_\mu - m^2). \quad (8.9)$$

Nous définissons l'inverse du noyau  $K_0(x, y)$  par

$$(-\partial^\mu \partial_\mu - m^2) K_0^{-1}(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (8.10)$$

Dans ce cas nous avons

$$\int d^4y K_0(x, y) K_0^{-1}(y, z) = \int d^4y \delta^4(x - y) \delta^4(y - z) \quad (8.11)$$

et

$$\int d^4y K_0^{-1}(y, x) K_0(y, z) F(y) = \int d^4y \delta^4(x - y) \delta^4(y - z) F(y). \quad (8.12)$$

Pour calculer la fonctionnelle génératrice considérons l'intégrale

$$I_0[J] = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) + J\Phi] \right\} \quad (8.13)$$

Comme l'équation du mouvement en présence de la source peut s'écrire

$$(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \Phi(x) = -J(x) \quad (8.14)$$

dont la solution formelle est de la forme

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) - \int d^4y K_0^{-1}(x, y) J(y) \quad (8.15)$$

où  $\Phi_0(x)$  est la solution homogène, nous faisons alors le changement  $\Phi(x) \rightarrow \Phi_0(x)$  avec

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) - \int d^4z_1 K_0^{-1}(x, z_1) J(z_1) \quad (8.16)$$

$$\Phi(y) = \Phi_0(y) - \int d^4z_2 K_0^{-1}(y, z_2) J(z_2) \quad (8.17)$$

L'exposant dans l'intégrale  $I_0[J]$  peut s'écrire alors

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) K_0(x, y) \Phi(y) + i \int d^4x J(x) \Phi(x) = \\ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \left[ \Phi_0(x) - \int d^4z_1 K_0^{-1}(x, z_1) J(z_1) \right] K_0(x, y) \left[ \Phi_0(y) - \int d^4z_2 K_0^{-1}(y, z_2) J(z_2) \right] \\ + i \int d^4x J(x) \left[ \Phi_0(x) - \int d^4z_1 K_0^{-1}(x, z_1) J(z_1) \right] \end{aligned} \quad (8.18)$$

Par un simple developpement nous arrivons à

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) K_0(x, y) \Phi(y) + i \int d^4x J(x) \Phi(x) = \\ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi_0(x) K_0(x, y) \Phi_0(y) \\ - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y d^4z_1 K_0^{-1}(x, z_1) J(z_1) K_0(x, y) \Phi_0(y) \\ - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y d^4z_2 \Phi_0(x) K_0(x, y) K_0^{-1}(y, z_2) J(z_2) \\ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y d^4z_1 d^4z_2 K_0^{-1}(x, z_1) J(z_1) K_0(x, y) K_0^{-1}(y, z_2) J(z_2) \\ + i \int d^4x J(x) \Phi_0(x) - i \int d^4x \int d^4z_1 J(x) K_0^{-1}(x, z_1) J(z_1) \end{aligned}$$



Compte tenu des propriétés (8.11) et (8.12) nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) K_0(x, y) \Phi(y) + i \int d^4x J(x) \Phi(x) = \\
& \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi_0(x) K_0(x, y) \Phi_0(y) \\
& - \frac{i}{2} \int d^4x J(x) \Phi_0(x) \\
& - \frac{i}{2} \int d^4x J(x) \Phi_0(x) \\
& \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) K_0^{-1}(x, y) J(y) \\
& + i \int d^4x J(x) \Phi_0(x) \\
& - i \int d^4x \int d^4y J(x) K_0^{-1}(x, y) J(y)
\end{aligned}$$

Le résultat est donc

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) K_0(x, y) \Phi(y) + i \int d^4x J(x) \Phi(x) = \\
& \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Phi_0(x) K_0(x, y) \Phi_0(y) - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) K_0^{-1}(x, y) J(y)
\end{aligned}$$

Nous remarquons que le dernier résultat est quadratique par rapport aux champs  $\Phi_0$  est l'intégrale gaussienne sur  $\Phi_0$  donne donc une constante qui ne dépend pas de la source. Nous avons alors le fameux résultat

$$Z_0[J] = \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x, y) J(y) \right]. \quad (8.19)$$

Notons à la fin de ce paragraphe que si nous définissons

$$Z_0[\Phi] = \mathcal{N} \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right\} \quad (8.20)$$

avec

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right\}, \quad (8.21)$$

nous pouvons voir que

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\Phi Z_0[\Phi] \exp \left\{ i \int d^4x J(x) \Phi(x) \right\}. \quad (8.22)$$

$Z_0[J]$  peut alors être considérée comme une transformée de Fourier fonctionnelles et ainsi la source  $J(x)$  introduite artificiellement peut être considérée comme une variable conjuguée au champ  $\Phi(x)$ .

## 8.4 Le propagateur de Feynman

Le propagateur de Feynman  $\Delta_F(x, y)$  est par définition l'inverse du noyau  $K_0(x, y)$  et en raison de l'invariance par translations,  $\Delta_F(x, y) \equiv K_0^{-1}(x, y)$  ne dépend que de la différence

$(x - y)$ . En introduisant la transformée de Fourier  $\tilde{\Delta}_F(k)$  nous pouvons écrire

$$\Delta_F(x, y) \equiv K_0^{-1}(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_F(k) e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (8.23)$$

Alors, l'équation  $(-\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \Delta_F(x, y) = \delta^4(x - y)$  devient juste une équation algébrique  $(k^2 - m^2) \tilde{\Delta}_F(k) = 1$  avec la solution

$$\tilde{\Delta}_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.24)$$

Ici, le terme  $+i\epsilon$  est introduit pour assurer la convergence. En effet, il peut être introduit dans l'intégrale fonctionnelle en ajoutant le facteur

$$\exp \left[ -\frac{\epsilon}{2} \int d^4 x \Phi^2(x) \right], \quad \epsilon > 0. \quad (8.25)$$

Nous avons alors

$$\Delta_F(x, y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (8.26)$$

## 8.5 Fonctions de Green

En fait, tous les observables en théorie des champs peuvent être obtenus à partir des fonctions à  $n$  points ou des fonctions de Green.

Plus intéressantes en T.Q.C. sont les fonctions de Green

$$G_n^{(0)}(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | \mathcal{T} [\hat{\Phi}(x_1) \dots \hat{\Phi}(x_n)] | 0 \rangle \quad (8.27)$$

où  $|0\rangle$  désigne le vide, annihilé par tous les opérateurs d'annihilation

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad (8.28)$$

Ces fonctions de Green admettent une représentation fonctionnelle

$$G_n^{(0)}(x_1 \dots x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \exp(iS[\Phi])}{\int \mathcal{D}\Phi \exp(iS[\Phi])}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$G_n^{(0)}(x_1 \dots x_n) = \left( \frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z_0[J] \Big|_{J=0}.$$

### 8.5.1 Fonction de Green à 2 points

La fonction de Green à deux points est définie par

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2) = \left( \frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} Z_0[J] \Big|_{J=0}$$

D'abord nous calculons la première dérivée

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z_0[J] \\
&= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x, y) J(y) \right] \\
&= \frac{1}{i} \left( -\frac{i}{2} \right) \left[ \int d^4x d^4y \frac{\delta J(x)}{\delta J(x_2)} \Delta_F(x, y) J(y) + \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x, y) \frac{\delta J(y)}{\delta J(x_2)} \right] \\
&\quad \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x, y) J(y) \right] \\
&= \frac{1}{i} \left( -\frac{i}{2} \right) \left[ \int d^4x d^4y \delta(x - x_2) \Delta_F(x, y) J(y) + \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x, y) \delta(y - x_2) \right] \\
&\quad \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x, y) J(y) \right] \\
&= - \left[ \int d^4x \Delta_F(x, x_2) J(x) \right] Z_0[J]
\end{aligned}$$

En utilisons la formule de Leibniz, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} Z_0[J] \\
&= - \left( \frac{1}{i} \right) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \left[ \int d^4x \Delta_F(x, x_2) J(x) \right] Z_0[J] \right\} \\
&= i \left\{ \left[ \int d^4x \Delta_F(x, x_2) \frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} \right] Z_0[J] \right\} + i \left\{ \left[ \int d^4x \Delta_F(x, x_2) J(x) \right] \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_1)} \right\} \\
&= i \Delta_F(x_1, x_2) Z_0[J] + \left[ \int d^4x \Delta_F(x, x_1) J(x) \right] \left[ \int d^4y \Delta_F(y, x_2) J(y) \right] Z_0[J] \\
&= i \Delta_F(x_1, x_2) Z_0[J] + \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_1) \Delta_F(y, x_2) J(x) J(y) \right] Z_0[J]
\end{aligned}$$

Nous avons alors la fonction de Green à deux points

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2) = i \Delta_F(x_1, x_2). \quad (8.29)$$

### 8.5.2 Fonction de Green à 4 points

Pour la fonction de Green à 4 points nous avons

$$G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} Z_0[J] \Big|_{J=0}.$$

Suivant le paragraphe précédent, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} Z_0[J] \\
&= i \Delta_F(x_3, x_4) Z_0[J] + \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)} Z_0[J] = \\
& i \Delta_F(x_3, x_4) \left( \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} Z_0[J] \right) \\
& + \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \\
& + \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_2)} \\
& + \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_1)}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le résultat

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{i}\right)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)} Z_0[J] = \\
& (i)^2 \left[ \Delta_F(x_1, x_2) \Delta_F(x_3, x_4) + \Delta_F(x_1, x_3) \Delta_F(x_2, x_4) + \Delta_F(x_2, x_3) \Delta_F(x_1, x_4) \right] Z_0[J] \\
& + i \Delta_F(x_1, x_2) \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + i \Delta_F(x_1, x_3) \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + i \Delta_F(x_1, x_4) \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + i \Delta_F(x_2, x_3) \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + i \Delta_F(x_2, x_4) \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_3) \Delta_F(y, x_4) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + i \Delta_F(x_3, x_4) \left[ \int d^4x d^4y \Delta_F(x, x_1) \Delta_F(y, x_2) J(x) J(y) \right] Z_0[J] \\
& + \prod_{i=1}^4 \left[ \int d^4x \Delta_F(x, x_i) J(x) \right] Z_0[J]
\end{aligned}$$

Lorsque  $J = 0$  nous obtenons la fonction de Green à 4 points  $G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , qui s'exprime en fonction de  $G_2^{(0)}(x_i, x_j)$

$$G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_2^{(0)}(x_1, x_2) G_2^{(0)}(x_3, x_4) + G_2^{(0)}(x_1, x_3) G_2^{(0)}(x_2, x_4) + G_2^{(0)}(x_1, x_4) G_2^{(0)}(x_2, x_3). \quad (8.30)$$

### 8.5.3 Fonction de Green à $(2n)$ points

L'identité (6.33) conduit au théorème de Wick. Chaque fois qu'une dérivée agit sur l'exponentielle du membre de droite de (6.31), elle engendre un facteur  $\int dt \Delta(x, x_k) J(x)$ . Une autre

dérivée devra agir ultérieurement sur ce facteur, sinon le terme correspondant s'annulera dans la limite  $J = 0$ . Nous en concluons que la fonction de Green  $G^0(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est obtenue de la manière suivante : on considère tous les appariements possibles des points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n$  doit donc être pair). A chaque paire  $(x_i, x_j)$  on associe la fonction de Green  $G^0(x_i, x_j) = i \Delta_F(t_i, t_j)$ .

$$G_{2n}^{(0)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \sum_P G^{(0)}(x_1, x_2) G^{(0)}(x_3, x_4) \dots G^{(0)}(x_{2n-1}, x_{2n}). \quad (8.31)$$