جامعــة عبد الحق بن حمودة جيجــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

**قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي** **11 ديسمبر 2021**

**السـنة الأولى** **الوقت : ساعة و ربع**

**امتحـان قصير المدى "الجـبر 1"**

**<u>التمرين الأول:</u>**

**اذكر طرق الاستدلال الممكنة**

**<u>التمرين الثاني:</u>**

1) أكتب نفي القضايا التالية :

$(P_1) \quad \forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}: x^2 - xy + y^2 = 0$ .

$(P_2)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$ .

2) اكتب عكس نقيض القضايا التالية :

$(P_3) \quad \forall n \in \mathbb{N}: n^2$ زوجي $\Rightarrow n$ زوجي

$(P_4) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: (x \neq 1 \wedge y \neq 1) \Rightarrow x + y - xy \neq 1$ .

**<u>التمرين الثالث:</u>**

**باستعمال البرهان بعكس النقيض برهن القضية التالية :**

$(P) \quad A \triangle B = \emptyset \Rightarrow A = B$

حيث " $A, B$ اجزاء من مجموعة $E$ معطاة" و $\Delta$ الفرق التناظري بين المجموعات.

**<u>التمرين الرابع :</u>**

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$$

-1 برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب على $\mathbb{R}^*$ .

-2 هل الترتيب كلي ام جزئي؟ علل اجابتك

-3 هل $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$؟ علل اجابتك.

**بالتوفيق**

# الحل النموذجي للامتحان القصير للجبر 1(ديسمبر 2021)

## التمرين الأول:

طرق الاستدلال الممكنة ستة هي : 0.25*6=1.50

**1-** البرهان المباشر:لأثبات القضية : $q \Longrightarrow p$ نفرض أن $p$ صحيحة و نبرهن صحة $q$.

**2-** البرهان بالنفي: لأثبات صحة القضية $p$ نفرض أن $p$ خاطئة و نجد قضية متناقضة (صحيحة و خاطئة )

**3-** حالة بحالة :لاثبات القضية $\forall x \in E = F \cup H: P(x)$ نبرهن القضيتين $(\forall x \in F: P(x))$ و $(\forall x \in H: P(x))$

**4-** المثال المضاد لاثبات خطأ القضية $\forall x \in E: P(x)$ يكفي ايجاد $\exists \alpha \in E$ بحيث $P(\alpha)$ خاطئة :

**5-** البرهان بعكس النقيض :بما أن عكس نقيض القضية $p \Longrightarrow q$ هو $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ و هما متكافئتين اذن يكفي اثبات : $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$

**6-** البرهان بالتراجع: لاثبات القضية $(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow P_n)$ حيث $n_0 \in \mathbb{N}$ نثبت أن:

أ- صحة القضية $P_{n_0}$

ب- نفرض أن $(P_n)$ صحيحة و نبرهن صحة $(P_{n+1})$

## التمـرين الثاني:

نفي القضية $P_1$ هي : $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}: x^2 - xy + y^2 \neq 0$ 0.50

نفي القضية $P_2$ هي : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2: [x < y \wedge f(x) > f(y)]$ 1.00

عكس نقيض القضية $P_3$ هي : $\forall n \in \mathbb{N}: n$ فردي $\Rightarrow n^2$ فردي 0.50

عكس نقيض القضية $P_4$ هي : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: x + y - xy = 1 \Rightarrow (x = 1 \vee y = 1)$ 1.00

## التمـرين الثالث:

البرهان بعكس النقيض : 0.25

بما أن عكس نقيض القضية $(A \triangle B = \emptyset \Rightarrow A = B)$ هو $(A \neq B \Longrightarrow A \triangle B \neq \emptyset)$ و لدينا :

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ 0.25

$$A \neq B \Longrightarrow \exists x: (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \Longrightarrow \big(x \in (A - B)\big) \vee \big(x \in (B - A)\big) \Longrightarrow x \in A \triangle B \Rightarrow A \triangle B \neq \emptyset$$ 1.00

## التمـرين الرابع:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بــ : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$

**1-** إثبات أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب: ($\mathcal{R}$علاقة ترتيب ) $\Leftrightarrow$ ( $\mathcal{R}$ انعكاسية, ضد تناظرية, متعدية) 0.25

- ($\mathcal{R}$ انعكاسية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}x)$ و هو محقق لأن $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{N}^*$ 0.25

- ($\mathcal{R}$ ضد تناظرية) $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$ 0.25

نعلم أن العدد الوحيد في $\mathbb{N}^*$ الذي مقلوبه في $\mathbb{N}^*$ كذلك هو 1

لدينا
$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \\ y\mathcal{R} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow x = y$$ 0.75

و منه $\mathcal{R}$ علاقة ضد تناظرية.

- ($\mathcal{R}$ متعدية) $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^*)^3:: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$ 0.25

لدينا:
$$\left.\begin{array}{l} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'') \Leftrightarrow \frac{z}{y} \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x}.\frac{z}{y} = \frac{z}{x} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x\mathcal{R}z$$ 0.50

و منه اذن $\mathcal{R}$ علاقة متعدية فهي علاقة ترتيب .

**2-** لدينا ($\mathcal{R}$علاقة ترتيب كلي) $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2: x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$ و هذا غير محقق دوما 0.25

لدينا مثلا $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^* \wedge \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}^*$ فالعددين غير مرتبطين بالعلاقة و منه الترتيب جزئي و ليس كلي. 0.50

**3-** هل $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ؟. ($\mathcal{R}$علاقة تكافؤ ) $\Leftrightarrow$ ( $\mathcal{R}$ انعكاسية, تناظرية, متعدية) اذن يكفي دراسة التناظر 0.25

($\mathcal{R}$ تناظرية) $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2: x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$ و هذا غير محقق دوما 0.25

مثلا : $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}^*$لكن$\frac{2}{1} \in \mathbb{N}^*$ و منه العلاقة $\mathcal{R}$ ليست تناظرية فهي ليست علاقة تكافؤ. 0.50