

Exercices (Méthodes Itératives)

Exercice 1 :

Soient A_1 , A_2 et A_3 3 matrices définies en fonction des 3 entiers non nuls a , b et c :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ -a & 5 & 1 \\ a & 2 & b \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & b & -2 \\ b & c & b \\ 2 & -4 & c \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} c & -a & 3 \\ -1 & a & 1 \\ -a & b & 5 \end{pmatrix}$$

1. Pour chaque matrice vérifier les conditions pour lesquelles celle-ci soit à diagonale dominante ?
2. Vérifier les conditions de convergence pour les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel lorsque $a = -2$, $b = 2$ et $c = 6$.

Soient b_1 , b_2 et b_3 les vecteurs suivants :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -22 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 36 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre les systèmes $A_1X=b_1$, $A_2X=b_2$ et $A_3X=b_3$ avec les deux méthodes Jacobi et Gauss-Seidel (prendre $\varepsilon=0.05$).
4. Calculer l'erreur absolue et l'erreur relative pour chaque solution.

Exercice 2 :

1. Vérifier les conditions de convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour chacun des cas suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Que peut-on déduire ?

Réponse :

1. Diagonale dominante :

Conditions pour que A1 soit à diagonale dominante :

$$1. |a| \geq |-1| + |3| \Leftrightarrow |a| \geq 4 \text{ et}$$

$$2. 5 \geq |-a| + |1| \Leftrightarrow |-a| \leq 4 \text{ et}$$

$$3. |b| \geq |a| + |2|$$

A partir de 1 et 2 on a :

$$|a| \geq 4 \text{ et } |-a| \leq 4 \text{ donc } |a| = 4 ; \Leftrightarrow a = -4 \text{ ou } a = 4$$

$$|b| \geq 4 + 2 \Leftrightarrow |b| \geq 6 \Leftrightarrow b \leq -6 \text{ ou } b \geq 6.$$

A1 est à DD si : ($a = -4$ ou $a = 4$) et ($b \leq -6$ ou $b \geq 6$)

Conditions pour que A2 soit à diagonale dominante :

$$1. 3 \geq |b| + 2 \Leftrightarrow |b| \leq 1 \text{ et}$$

$$2. |c| \geq 2|b| \text{ et}$$

$$3. |c| \geq |2| + |-4| \Leftrightarrow |c| \geq 6$$

A partir de 1 la valeur max de $|b|$ est 1 ; si on remplace dans 2 on trouve $|c| \geq 2$; mais dans 3 $|c| \geq 6$, donc c'est cette dernière condition qu'on doit utiliser.

A2 est à DD si : ($-1 \leq b \leq 1$) et ($c \leq -6$ ou $c \geq 6$)

Conditions pour que A3 soit à diagonale dominante :

$$1. |c| \geq |-a| + 3 \Leftrightarrow |c| \geq |a| + 3 \text{ et}$$

$$2. |a| \geq 2 \Leftrightarrow (a \leq -2 \text{ ou } a \geq 2) \text{ et}$$

$$3. 5 \geq |-a| + |b| \Leftrightarrow 5 \geq |a| + |b|$$

A partir de 3 : la somme des deux valeurs (positives ou nulles $|a|$ et $|b|$) est inférieure ou égale à 5. Donc $|a| \leq 5$ et $|b| \leq 5$ aussi. Si on combine avec 2 on trouve que
($|a| \geq 2$ et $|a| \leq 5$) $\Leftrightarrow -5 \leq a \leq -2$ ou $2 \leq a \leq 5$
et $-5 + |a| \leq b \leq 5 - |a|$
 $c \leq -3 - |a|$ ou $c \geq |a| + 3$)

A3 est à DD si : ($-5 \leq a \leq -2$ ou $2 \leq a \leq 5$) et ($|b| \leq 5 - |a|$) et ($|c| \geq |a| + 3$)

2. Convergence des méthodes Jacobi et Gauss-Seidel lorsque $a = -2$, $b=2$ et $c = 6$:

D'après la question précédente on peut remarquer que seule la matrice A_3 est à diagonale dominante ; donc pour le système $A_3X=b_3$ les deux méthodes (Jacobi et Gauss-Seidel) convergent.

Résolution du système $A_3X=b_3$:

Méthode de Jacobi :

Soit $X^{(0)} = (0 \ 0 \ 0)^t$ et $\varepsilon = 0.05$ et $\text{MaxIteration} = 100$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{It}_1 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(1)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(0)}_2 - 3X^{(0)}_3) / 6 = 6 \\ X^{(1)}_2 = (2 + X^{(0)}_1 - X^{(0)}_3) / -2 = -1 \\ X^{(1)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(0)}_1 - 2X^{(0)}_2) / 5 = 3.200 \end{array} \right. & \text{It}_2 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(2)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(1)}_2 - 3X^{(1)}_3) / 6 = 4,733 \\ X^{(2)}_2 = (2 + X^{(1)}_1 - X^{(1)}_3) / -2 = -2,400 \\ X^{(2)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(1)}_1 - 2X^{(1)}_2) / 5 = 1.200 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{It}_3 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(3)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(2)}_2 - 3X^{(2)}_3) / 6 = 6,200 \\ X^{(3)}_2 = (2 + X^{(2)}_1 - X^{(2)}_3) / -2 = -2,767 \\ X^{(3)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(2)}_1 - 2X^{(2)}_2) / 5 = 2.267 \end{array} \right. & \text{It}_4 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(4)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(3)}_2 - 3X^{(3)}_3) / 6 = 5,789 \\ X^{(4)}_2 = (2 + X^{(3)}_1 - X^{(3)}_3) / -2 = -2,967 \\ X^{(4)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(3)}_1 - 2X^{(3)}_2) / 5 = 1.827 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{It}_5 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(5)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(4)}_2 - 3X^{(4)}_3) / 6 = 6,076 \\ X^{(5)}_2 = (2 + X^{(4)}_1 - X^{(4)}_3) / -2 = -2,981 \\ X^{(5)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(4)}_1 - 2X^{(4)}_2) / 5 = 2.071 \end{array} \right. & \text{It}_6 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(6)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(5)}_2 - 3X^{(5)}_3) / 6 = 5,958 \\ X^{(6)}_2 = (2 + X^{(5)}_1 - X^{(5)}_3) / -2 = -3,002 \\ X^{(6)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(5)}_1 - 2X^{(5)}_2) / 5 = 1.962 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{It}_7 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(7)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(6)}_2 - 3X^{(6)}_3) / 6 = 6,019 \\ X^{(7)}_2 = (2 + X^{(6)}_1 - X^{(6)}_3) / -2 = -2,998 \\ X^{(7)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(6)}_1 - 2X^{(6)}_2) / 5 = 2.071 \end{array} \right. & \text{It}_8 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(8)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(7)}_2 - 3X^{(7)}_3) / 6 = 5,991 \\ X^{(8)}_2 = (2 + X^{(7)}_1 - X^{(7)}_3) / -2 = -3,001 \\ X^{(8)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(7)}_1 - 2X^{(7)}_2) / 5 = 1.991 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\Delta X = (0,029 \quad 0,003 \quad 0,026) \Rightarrow \text{Max}(\Delta X) = 0,029 < \varepsilon = 0,05$$

Méthode de Gauss-Seidel :

Soit $X^{(0)} = (0 \ 0 \ 0)^t$ et $\varepsilon = 0.05$ et $\text{MaxIteration} = 100$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{It}_1 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(1)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(0)}_2 - 3X^{(0)}_3) / 6 = 6 \\ X^{(1)}_2 = (2 + X^{(1)}_1 - X^{(0)}_3) / -2 = -4 \\ X^{(1)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(1)}_1 - 2X^{(1)}_2) / 5 = 2,4 \end{array} \right. & \text{It}_2 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(2)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(1)}_2 - 3X^{(1)}_3) / 6 = 6,133 \\ X^{(2)}_2 = (2 + X^{(2)}_1 - X^{(1)}_3) / -2 = -2,867 \\ X^{(2)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(2)}_1 - 2X^{(2)}_2) / 5 = 1.893 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$It_3 : \begin{cases} X^{(3)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(2)}_2 - 3X^{(2)}_3) / 6 = 6,009 \\ X^{(3)}_2 = (2 + X^{(3)}_1 - X^{(2)}_3) / -2 = -3,058 \\ X^{(3)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(3)}_1 - 2X^{(3)}_2) / 5 = 2,019 \end{cases} \quad It_4 : \begin{cases} X^{(4)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(3)}_2 - 3X^{(3)}_3) / 6 = 6,009 \\ X^{(4)}_2 = (2 + X^{(4)}_1 - X^{(3)}_3) / -2 = -2,995 \\ X^{(4)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(4)}_1 - 2X^{(4)}_2) / 5 = 1,994 \end{cases}$$

$$It_5 : \begin{cases} X^{(5)}_1 = (36 - 2 \cdot X^{(4)}_2 - 3X^{(4)}_3) / 6 = 6,001 \\ X^{(5)}_2 = (2 + X^{(5)}_1 - X^{(4)}_3) / -2 = -3,003 \\ X^{(5)}_3 = (16 - 2 \cdot X^{(5)}_1 - 2X^{(5)}_2) / 5 = 2,001 \end{cases}$$

$$\Delta X = (0,0083 \quad 0,0086 \quad 0,0067) \Rightarrow \text{Max}(\Delta X) = 0,0086 < \varepsilon = 0,05$$

Résolution du système $A_1 X = b_1$:

Décomposition de A :

$$A_1 = D - E - F$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi :

$$M = D, N = E + F. B_j = M^{-1}N = D^{-1}(E + F)$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ -2/5 & 0 & -1/5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de B_j sont : (1,535 ; -1,132 ; -0,403)

Le rayon spectral : $\rho(B_j) = 1,535 > 1 \Rightarrow$ La méthode de Jacobi ne converge pas.

Méthode de Gauss-Seidel :

$$M=D - E, N = F. Bgs = M^{-1}N = (D - E)^{-1} * F$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 \\ -7/10 & -1/5 & 1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Bgs = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 \\ -7/10 & -1/5 & 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & -7/10 & 23/10 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de Bj sont : (0 ; -0,039 ; 2,539)

Le rayon spectral : $\rho(Bj) = 2,539 > 1 \Rightarrow$ La méthode de Gauss-Seidel ne converge pas aussi.

Résolution du système $A_2X=b_2$:

Décomposition de A :

$$A_2 = D - E - F$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi :

$$M=D, N = E + F. Bj = M^{-1}N = D^{-1}(E+F)$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Bj = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rayon spectral : $\rho(B_j) = 0,676 < 1 \Rightarrow$ La méthode de Jacobi converge pour ce système.

Résolution du système $A_2X=b_2$:

Soit $X^{(0)} = (0 \ 0 \ 0)^t$ et $\varepsilon = 0.05$ et $\text{MaxIteration} = 100$:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{It}_1 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(1)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(0)}_2 + 2X^{(0)}_3) / 3 = -0,333 \\ X^{(1)}_2 = (30 - 2X^{(0)}_1 - 2X^{(0)}_3) / 2 = 5 \\ X^{(1)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(0)}_1 + 4X^{(0)}_2) / 2 = 3,333 \end{array} \right. & \text{It}_2 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(2)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(1)}_2 + 2X^{(1)}_3) / 3 = -1,444 \\ X^{(2)}_2 = (30 - 2X^{(1)}_1 - 2X^{(1)}_3) / 2 = 4 \\ X^{(2)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(1)}_1 + 4X^{(1)}_2) / 2 = 6,778 \end{array} \right. \\
 & \dots & \\
 \text{It}_{12} : \left\{ \begin{array}{l} X^{(12)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(11)}_2 + 2X^{(11)}_3) / 3 = 0,9556 \\ X^{(12)}_2 = (30 - 2X^{(11)}_1 - 2X^{(11)}_3) / 2 = 3,027 \\ X^{(12)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(11)}_1 + 4X^{(11)}_2) / 2 = 5,012 \end{array} \right. & \text{It}_{13} : \left\{ \begin{array}{l} X^{(13)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(12)}_2 + 2X^{(12)}_3) / 3 = 0,989 \\ X^{(13)}_2 = (30 - 2X^{(12)}_1 - 2X^{(12)}_3) / 2 = 3,011 \\ X^{(13)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(12)}_1 + 4X^{(12)}_2) / 2 = 5,033 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\text{Max}(\Delta X) = 0,034 < \varepsilon = 0,05$$

Solution X = (0,9897 ; 3,0107 ; 5,0329)

Méthode de Gauss-Seidel :

$$M = D - E, \quad N = F. \quad \text{Bgs} = M^{-1}N = (D - E)^{-1} \cdot F$$

$$\begin{array}{lcl}
 M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} & M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/6 & 0 \\ -5/27 & 1/9 & 1/6 \end{pmatrix} & N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Bgs} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/6 & 0 \\ -5/27 & 1/9 & 1/6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/9 & -5/9 \\ 0 & 10/27 & -16/27 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Le rayon spectral : $\rho(\text{Bgs}) = 0,272 < 1 \Rightarrow$ La méthode de Gauss-Seidel converge pour ce système.

Résolution du système $A_2X=b_2$:

Soit $X^{(0)} = (0 \ 0 \ 0)^t$ et $\varepsilon = 0.05$ et $\text{MaxIteration} = 100$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{It}_1 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(1)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(0)}_2 + 2X^{(0)}_3) / 3 = -0,333 \\ X^{(1)}_2 = (30 - 2X^{(1)}_1 - 2X^{(0)}_3) / 2 = 5,111 \\ X^{(1)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(1)}_1 + 4X^{(1)}_2) / 2 = 6,852 \end{array} \right. & \text{It}_2 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(2)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(1)}_2 + 2X^{(1)}_3) / 3 = 0,827 \\ X^{(2)}_2 = (30 - 2X^{(2)}_1 - 2X^{(1)}_3) / 2 = 2,440 \\ X^{(2)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(2)}_1 + 4X^{(2)}_2) / 2 = 4,684 \end{array} \right. \\
 & \dots \\
 \text{It}_5 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(5)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(4)}_2 + 2X^{(4)}_3) / 3 = 1,005 \\ X^{(5)}_2 = (30 - 2X^{(5)}_1 - 2X^{(4)}_3) / 2 = 2,988 \\ X^{(5)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(5)}_1 + 4X^{(5)}_2) / 2 = 4,990 \end{array} \right. & \text{It}_6 : \left\{ \begin{array}{l} X^{(13)}_1 = (-1 - 2 \cdot X^{(5)}_2 + 2X^{(5)}_3) / 3 = 1,002 \\ X^{(13)}_2 = (30 - 2X^{(6)}_1 - 2X^{(5)}_3) / 2 = 3,003 \\ X^{(13)}_3 = (20 - 2 \cdot X^{(6)}_1 + 4X^{(6)}_2) / 2 = 5,001 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\text{Max}(\Delta X) = 0,015 < \varepsilon = 0,05$$

Solution $X = (1,0015; \ 3,0028; \ 5,0014)$

Exercice 2 :

Matrice 1 :

Jacobi :

MATRICE D' ITERATION :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & -2 & 2 \\
 -1 & 0 & -1 \\
 -2 & -2 & 0
 \end{array}$$

RAYON SPECTRAL : 0.000011

Méthode de Jacobi converge.

Gauss-Seidel :

MATRICE D' ITERATION :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & -2 & 2 \\
 0 & 2 & -3 \\
 0 & 0 & 2
 \end{array}$$

RAYON SPECTRAL

2.000000

Gauss-Seidel ne converge pas.

Matrice 2 :

Jacobi :

MATRICE D' ITERATION :

0	1/2	-1/2
-1	0	-1
1/2	1/2	0

RAYON SPECTRAL :

1.118034

Jacobi ne converge pas.

Gauss-Seidel :

MATRICE D' ITERATION :

0	1/2	-1/2
0	-1/2	-1/2
0	0	-1/2

RAYON SPECTRAL

0.500000

Gauss-Seidel converge.

Conclusion :

	Jacobi	Gauss-Seidel
Matrice 1	Converge	Ne converge pas
Matrice 2	Ne converge pas	Converge

On peut conclure qu'il n'y a pas de méthode qui est toujours meilleure que l'autre, tout dépend de la matrice étudiée.