

TD de méthode des éléments finis

EXERCICE 1 :

Soit le treillis de la figure suivante:

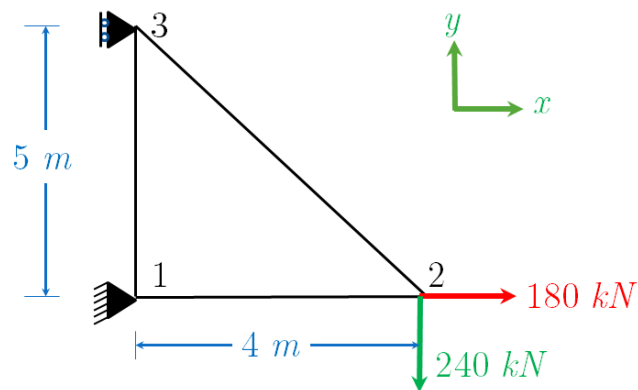


Figure 1: Shéma du treillis

L'objectif de cet exercice est de :

- Calculer les déplacements aux noeuds.
- Calculer les réactions aux noeuds 1 et 3.
- Calculer les forces intérieures dans les barres du treillis .
- Et enfin,calculer tous éléments avec la RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX .

1. Méthode des déplacements :

Elément 1-2:

La matrice de rigidité correspond à cet élément est :

$$k_{e1} = \frac{ES}{l_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad sur \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Elément 1-3 :

La matrice de rigidité correspond à cet élément est :

$$k_{e2} = \frac{ES}{l_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad sur \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Elément 2-3 :

La matrice de rigidité correspond à cet élément est :

$$k_{e3} = \frac{ES}{l_3} \begin{pmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{pmatrix}, \quad sur \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$[A] = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad et \quad \phi = \frac{3\pi}{4}$$

Puisque les barres ont une section circulaire :

$$ES = E \frac{\pi d^2}{4} = \frac{30.10^9 \cdot \pi \cdot 0.036^2}{4} = 2.1375.10^8 \text{ N}$$

Tout calculs fait ,on trouve :

$$\begin{aligned} k_{e1} &= ES \begin{pmatrix} 0.250 & -0.250 \\ -0.250 & 0.250 \end{pmatrix}, \quad sur \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ k_{e2} &= ES \begin{pmatrix} 0.200 & -0.200 \\ -0.200 & 0.200 \end{pmatrix}, \quad sur \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ k_{e3} &= ES \begin{pmatrix} 0.061 & -0.076 & -0.061 & 0.076 \\ -0.076 & 0.095 & 0.076 & -0.095 \\ -0.061 & 0.076 & 0.061 & -0.076 \\ 0.076 & -0.095 & -0.076 & 0.095 \end{pmatrix}, \quad sur \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En tenant compte les conditions aux limites, les vecteurs déplacement nodal et force nodal sont respectivement :

$$\vec{\delta} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ F_{x2} \\ -F_{y2} \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En assemblant les trois matrices k_{e1} , k_{e2} et k_{e3} , puis écrivons le système total $[K] \vec{\delta} = \vec{F}$:

$$ES \begin{pmatrix} 0.250 & 0 & -0.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.200 & 0 & 0 & 0 & -0.200 \\ -0.250 & 0 & 0.250 + 0.061 & 0.076 & 0.061 & 0.076 \\ 0 & 0 & 0.076 & 0.095 & 0.076 & 0.095 \\ 0 & 0 & 0.061 & 0.076 & 0.061 & 0.076 \\ 0 & -0.200 & 0.076 & 0.095 & 0.076 & 0.20 + 0.095 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{pmatrix}$$

ou:

$$ES \begin{pmatrix} 0.250 & 0 & -0.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.200 & 0 & 0 & 0 & -0.200 \\ -0.250 & 0 & 0.311 & 0.076 & 0.061 & 0.076 \\ 0 & 0 & 0.076 & 0.095 & 0.076 & 0.095 \\ 0 & 0 & 0.061 & 0.076 & 0.061 & 0.076 \\ 0 & -0.200 & 0.076 & 0.095 & 0.076 & 0.295 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ F_{x2} \\ -F_{y2} \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 180 \\ -240 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système réduit s'écrit :

$$ES \begin{pmatrix} 0.311 & 0.076 & 0.076 \\ 0.076 & 0.095 & 0.095 \\ 0.076 & 0.095 & 0.295 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ -240 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les réactions inconnues sont donnés par le système :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = ES \begin{pmatrix} -0.250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.200 \\ 0.061 & 0.076 & 0.076 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{-50 \times 10^3}{ES} = -0.0234 \text{ cm} \\ v_2 = \frac{-3807.681 \times 10^3}{ES} = -1.78 \text{ cm} \\ v_3 = \frac{-1247.507 \times 10^3}{ES} = -0.58 \text{ cm} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} X_1 = 12.5 \text{ kN} \\ Y_1 = 240.5 \text{ kN} \\ X_3 = -387.24 \text{ kN} \end{cases}$$

L'effort interne de chaque barre est donné par la formule :

$$N_{ij} = \frac{ES}{l_e} [(u_j - u_i) \cos \phi + (v_j - v_i) \sin \phi]$$

Soit :

- Pour la barre 1-2: $N_{12} = \frac{ES}{l_1} (u_2 - u_1) = \frac{ES}{l_1} u_2 = -12.5 \text{ kN}$
- Pour la barre 1-3: $N_{13} = \frac{ES}{l_2} (v_3 - v_1) = \frac{ES}{l_2} v_3 = -240.5 \text{ kN}$
- Pour la barre 2-3: $N_{23} = \frac{ES}{l_3} [(u_3 - u_2) \cos \phi + (v_3 - v_2) \sin \phi] = 307.350 \text{ kN}$, avec $\phi = 128^\circ.65$

2. Calcul avec la RDM :

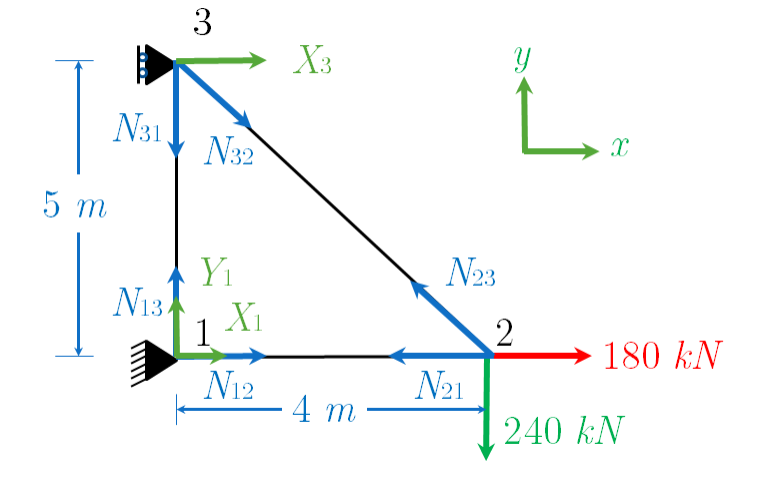


Figure 2: Equilibre des noeuds

Equilibre du noeud 2 :

$$\vec{N}_{21} + \vec{N}_{23} + 180\vec{e}_x - 240\vec{e}_y = \vec{0}$$

Soit après la projection on trouve :

$$\begin{cases} -N_{21} - N_{23} \cos \theta + 180 = 0 \\ N_{23} \sin \theta - 240 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne ,après le calcul:

$$\begin{cases} N_{23} = \frac{240}{\sin \theta} = 307.350 kN \\ N_{21} = 12 kN \end{cases}$$

Equilibre du noeud 2 :

$$\vec{N}_{12} + \vec{N}_{13} + X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y = \vec{0}$$

Soit après la projection on trouve :

$$\begin{cases} X_1 + N_{12} = 0 \\ Y_1 + N_{13} = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne ,après le calcul:

$$\begin{cases} X_1 = 12 kN \\ Y_1 = 240 kN \end{cases}$$

Equilibre du noeud 3 :

$$\vec{N}_{32} + \vec{N}_{31} + X_3\vec{e}_x = \vec{0}$$

Soit après la projection on trouve :

$$\begin{cases} X_3 + N_{32} \cos \theta = 0 \\ N_{31} + N_{32} \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne ,après le calcul:

$$\begin{cases} X_3 = 192kN \\ Y_1 = 240kN \end{cases}$$

En résumé :

$$\begin{cases} X_1 = 12 kN \\ Y_1 = 240 kN \\ X_3 = 192 kN \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_{12} = -12 kN \\ N_{13} = -240 kN \\ N_{23} = 307.350 kN \end{cases}$$

Calculs des déplacements u_2, v_2 et v_3 :

On d'après la formule de BRESSE en cas de la traction/compression:

$$\overrightarrow{u(x_1)} = \overrightarrow{u(x_0)} + \overrightarrow{\omega(x_0)} \wedge \overrightarrow{G_0 G_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{N(x)}{ES} \overrightarrow{e_x} dx$$

Après la projection ,on trouve :

$$(v(x_1) - v(x_0)) \sin \phi + (u(x_1) - u(x_0)) \cos \phi = \frac{NL}{ES}$$

Tout calculs fait , on trouve :

$$\begin{cases} u_2 = -0.0234 cm \\ v_2 = -1.78 cm \\ v_3 = -0.58 cm \end{cases}$$

3. Vérification avec le logiciel ROBOT :

On lance le logiciel ROBOT ,on choisit comme environnement de travail : Les treillis plans, puis on introduit notre treillis qui est composé de trois barre d'acier de diamètre $d = 36 mm$ et de module de YOUNG $E = 210 GPa$, on trouve des résultats très proche de ce qu'on calculé précédement soit avec la MEF ou la RDM ,les figures suivantes illustrent les résultats obtenus avec le même logiciel:

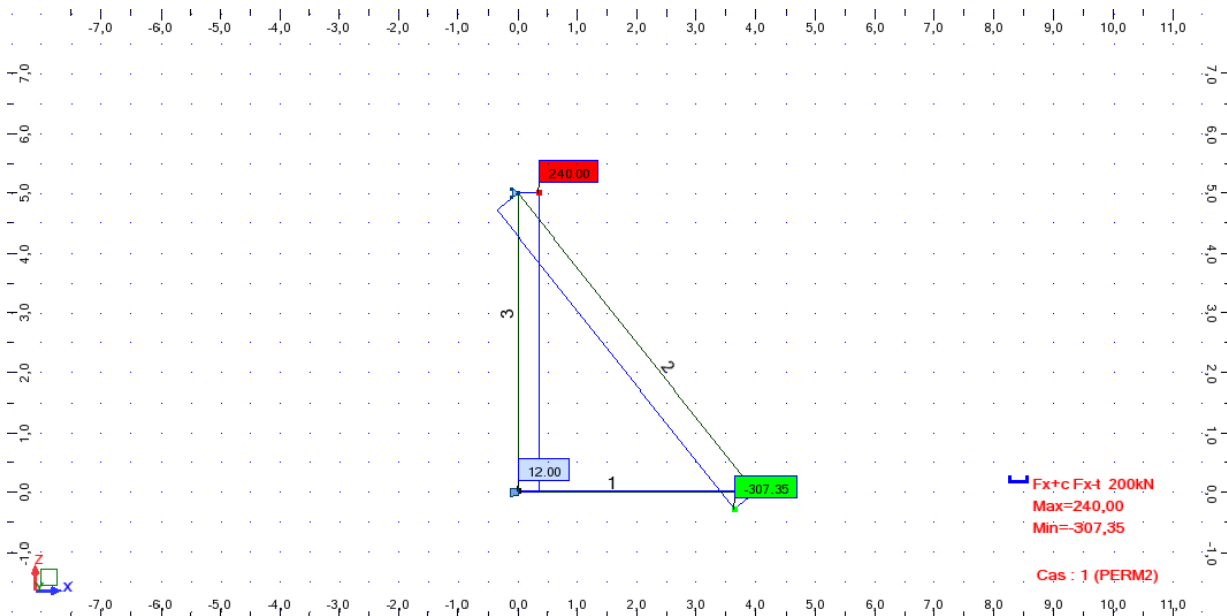


Figure 3: Diagramme de l'effort normal

Ainsi le déplacement aux nœuds, les efforts normaux et les réactions inconnus:

Réactions inconnus :

Noeud	X_i (kN)	Y_i (kN)
1	12	240
3	-192	0

Déplacement inconnus :

Noeud	u_i	v_i
1	0	0
2	-0.02	-1.8
3	0	-0.6

Efforts normaux :

Barre	N_{ij}
1 $\rightarrow$ 2	12
2 $\rightarrow$ 3	-307.35
1 $\rightarrow$ 3	240

Conclusion:

D'après ce qui précède, on trouve que les résultats sont identiques, cela due à la modélisation simple par la méthode des éléments finis. En effet, le champ déplacement approché par la MEF est identique au champ déplacement réel (Résultats confirmé aussi par le logiciel ROBOT).

NB : vous pouvez vérifier les résultats par un autre logiciel comme le SAP2000.

EXERCICE 2 :

Soit la poutre continue de la figure suivante:

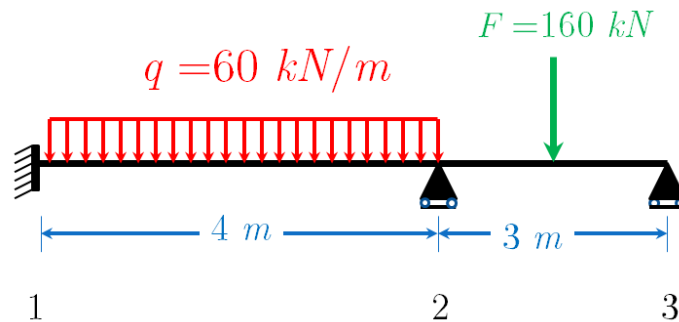


Figure 4: Schéma de la poutre continue

1. Modélisation par la MEF :Modèle à deux élément

Elément 1-2 :

$$k_{e1} = \frac{ES}{l_1^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{pmatrix} = ES \begin{pmatrix} 0.188 & 0.375 & -0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 1 & -0.375 & 0.5 \\ -0.188 & -0.375 & 0.188 & -0.375 \\ 0.375 & 0.5 & -0.375 & 1 \end{pmatrix}, \text{ sur } \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Elément 2-3 :

$$k_{e2} = \frac{ES}{l_2^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{pmatrix} = ES \begin{pmatrix} 0.444 & 0.667 & -0.444 & 0.667 \\ 0.667 & 1.333 & -0.667 & 0.667 \\ -0.444 & -0.667 & 0.444 & -0.667 \\ 0.667 & 0.667 & -0.667 & 1.333 \end{pmatrix}, \text{ sur } \begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur déplacement est donné par(En utilisant les conditions aux limites) :

$$\vec{\delta} = {}^T (v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3) = {}^T (0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_2 \quad 0 \quad \theta_3)$$

Le vecteur force nodal connu et le vecteur force inconnu sont donnés respectivement par :

$$\vec{F}_C = {}^T \left(-\frac{ql_1}{2} \quad -\frac{ql_1^2}{12} \quad -\frac{ql_1}{2} - \frac{F}{2} \quad \frac{ql_1^2}{12} - \frac{Fl_2}{8} \quad -\frac{F}{2} \quad \frac{Fl_2}{8} \right) = {}^T (-120 \quad 80 \quad -200 \quad 20 \quad -80 \quad 60)$$

et

$$\vec{F}_I = {}^T (Y_1 \quad Z_1 \quad Y_2 \quad 0 \quad Y_3 \quad 0)$$

En assemblant les deux matrices k_{e1} et k_{e2} , puis écrivons le système total $[K] \vec{\delta} = \vec{F}_C + \vec{F}_I$:

$$ES \begin{pmatrix} 0.188 & 0.375 & -0.188 & 0.375 & 0 & 0 \\ 0.375 & 1 & -0.375 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.188 & -0.375 & 0.632 & 0.292 & -0.444 & 0.667 \\ 0.375 & 0.5 & 0.292 & 2.333 & -0.667 & 0.667 \\ 0 & 0 & -0.444 & -0.667 & 0.444 & -0.667 \\ 0 & 0 & 0.667 & 0.667 & -0.667 & 1.333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ -80 \\ -200 \\ 20 \\ -80 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ Y_2 \\ 0 \\ Y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système réduit s'écrit :

$$ES \begin{pmatrix} 2.333 & 0.667 \\ 0.667 & 1.333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Les réactions inconnues et les moments sont donnés par le système :

$$\begin{pmatrix} Y_1 - 120 \\ Z_1 - 80 \\ Y_2 - 200 \\ Y_3 - 80 \end{pmatrix} = ES \begin{pmatrix} 0.375 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.292 & 0.667 \\ -0.667 & -0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{-5.013 \times 10^3}{ES} \\ \theta_3 = \frac{47.520 \times 10^3}{ES} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Y_1 = 118.120 \text{ kN} \\ Z_1 = 77.500 \text{ kN.m} \\ Y_2 = 230.231 \text{ kN} \\ Y_3 = 51.648 \text{ kN} \end{cases}$$

Diagramme du moment fléchissant :

Un calcul de RDM rapide donne l'expression du moment fléchissant :

$$M(x) = \begin{cases} -77.5 - 118.31x + 30.02x^2 & , si 0 \leq x \leq 4 \text{ Poutre1} \\ -85.10 - 108.76x & , si 0 \leq x \leq 1.5 \text{ Poutre2} \\ 77.54 + 51.74x & , si 1.5 \leq x \leq 3 \text{ Poutre2} \end{cases}$$

L'effort tranchant est donné par la formule $V(x) = -\frac{\partial M(x)}{\partial x}$, soit :

$$V(x) = \begin{cases} 118.31 - 60.08x & , si 0 \leq x \leq 4 \text{ Poutre1} \\ 108.76 & , si 0 \leq x \leq 1.5 \text{ Poutre2} \\ -51.74 & , si 1.5 \leq x \leq 4 \text{ Poutre2} \end{cases}$$

2. Modélisation par le logiciel ROBOT :

En choisit comme environnement de travail dans le logiciel ROBOT ,étude d'une portique plane ,on trouve les résultats suivants:

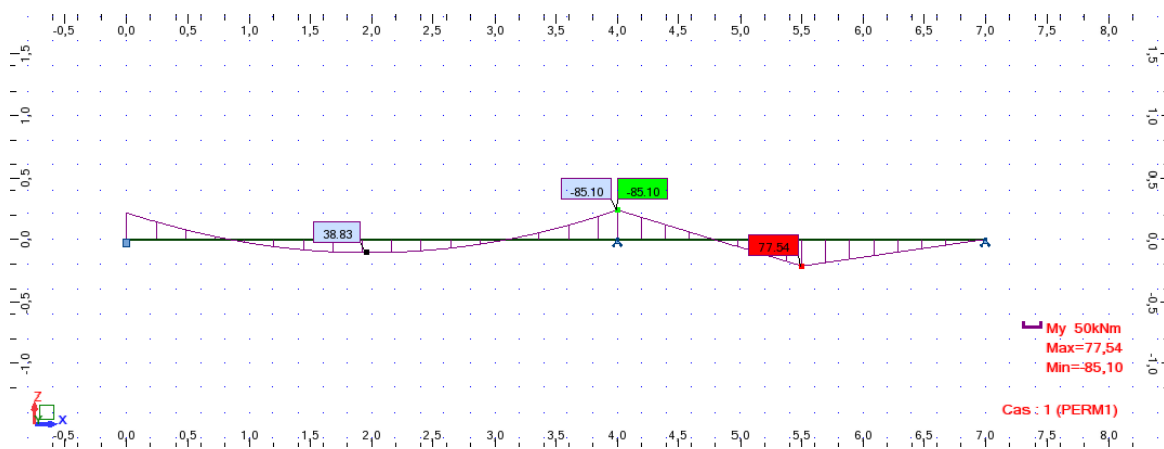


Figure 5: Diagramme du moment fléchissant obtenu par ROBOT

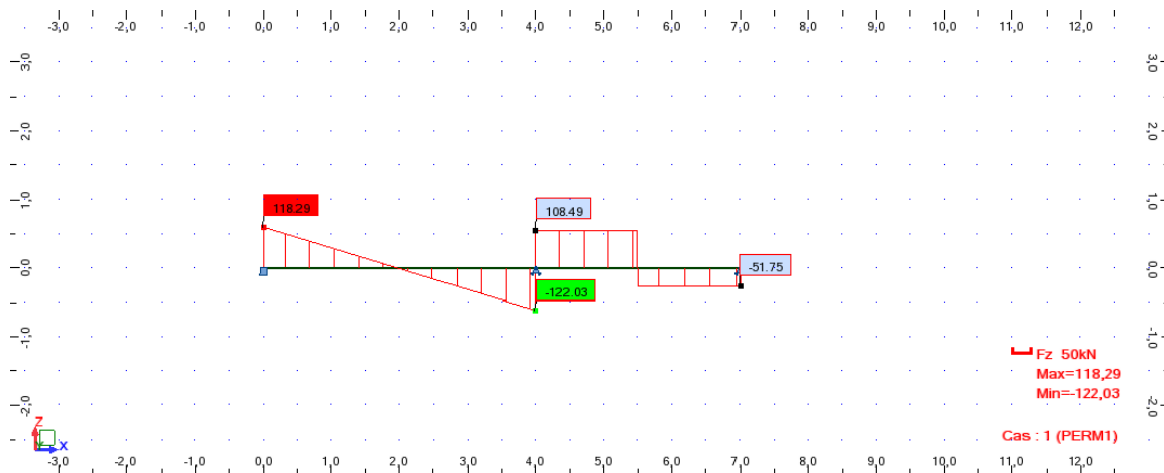


Figure 6: Diagramme de l'effort tranchant obtenu par ROBOT

Réaction : valeur

Noeud	Y_i (kN)	M_i (kN.m)
1	118.29	-77.61
2	230.52	0
3	51.75	0

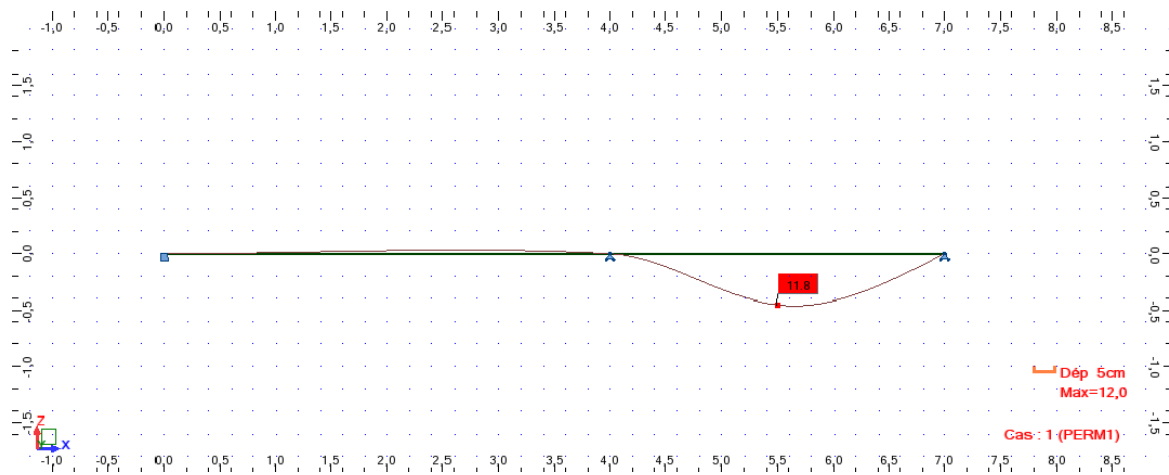


Figure 7: Diagramme de la déformée obtenu par ROBOT

Remarque : ce document est préparé par AL ABDALI Abdelhamid - EL FATHI Izdin , Ecole Hassania des travaux public .