

Chapitre 0: Rappels sur les espaces topologiques

Définition: Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . On appelle topologie sur X , toute famille $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui vérifie les conditions suivantes:

- 1) L'ensemble vide $\emptyset \in \tau$ et aussi $X \in \tau$.
- 2) Si $U_1 \in \tau$ et $U_2 \in \tau$, alors $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
- 3) Pour tout $(U_i)_{i \in I} \subset \tau$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Dans ce cas (X, τ) est appelé un espace topologique et les éléments de τ sont appelés les ouverts de cet espace.

Exemples:

- $\tau = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X , appelée topologie grossière ou triviale.
- $\tau = \mathcal{P}(X)$ " " " " " " " " discrète.
- La famille τ de tout les intervalles ouverts (et leurs réunions) est une topologie sur $\mathbb{R}$, appelée topologie usuelle.

Remarque:

- Soit (X, τ) un espace top. Un sous ensemble $F \subset X$ est dit fermé si son complémentaire est ouvert, et on a:
 - Pour tout F_1, F_2 deux fermés de X , on a $F_1 \cup F_2$ est fermé.
 - " toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X , $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé.

- Si τ_1 et τ_2 sont deux topologies sur X . On dit que τ_1 est plus fine que τ_2 (ou bien τ_2 est moins fine que τ_1) si $\tau_2 \subset \tau_1$.

Définition: (Topologie induite)

Soit (X, τ) un esp. top., $A \subset X$ une partie de X . La topologie induite par τ sur A notée τ_A est définie comme suit:

$$\tau_A = \{ \Omega \cap A, \Omega \in \tau \}$$

Définition: (Base)

Soit (X, τ) un esp. top. et B une partie de τ .

B est une base de τ si tout élément de τ s'écrit sous forme de réunion d'éléments de B .

Exemple:

1. $B = \{ \{x\}, x \in X \}$ est une base de la topologie discrète sur X .
2. $B = \{]a, b[, a, b \in \mathbb{R} \}$ " " " " " usuelle sur $\mathbb{R}$.

Définition: (Voisinage)

Soient (X, τ) un esp. top. et $x \in X$.

Un sous ensemble $V \subset X$ est dit un voisinage de x s'il existe

$\Omega \in \tau$ tel que

$$x \in \Omega \subset V.$$

On note $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous les voisinages de x .

Remarque:

- L'intersection finie de voisinages d'un point x est un voisinage de x .

- x appartient à tous ses voisinages.
- V est un ouvert ssi il est voisinage de tous ses points

Définition: (continuité)

Soit X, Y deux esp. top. et $f: X \rightarrow Y$ une application, alors f est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que

$$f(U) \subset V$$

Proposition: Soient X, Y deux esp. top. et $f: X \rightarrow Y$ une application. Alors, on a:

- f continue $\Leftrightarrow$ pour tout ouvert V (resp. fermé) de Y , $f^{-1}(V)$ est ouvert (resp. fermé) de X .
- f continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de tout élément d'une base (fixée) de Y est un ouvert de X .

Définition: Soit X, Y deux esp. top. et $f: X \rightarrow Y$ une application.

- f est dite ouverte (resp. fermée) si l'image de tout ouvert (resp. fermé) de X est un ouvert (resp. fermé) de Y .
- Une bijection $f: X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme ssi f et f^{-1} sont continues, ou d'une manière équivalente

si f est continue et ouverte (ou fermée).

et on dit que X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre X et Y et on note $X \cong Y$.