

Série de TD N°1

✓ Exercice 01: Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Montrer que la matrice A^*A est hermitienne positive.

- Montrer que

A est hermitienne $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists U \in M_n(\mathbb{K}) \text{ unitaire tq: } A = UDU^* \\ \text{ou } D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), \text{ avec} \\ d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R} \text{ sont les valeurs} \\ \text{propres de } A. \end{array} \right)$

✓ Exercice 02: 1/ Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

- Montrer que les normes subordonnées $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifient :

a) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, b) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$

2/ Calculer les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ des matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 03: Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La norme de Frobenius est définie par :

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_F$ est une norme matricielle

2. Démontrer que

$$\frac{1}{n} \|A\|_1 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

et $\frac{1}{n} \|A\|_\infty \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$

3. Calculer $\|I_n\|_F$

Est-ce que cette norme est subordonnée ?

Indication: (1) et (2) utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{k=1}^n |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 04: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible

- Exprimer les valeurs singulières de A^{-1} en fonction de celles de A .