

Série TD N°2Exo1:

On considère la matrice

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0$$

- Calculer le conditionnement de A_ε pour la norme ∞ .
- Pour quels valeurs de ε la matrice A_ε est-elle bien conditionnée?
mal conditionnée?

Exo2: On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $b \in \mathbb{R}^3$, on s'intéresse aux deux systèmes linéaires
 $Ax = b$ et $Bx = b$.

- 1- Montrer que, pour $Ax = b$, la méthode de Jacobi converge mais la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas.
- 2- Montrer, pour $Bx = b$, la méthode de Gauss-Seidel converge mais la méthode de Jacobi ne converge pas.

Exo3: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

- 1- Montrer que A est symétrique définie positive (S.D.P) si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

- Que peut-on déduire à propos de la méthode de Gauss-Seidel ?
- 2 - Montrer que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Exo 4: On considère le système $Ax=b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 - Ecrire l'itération de Gauss-Seidel pour le système.
- 2 - Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $\|e^{(k+1)}\|_{\infty} \leq \alpha \|e^{(k)}\|_{\infty}$, soit avec $(e^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite d'erreur.
 - En déduire la convergence de la suite.
- 3 - Déterminer la matrice d'itération B_{GS} et calculer $\|B_{GS}\|_{\infty}$.
 - En déduire que x^k converge vers la solution x .

Exo 5: Soit $A = \begin{pmatrix} I_2 & K \\ K & I_2 \end{pmatrix}$ une matrice par blocs, tel que

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \text{ et soit } b = (1, 1, 1, 1)^t$$

- 1 - Calculer les matrices d'itération B_J , B_{GS} et B_w .
- 2 - Donner l'expression d'itération des méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation (SOR).
- 3 - Etudier la convergence de chacune des méthodes précédentes.
- 4 - Calculer les deux premiers termes de suite itératives en utilisant la méthode de Jacobi, Gauss-Seidel et SOR pour $w = \frac{3}{2}$ avec $x^{(0)} = 0$.