

التوزيع المنتظم المستمر

يستخدم التوزيع المنتظم المستمر إذا كان المتغير العشوائي معرفاً على مجال محدد $[a, b]$ ودالة كثافته ثابتة في هذا المجال (أي أن الاحتمالات متساوية)

I. دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم المستمر (القانون الاحتمالي):

ليكن لدينا متغير عشوائي x_i خاضع (يتبع) التوزيع المنتظم المستمر، فإننا نعبر عن ذلك رياضياً بالكتابة التالية: $x_i \sim U(a, b)$ متغير عشوائي

أما دالة الكثافة الاحتمالية له، فهي تأخذ شكل العلاقة الرياضية التالية:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

بحيث:

- x : متغير عشوائي معرف على المجال $[a, b]$
- a : الحد الأدنى للمجال
- b : الحد الأعلى للمجال

II. حساب الاحتمالات:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المنتظم المستمر فإن حساب الاحتمالات يكون كالتالي:

- $p(x \leq X) = F(X) = \frac{X-a}{b-a}$.
- $p(x > X) = 1 - p(x \leq X)$
 $= 1 - F(X)$
 $p(x > X) = 1 - \left(\frac{X-a}{b-a} \right)$
- $p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
 $= \left(\frac{x_2-a}{b-a} \right) - \left(\frac{x_1-a}{b-a} \right)$
 $= \frac{x_2 - a - x_1 + a}{b-a}$
 $p(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$

ملاحظة: بالنسبة لاحتمال $p(x_1 \leq X \leq x_2)$ يجب أن يكون المجال $[x_1, x_2]$ ينتمي إلى المجال $[a, b]$.

III. القيم العددية المميزة والمقاييس الشكلية للتوزيع المنتظم المستمر:

- القيم العددية المميزة:

- $E(x) = \frac{a+b}{2}$

- $V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

ويمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي:

- $\sigma(x) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

• المقاييس الشكلية:

- $L = 0$

- $K = \frac{-6}{5}$

مثال:

ليكن سعر أحد المنتجات ينتمي إلى المجال $[210, 250]$ وحدة نقدية.

- (1) أحسب احتمال أن يكون السعر أقل من 240.
- (2) أحسب احتمال أن يكون السعر أكبر من 230.
- (3) أحسب احتمال أن يكون السعر محصور بين 230 و 240.
- (4) أحسب السعر المتوقع وتباين والانحراف المعياري له.

الحل:

- x : متغير عشوائي يمثل سعر منتج ما. $x \in [210, 250]$

$$x_i \sim U(210, 250)$$

• حساب احتمال أن يكون السعر أقل من 240:

$$p(x < 240) = F(240) = \frac{240-210}{250-210}.$$

$$p(x < 240) = 0.75$$

- حساب احتمال أن يكون السعر أكبر من 230:

$$\begin{aligned} p(x > 230) &= 1 - p(x \leq 230) \\ &= 1 - F(230) \\ &= 1 - \left(\frac{230 - 210}{250 - 210} \right) \end{aligned}$$

$$p(x > X) = 0.25$$

- حساب احتمال أن يكون السعر محصور بين 230 و240:

$$\begin{aligned} p(230 \leq X \leq 240) &= F(240) - F(230) \\ &= \frac{240 - 230}{250 - 210} \end{aligned}$$

$$p(230 \leq X \leq 240) = 0.25$$

- حساب التوقع، التباين والانحراف المعياري للسعر:

$$\bullet E(x) = \frac{a+b}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{210+250}{2} = 230$$

$$\bullet V(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(250-210)^2}{12} = 133.33$$

$$\bullet \sigma(x) = \sqrt{133.33} = 11.547$$

توزيع الأسّي:

هو أيضا من التوزيعات الاحتمالية المستمرة. وله علاقة بالتوزيع البواسوني فإذا كان التوزيع البواسوني هو توزيع الذي يتبعه المتغير الذي يمثل عدد مرات تكرار الحدث خلال فترة زمنية معينة، فإن المتغير الذي يمثل الفترة الزمنية بين الأحداث (أو مدة كل حدث) هو يتبع التوزيع الأسّي.

1. دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسّي:

إذا كان لدينا متغير عشوائي x يتبع التوزيع الأسّي، فإننا نعبر عن ذلك رياضيا بالكتابة التالية:

$$x_i \sim \text{Exp}(\theta)$$

أما دالة كثافته الاحتمالية (القانون الاحتمالي) فتعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}, \quad x \geq 0$$

بحيث:

- x : متغير عشوائي معرف على المجال $[0, +\infty[$

- θ : عبارة عن عدد ثابت ويمثل معلمة التوزيع.

- e : أساس الدالة الأسية ($e = 2.71828$)

II. حساب الاحتمالات:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع الأسّي فإن حساب الاحتمالات يكون من خلال حساب التكاملات

كالتالي:

$$\begin{aligned} \bullet \quad p(x \leq k) &= \int_0^k f(x) dx \\ &= \int_0^k \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^k e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \\ &= \frac{1}{\theta} \left[-\theta e^{-\frac{1}{\theta}x} \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta}k} \right) - \left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta}0} \right) \right] \\ &= -e^{-\frac{1}{\theta}k} + 1 \end{aligned}$$

$$p(x \leq k) = 1 - e^{-\frac{k}{\theta}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad p(x \geq k) &= \int_k^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_k^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \\ &= \frac{1}{\theta} \int_k^{+\infty} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \\ &= \frac{1}{\theta} \left[-\theta e^{-\frac{1}{\theta}x} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[\left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta} + \infty} \right) - \left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta} k} \right) \right]$$

$$p(x \geq k) = e^{-\frac{k}{\theta}}$$

- $p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
 $p(x_1 \leq X \leq x_2) = p(x \leq x_2) - p(x \leq x_1)$

III. القيم العددية المميزة للتوزيع الأسّي:

إذا كان x متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسّي: $Exp(\theta)$ فإن:

- $E(x) = \theta$
- $V(x) = \theta^2 \Rightarrow \sigma(x) = \theta$

مثال:

إذا كانت مدة حياة نوع من المركبات الإلكترونية تأخذ شكل التوزيع الأسّي بمتوسط مقداره 6 سنوات،

أحسب:

- (1) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني لمدة أربع سنوات على الأقل.
- (2) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني تسع سنوات على الأكثر.
- (3) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني 12 ساعة على الأقل علماً أنه عمل ثلاث سنوات على الأقل.

الحل:

- x_i : متغير عشوائي يمثل مدة حياة مركب إلكتروني معين.

لدينا من المعطيات: $x_i \sim Exp(\theta)$ ، ومن المعطيات أيضاً: $E(x) = 6$

ونعلم أن $E(x) = \theta$ ومنه: $\theta = 6$

إذن: $x_i \sim Exp(6)$

- (1) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني لمدة أربع سنوات على الأقل:

$$p(x \geq k) = e^{-\frac{k}{\theta}}$$

$$p(x \geq 4) = e^{-\frac{4}{6}} = 0.5134$$

(2) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني تسع سنوات على الأكثر:

$$p(x \leq k) = 1 - e^{-\frac{k}{\theta}}$$

$$p(x \leq 9) = 1 - e^{-\frac{9}{6}} = 0.7769$$

(3) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني 12 ساعة على الأقل علما أنه عمل ثلاث سنوات على الأقل:

$$\begin{aligned} p(x \geq 12/x \geq 3) &= \frac{p(x \geq 12 \cap x \geq 3)}{p(x \geq 3)} \\ &= \frac{p(x \geq 12)}{p(x \geq 3)} \\ &= \frac{e^{-\frac{12}{6}}}{e^{-\frac{3}{6}}} = 0.2231 \end{aligned}$$

مثال:

مدة انتظار حافلة للنقل الجامعي في صف الانتظار تشكل متغيرا عشوائيا له دالة كثافة احتمالية كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x}, \quad x \geq 0$$

(1) أحسب احتمال أن تنتظر الحافلة على الأقل ست دقائق.

(2) أحسب احتمال أن تنتظر الحافلة ما بين 10 و 20 دقيقة.

(3) أحسب متوسط وقت الانتظار.

الحل:

x_i : متغير عشوائي يمثل مدة انتظار الحافلة.

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow x_i \sim \text{Exp}(4)$$

(1) حساب احتمال أن تنتظر الحافلة على الأقل ست دقائق:

$$p(x \geq k) = e^{-\frac{k}{\theta}}$$

$$p(x \geq 6) = e^{-\frac{6}{4}} = 0.2231$$

(2) حساب احتمال أن تنتظر الحافلة ما بين 10 و 20 دقيقة:

$$\begin{aligned}
 p(10 \leq X \leq 20) &= F(20) - F(10) \\
 &= p(x \leq 20) - p(x \leq 10) \\
 &= \left(1 - e^{-\frac{20}{4}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{10}{4}}\right) \\
 &= e^{-\frac{10}{4}} - e^{-\frac{20}{4}} \\
 &= e^{-\frac{10}{4}} - e^{-\frac{20}{4}} \\
 &= 0.0821 - 0.0067
 \end{aligned}$$

$$p(10 \leq X \leq 20) = 0.0754$$

(3) حساب متوسط وقت الانتظار:

$$E(x) = \theta \quad \Rightarrow \quad E(x) = 4$$