

يمكن لبعض التوزيعات المتقطعة أن تعطي نتائج مقاربة مع توزيعات متقطعة أخرى مع سهولة أكثر في الاستخدام وذلك في ظل توفر شروط معينة.

تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع البواسوني

أ. شروط تقريب التوزيع الثنائي إلى البواسوني:

نفترض لدينا المتغير العشوائي x_i خاضع للتوزيع الثنائي أي $x_i \sim B(n, p)$. إذا كانت n كبيرة بشكل كافٍ و p صغيرة جداً فإنه يمكن تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع البواسوني. وعموماً يمكن التقريب إذا تحققت الشروط بالصيغة العددية التالية:

$$\left. \begin{array}{l} n \geq 50 \text{ (أو 30)} \\ p \leq 0.1 \\ np < 15 \end{array} \right\} \Rightarrow B(n, p) \approx P(\lambda = n \cdot p)$$

أي أن معلمة التوزيع البواسوني الذي تم التقريب إليه يتم حسابها انطلاقاً من معالم التوزيع الثنائي الذي تم التقريب منه بحيث $\lambda = n \cdot p$:

II. مثال

مصنع لإنتاج الأقلام 2% من إنتاجه غير صالح، نسحب عشوائياً 100 قلم. المطلوب:

(1) أحسب احتمال وجود ثلاث أقلام غير صالحة في العينة المسحوبة.

الحل:

- x_i : متغير عشوائي يمثل عدد الأقلام غير الصالحة ضمن العينة المسحوبة. وعليه:

$$x_i = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$$

الاحتمال المطلوب حسابه هو: $p(x = 3)$

واضح من المعطيات أن: $(x_i \sim B(n = 100, p = 0.02))$ (لأن التجربة مكررة 100 مرة).

كل تجربة تعطي نتيجتين: نجاح يمثل سحب قلم غير صالح وذلك باحتمال قدره $p = 0.02$ وفشل يمثل سحب قلم صالح باحتمال قدره $q = 0.98$. واستقلالية التجارب).

وبالتالي يمكن حساب الاحتمال بالقانون الاحتمالي للتوزيع الثنائي كالتالي:

$$p(x = 3) = C_{100}^3 (0.02)^3 (0.98)^0 = 0.1822$$

نلاحظ أن حساب الاحتمالات ستصبح عملية شاقة خاصة من أجل قيم x الكبيرة. كما نلاحظ أن شروط

التقريب إلى التوزيع البواسوني محققة:

$$\left. \begin{array}{l} n = 100 \geq 50 \\ p = 0.02 \leq 0.1 \\ np = 2 < 15 \end{array} \right\} \Rightarrow B(100, 0.02) \approx P(\lambda = 2)$$

وبالتالي يمكن حساب الاحتمالات باستخدام التوزيع البواسوني:

$$p(x = X) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^X}{X!}$$

$$p(x = 3) = \frac{e^{-2} \times 2^3}{3!} = 0.1804$$

نلاحظ أن التوزيع البواسوني أعطى نتيجة مقاربة مع التوزيع الثنائي. كما أن استعماله يصبح أكثر سهولة مقارنة مع التوزيع الثنائي من أجل قيم x الكبيرة.

تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي

يمكن للتوزيع فوق الهندسي أن يعطي نتائج مقاربة مع التوزيع الثنائي في ظل توفر شروط معينة .

1. شروط تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى الثنائي:

نعلم أنه إذا كان لدينا مجتمع يتكون من N عنصر، به M عنصر يحقق خاصية معينة مراد دراستها، ونقوم بسحب عينة حجمها n فإن المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد العناصر التي تحقق الخاصية المراد دراستها ضمن العينة المسحوبة يتبع التوزيع فوق الهندسي، ونعبر عن ذلك رياضياً بالكتابة

$$x_i \sim g(N, M, n) \quad \text{التالية:}$$

ويكون متوسط التوزيع فوق الهندسي:

$$E(x) = np$$

$$V(x) = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

لاحظ أنه إذا كانت N كبيرة جداً مقارنة مع n فإن المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ سيؤول إلى الواحد، وبالتالي

يصبح التباين $V(x) = npq$ وهو نفسه قانون التباين للتوزيع الثنائي.

ومنه نستنتج أنه: يمكن تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي إذا كان المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

يؤول إلى الواحد، وعموماً يضع الإحصائيين العلاقة بين N و n في العبارة التالية: $\frac{n}{N} \leq 0.05$ كشرط

لتقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي. ونكتب:

$$g(N, M, n) \approx B\left(n, p = \frac{M}{N}\right)$$

II. مثال:

توضب إحدى المؤسسات المختصة في إنتاج جوارب الأطفال منتجاتها في صناديق يحتوي الصندوق الواحد على 100 زوج من الجوارب 60 منها للذكور و 40 للإناث. سحب مراقب الجودة عشوائيا وبدون إرجاع ثلاث أزواج من الجوارب لفحصها.

(1) أحسب احتمال الحصول على زوجين من جوارب الذكور.

الحل:

- x_i : متغير عشوائي يمثل عدد أزواج جوارب الذكور المسحوبة ضمن العينة.

$$x_i = \{0, 1, 2, 3\}$$

واضح من المعطيات أن: $(g(N = 100, M = 60, n = 3)) \sim x_i$ (لأن التجربة مكررة أكثر

من مرة، كل تجربة تعطي نتيجتين والسحب بدون إرجاع).

$$p(x = X) = \frac{C_M^X \times C_{N-M}^{n-X}}{C_N^n} = \frac{C_{60}^X \times C_{40}^{3-X}}{C_{100}^3} \quad \text{وبالتالي فالقانون الاحتمالي هو:}$$

$$p(x = 2) = \frac{C_{60}^2 \times C_{40}^1}{C_{100}^3} \quad \text{والاحتمال المطلوب حسابه هو:}$$

نلاحظ وجود مشقة في حساب هذا الاحتمال باستخدام القانون فوق الهندسي، ونلاحظ أيضا أن شرط

التقريب إلى التوزيع الثنائي محقق حيث:

$$\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0.03 \leq 0.05$$

ومنه:

$$g(N, M, n) \approx B\left(n, p = \frac{M}{N}\right)$$

$$g(100, 60, 3) \approx B\left(3, p = \frac{60}{100} = 0.6\right)$$

ومنه يمكن حساب الاحتمال المطلوب باستخدام قانون التوزيع الثنائي كالتالي:

$$p(x = X) = C_n^X p^X q^{n-X}$$

$$p(x = 2) = C_3^2 (0.6)^2 (0.4)^1$$

$$p(x = 2) = 0.432.$$