

# Résumé de cours: Systèmes dynamiques et contrôle optimal

# Chapitre 1: Systèmes dynamiques abstraits, lien avec les équations différentielles, équations d'évolution.

De manière générale, une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction  $x$  dépendant d'une variable  $t$ , qui fait intervenir  $x$  et certaines de ses dérivées  $x'$ ,  $x''$ , etc., et éventuellement la variable  $t$ .

Résoudre l'équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle, qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

**Définition 1.0.1** *Une condition initiale est une relation du type  $x(t_0) = x_0$ , qui impose la valeur  $x_0$  de la fonction inconnue en un point  $t_0$ .*

## 1.1 Équation différentielle du premier ordre

**Définition 1.1.1** *Une équation différentielle du premier ordre est une équation qui met en jeu une relation entre une fonction et sa dérivée et dont la solution est dérivable. La variable pour la fonction  $X$  est  $t$  (le temps), car une équation différentielle modélise parfois l'évolution d'un système (par exemple l'évolution de la taille d'une population).*

Soit l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{X} = F(t, X), \quad \text{pour } (t, X) \in I \times \Omega.$$

Une équation différentielle a, en général, une infinité de solutions. Pour en préciser une, on se donne la valeur  $X(t_0)$  de  $X$  à l'instant  $t_0$  (souvent égal à 0) choisi.

**Définition 1.1.2** *Étant donné une équation différentielle du premier ordre sous la forme  $\dot{X} = F(t, X)$  pour  $(t, X) \in I \times \Omega$  et un point  $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$ , le problème de Cauchy correspondant est la recherche de solutions  $X$  telles que  $X(t_0) = X_0$ .*

**Définition 1.1.3** *Soit le problème*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

1. *Une solution locale est la donnée d'un couple  $(J, X)$  où  $J$  est un intervalle contenant  $t_0$ ,  $J \subseteq I$ , pour tout  $t \in J$ , on a  $X \in \mathcal{C}^1(J)$ ,  $X(t_0) = X_0$  et  $\dot{X}(t) = F(t, X(t))$ .*
2. *Soient  $(J_1, X_1)$  et  $(J_2, X_2)$  deux solutions locales. On dit que  $(J_2, X_2)$  est un prolongement de  $(J_1, X_1)$  si  $J_1 \subset J_2$  et  $X_2|_{J_1} = X_1$ . Le prolongement est strict si  $J_1 \neq J_2$ .*
3. *Une solution locale est maximale si elle n'admet pas de prolongement strict.*
4. *Une solution  $(J, X)$  est globale si elle est une solution locale et si  $J = I$ .*

**Théorème 1.1.1** (*Théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et unicité de la solution*) Soit  $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue et localement lipschitzienne en  $X$ .

Alors, pour toute condition initiale  $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$ , il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

**Théorème 1.1.2** Soit  $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction  $k : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$  continue telle que tout  $t \in I$ , l'application  $X \longmapsto F(t, X)$  est lipschitzienne de rapport  $k(t)$ . Alors, toute solution maximale du problème

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

est globale.

**Définition 1.2.1** 1. *Un système dynamique est un système d'équations différentielles de la forme*

$$\dot{X} = F(t, X, \alpha) \tag{1.1}$$

*où  $t \in I \subset \mathbb{R}_+$  est le temps,  $X : t \in I \mapsto X(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , sont les degrés de liberté du système,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\alpha \in V \subset \mathbb{R}^m$  est un ensemble de paramètres et  $F$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .*

2. *Un système dynamique discret est un système d'équations aux différences*

$$X_{k+1} = G(X_k, \alpha),$$

*où  $k \in \mathbb{N}$  représente le temps discrétisé,  $X_k \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  sont les degrés de liberté du système,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases, et  $\alpha \in V \subset \mathbb{R}^m$  est un ensemble de paramètres.*

## 1.4 Flots, orbites, portrait de phases

Soit le système dynamique autonome

$$\dot{X} = F(X), \quad X(0) = X_0, \quad (1.2)$$

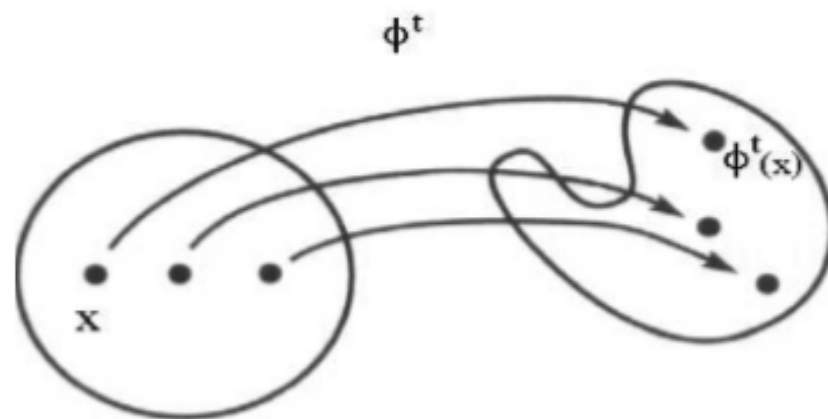
où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé champ de vecteurs et est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Ce système admet une solution maximale unique (par Théorème 1.1.1) définie sur un intervalle  $I_{X_0}$  à valeurs dans  $\Omega$ . Cette solution est appelée trajectoire du champ de vecteurs  $F$ .

**Définition 1.4.1** (*Flot*) On appelle flot du système (1.2), la famille d'applications

$$\phi_t : X_0 \mapsto X(X_0, t),$$

où  $X(X_0, t)$  est la solution du système dynamique passant par  $X_0$  à l'instant  $t_0 = 0$ . Autrement dit, étant donné un point (matériel) en  $X$  de l'espace des phases, le flot du système permet de préciser la position  $\phi_t(X)$  du point  $X$  après un déplacement d'une durée  $t$ .



**Remarque 1.4.1** *Pour  $t$  fixé, le flot est représentatif de la manière dont l'application  $X(X_0, t)$  fait évoluer un ensemble donné de points  $X_0$  dans l'espace des phases.*

**Exemple 1.4.1** *Si  $F$  est linéaire,  $F(X) = AX$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors le flot est donné par l'exponentielle de  $A$*

$$\phi_t(X) = e^{tA}X, \quad \forall (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

**Proposition 1.4.1** (*Propriétés du flot*)

- (1)  $\phi_t(X_0)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- (2)  $\phi_0(X_0) = X_0$  ( $\phi_0 = I_d$ )
- (3)  $\phi_{t+s}(X_0) = \phi_t(\phi_s(X_0))$  ( $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$ ) (loi de composition)
- (4)  $\phi_t$  est un semi-groupe.

**Définition 1.4.2** (*Orbite*) On appelle orbite d'un point  $X_0 \in \Omega$  (ou trajectoire passant par  $X_0$ ) l'ensemble

$$\mathcal{O}_{X_0} = \{\phi_t(X_0) : t \in I_{X_0}\}.$$

Autrement dit, l'orbite de  $X_0$  est la courbe tracée sur  $\mathbb{R}^n$  par la solution maximale unique de (1.2) passant par  $X_0$  en  $t = 0$ .

**Remarque 1.4.2** (1) Deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser.

(2) Tout point de  $\Omega$  appartient à une et une seule orbite.

(3) Si  $\mathcal{O}_{X_0} = \{X_0\}$  : un tel point vérifie nécessairement  $F(X_0) = 0$ , c'est ce que l'on appelle un point d'équilibre.

**Définition 1.4.3** (*Portrait de phases*)

Une partition de  $\Omega$  en orbites s'appelle le portrait de phases du champ de vecteurs.

**Définition 4:** Un point singulier (ou point d'équilibre) du champ de vecteurs  $X = (f_i)_{i=1}^n$  est un point  $p \in U$  où toutes les composantes du champ s'annulent simultanément :

$$\forall i \in [1, n], f_i(p) = 0 \Leftrightarrow X(p) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

**Définition 5:** Deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme  $h$  qui envoie les orbites de  $X$  sur celles de  $Y$  en préservant leur orientation par le temps. Ainsi, si  $X$  est défini sur  $U$  et si on note  $\phi(t, x)$  et  $\psi(t, x)$  les flots de  $X$  et  $Y$  respectivement, alors

$$\forall x \in U, \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in ]0, \delta[, \exists t' \in ]0, \varepsilon[, h(\phi(t, x)) = \psi(t', h(x))$$

**Théorème:** . Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$  défini sur un ouvert  $U$  et  $p \in U$ . On suppose que la demi-orbite positive  $\Gamma^+(p) = \{\phi(t, p) | t \geq 0\}$  est contenue dans un compact  $K \subset U$ . Alors  $w(p)$  est non vide, compact connexe et invariant par le flot.

**Définition:** Une orbite périodique d'un champ de vecteurs  $X$  est une orbite  $\{x(t)|t \in \mathbb{R}\}$  ne contenant pas de point singulier de  $X$ , et telle qu'il existe un réel  $T > 0$  appelé période vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t + T) = x(t) . \quad (1.10)$$

Une telle orbite  $\Gamma$  contenant un point  $x_0$  est donc entièrement définie par

$$\Gamma = \phi_{[0, T[}(x_0) = \{\phi_t(x_0)|t \in [0, T[ \} = \{x(t)|t \in [0, T[ \}.$$

Une orbite périodique isolée est appelée un cycle limite.

La période minimale de l'orbite est le plus petit nombre réel positif  $T$  qui satisfait la condition (1.10). Les multiples de la période minimale sont aussi des périodes. Sans autre précision, on appelle "période d'une orbite" sa période minimale et "orbite  $T$ -périodique" une orbite de période minimale  $T$ .

**Lemme 1. (Gronwall)**

Soit  $\varphi$  une fonction continue, positive, définie sur un intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . On suppose qu'il existe des constantes réelles  $a, b, c$  avec  $a > 0$  telles que, pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,

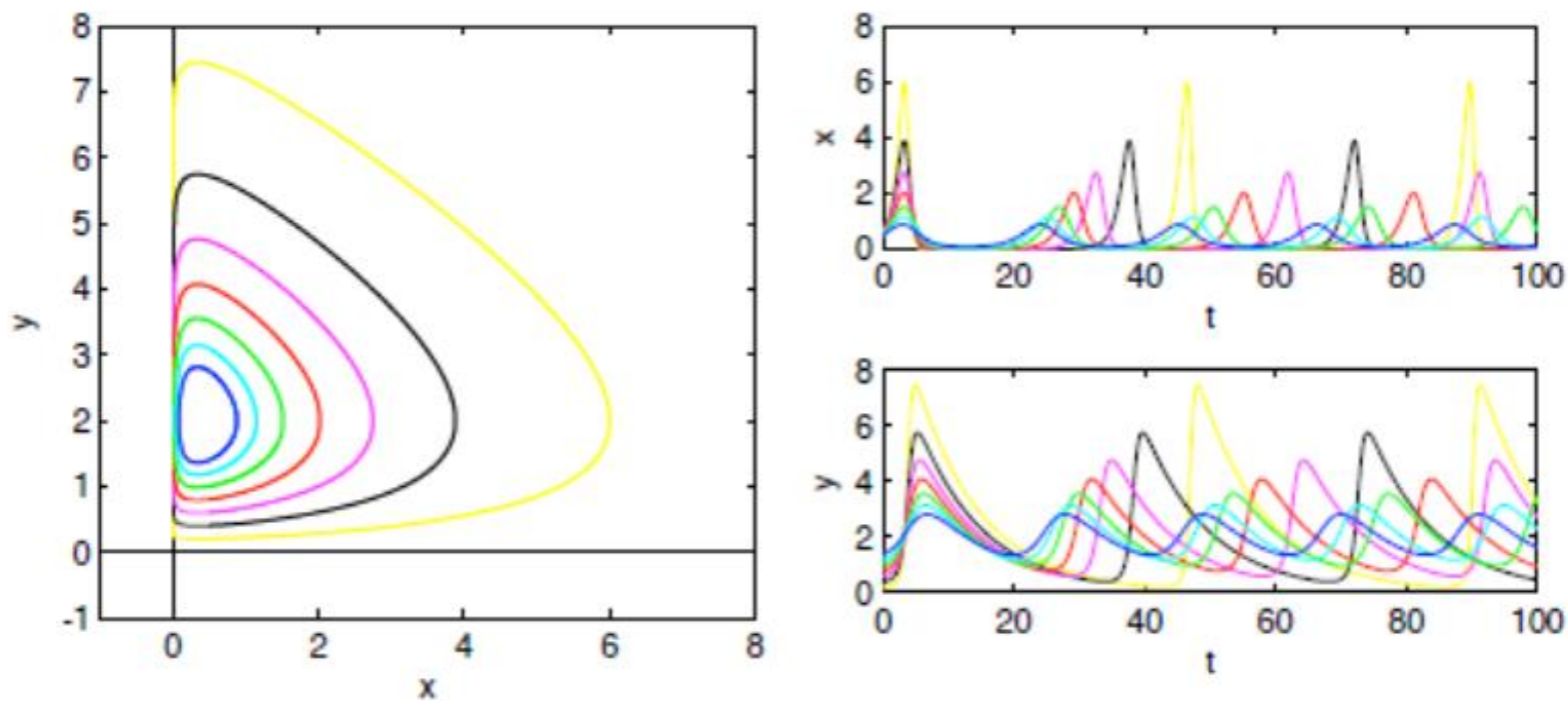
$$\varphi(t) \leq a \int_{t_0}^t \varphi(s) ds + b(t - t_0) + c.$$

Alors, pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,

$$\varphi(t) \leq \left( \frac{b}{a} + c \right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}.$$

## Example

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - by), \\ \dot{y} &= y(-c + dx).\end{aligned}$$



Exercice    *Soit le système le système dynamique non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y^2(t) \\ \dot{y}(t) = -3y(t) \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} x(0) = C_1 \\ y(0) = C_2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

où  $C_1, C_2$  deux constants réels.

1) Déterminer le flot  $\Phi_t$  du système (5.3).

2) Montrer que l'ensemble :

$$S = \left\{ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, C_1 = -\frac{C_2^2}{8} \right\}$$

## Exercice

On considère le système non-linéaire de la forme  $\dot{X} = F(X)$ ,  $X = (x, y) \in$

$\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 2 \sin t \\ \dot{y}(t) = y(t) + (t + 1)e^t \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale de ce système.
2. Déterminer les trajectoires et le flot du champ de vecteurs du système.

*b). 1)*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 \\ \dot{y} = -3y \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x_0 = c_1 \\ y_0 = c_2 \end{cases}$$

*donc  $\dot{y} = -3y \Rightarrow y(t) = \alpha_2 e^{-3t} \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-3t}$  car  $y_0 = c_2$*

*er  $\dot{x} = 2x + y^2$  on obtien la solution homogène  $x_h$  alors*

*$\dot{x} = 2x \Rightarrow x_h = \alpha_1 e^{2t}, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ , on cherche la solution générale,*

*la solution particulière est  $x_p = -\frac{c_2^2}{8} e^{-6t}$ .*

*Donc la solution générale est  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$*

$$x(t) = (c_1 + \frac{c_2^2}{8})e^{2t} - \frac{c_2^2}{8}e^{-6t}.$$

*Alors le flot  $\Phi$  du système (5.3) est*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + \frac{c_2^2}{8})e^{2t} - \frac{c_2^2}{8}e^{-6t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

2)  $S$  est un ensemble invariant

$$c_1 = -\frac{c_2^2}{8} \Rightarrow x(t) = -\frac{c_2^2}{8}e^{-6t} \Rightarrow x(t) = -\frac{y^2(t)}{8},$$

donc  $\Phi_t(S) \subset S$  alors  $S$  un ensemble invariant par  $\Phi$ .

## Chapitre 2: Stabilité, fonctions de Lyapunov et principe de Lasalle.

Soit le système autonome suivant

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $F \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ .

## 2.1 Point fixe ( Equilibre):

**Définition 2.1.1** *On appelle point fixe, ou point stationnaire ou point critique ou point d'équilibre tout point  $\overline{X}$  de l'espace des phases tel que  $F(\overline{X}) = 0$ .*

**Exemple 2.1.1** *Le système autonome suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - 1 \\ \dot{y} = y - 1, \end{cases}$$

*admet un seul point d'équilibre  $(0, 1)$ .*

La question de la stabilité se pose de la façon suivante :  
Si on écarte le système de sa position d'équilibre y reviendra-t-il?  
ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement  
de son régime stationnaire peut avoir des conséquences  
importantes et être amplifiée au cours du temps?

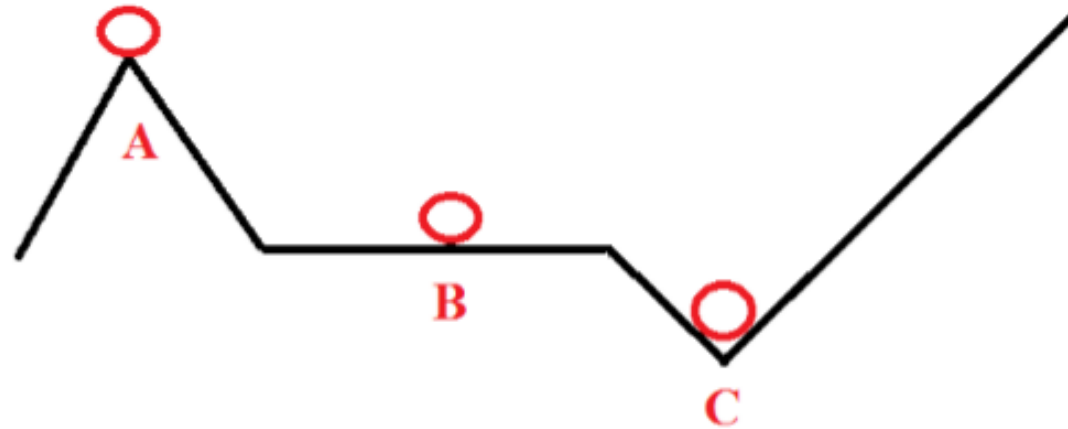


Figure 1: A) Instable B) localement stable C) Asymptotiquement stable.

## 2.2 Stabilité :

**Définition 2.1.2** (*Stabilité*) L'équilibre  $\bar{X}$  est dit stable (au sens de Lyapunov) si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute condition initiale  $X_0 \in B(\bar{X}, \eta)$ , la solution de (S) est définie au moins sur  $[t_0, +\infty[$  et vérifie  $\|X(t) - \bar{X}\| < \epsilon$ ,  $\forall t \in [t_0, +\infty[$ , i.e.,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \|\bar{X} - X_0\| < \eta \implies \sup_t \|X(t) - \bar{X}\| < \epsilon.$$

**Définition 2.1.3** (*Stabilité asymptotique*) L'équilibre  $\bar{X}$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si de plus, il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute condition initiale  $X_0 \in B(\bar{X}, \eta)$ , la solution de (S) converge vers  $\bar{X}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , i.e.,

$$\exists \eta > 0 : \|\bar{X} - X_0\| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \bar{X}.$$

Dans ce cas,  $\bar{X}$  est dit attractif.



FIGURE 2.1 – Stabilité (à gauche) Stabilité asymptotique (à droite)

**Définition 2.1.4** (*Bassin d'attraction*) Soit  $\overline{X}$  un équilibre asymptotiquement stable. On appelle bassin d'attraction l'ensemble des points  $X \in \Omega$  tels que  $\phi_t(X) \rightarrow \overline{X}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Par définition de la stabilité asymptotique, le bassin d'attraction contient un voisinage de  $\overline{X}$ .

**Définition 2.1.5** (*Instabilité*) L'équilibre  $\overline{X}$  est dit instable ou répulsif s'il n'est pas stable.

**Remarque 2.1.1** (a) Si  $\overline{X}$  est dit asymptotiquement stable, alors il est stable.  
(b) Lorsque  $\overline{X}$  est dit asymptotiquement stable, on dit que le système oublie sa condition

## 2.3 Méthodes pour étudier la stabilité :

### Système linéaire

On considère le cas particulier d'une équation différentielle linéaire autonome

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de  $\text{Ker} A$  est un équilibre).

**Proposition 2.1.1** (i) *L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de  $\dot{X} = AX$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative.*  
(ii) *Si  $A$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas stable de  $\dot{X} = AX$ .*

*(Condition nécessaire et suffisante de stabilité) L'origine est un équilibre stable de  $\dot{X} = AX$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur de partie réelle nulle, les multiplicités algébriques et géométriques coïncident.*

# Système non linéaire

Maintenant nous présentons deux méthodes pour étudier la stabilité d'un système non-linéaire

- Méthode indirecte basée sur la linéarisation.
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

## 1 Méthode indirecte (Linéarisation)

Le point critique de (31) se ramène à l'origine ( $f(0) = 0$ ) par le changement de variable ( $x = x - a$ ) et le développement de Taylor de  $f(x)$  autour de  $x = 0$  donne

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) +$$

Lorsque  $x$  est très proche de 0 les termes non-linéaires deviennent négligeables devant le terme linéaire et la méthode indirecte de Lyapunov pour étudier la stabilité autour du point d'équilibre 0, consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

avec

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}_{x=0}$$

la matrice Jacobienne de  $f$  en 0. Le système (2) s'appelle le linéarisé du système non-linéaire (1) au point d'équilibre 0.

**Définition** . Un point d'équilibre  $a \in \mathbb{R}^n$  est dit point hyperbolique si aucune valeur propre de la matrice  $A = Df(a)$  n'a la partie réelle nulle.

**Définition** . Un point d'équilibre  $a \in \mathbb{R}^n$  est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(a)$  ont les parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(a)$  ont les parties réelles positives et il est appelé point selle (col) si en moins une valeurs propres de la matrice  $A = Df(a)$  a la partie réelle positive et en moins une valeurs propre a la partie réelle négative.

**Définition 5.** Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalents dans un voisinage de l'origine (ou bien ont la même structure) s'il y a un homéomorphisme  $H$  appliquant l'ouvert  $U$  contenant l'origine à l'ouvert  $V$  contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans  $U$  en les trajectoires du deuxième système dans  $V$  et préserve leurs orientations via le temps.

**Exemple 3.1:** *Considérons les deux systèmes linéaires*

$$\dot{x} = Ax \quad (3)$$

$$\dot{y} = By \quad (4)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit } H(x) = Rx \text{ avec } R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a  $B = RAR^{-1}$ .

Soit  $y = H(x) = Rx$  ou  $x = R^{-1}y$  alors

$$\dot{y} = R\dot{x}$$

$$= RAx$$

$$= RAR^{-1}y$$

$$= By,$$

d'où, si  $x(t) = e^{At}x_0$  est la solution du premier système passant par  $x_0$ , alors  $y(t) = H(x(t)) = Rx(t) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$  est la solution du deuxième système passant par  $y_0 = Rx_0$ .

L'application  $H(x) = Rx$  est une simple rotation qui est clairement un homéomorphisme.

### **Théorème 1.1. (Hartman-Grobman)**

*Soient  $U, V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine, soit  $f \in C^1(U)$  et  $\phi_t$  le flot du système non-linéaire (1). Supposons que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique. Alors, il existe un homéomorphisme  $H$  de l'ouvert  $U$  dans l'ouvert  $V$  tel que pour chaque  $x_0 \in U$  il y a un intervalle ouvert  $I_0 \subset \mathbb{R}$  contenant 0 et pour tout  $t \in I_0$*

$$H(\phi_t(x_0)) = e^{At} H(x_0)$$

*i.e.  $H$  applique les trajectoires du système non-linéaire (1) vers les trajectoires de son système linéarisé (2) et préserve la direction du temps.*

Le théorème affirme (sous certaines conditions) que, au voisinage d'un point  $a$  tel que  $f(a) = 0$ , le système non-linéaire (1) est équivalent au système linéarisé (2) (dans l'énoncé du théorème  $a = 0$  mais bien sûr on peut toujours se ramener à ce cas, il suffit de considérer la fonction  $x \rightarrow f(x + a) - f(a)$ ).

**Exemple 2:** *Considérons le système d'un pendule avec frottement*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ry - \frac{g}{L} \sin(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

*avec les points d'équilibres  $(n, 0)$  pour tout entier  $n$ . La matrice jacobienne au point  $(n, 0)$  est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L}(-1)^{n+1} & -r \end{pmatrix}$$

*avec les valeurs propres*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + (-1)^{n+1}4g/L}}{2}.$$

*Si  $n$  est pair alors les deux valeurs propres sont à parties réelles négatives d'où le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.*

*Si  $n$  est impair alors les deux valeurs propres sont réelles de signes opposés*

$$\lambda_1 = \frac{-r - \sqrt{r^2 + 4g/L}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4g/L}}{2}$$

*d'où le point d'équilibre est un point selle (instable).*

$$\dot{y}(t) = -y^3(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*L'équilibre 0 ne satisfait pas la condition du théorème précédent car  $DF(0) = 0$ . Par contre, c'est un équilibre asymptotiquement stable, car la solution valant  $y_0 \neq 0$  en  $t = 0$  est  $y(t) = \frac{\text{signe}(y_0)}{\sqrt{2t + \frac{1}{y_0^2}}}$ ,  $t \geq 0$ , qui est décroissante et converge vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Théorème 2.1.3** (*Condition nécessaire de stabilité*) Si  $\bar{X}$  est un équilibre stable alors toutes les valeurs propres de  $DF(\bar{X})$  sont de partie réelle négative ou nulle.

On utilise généralement la contra-posée de ce théorème : Si  $DF(\bar{X})$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'équilibre  $\bar{X}$  n'est pas stable.

**Remarque** . . . Dans le cas où  $n = 2$ , il est très pratique d'utiliser le déterminant et la trace de  $DF(\bar{X})$  pour caractériser le signe des parties réelles de ses valeurs propres. Si  $\det DF(\bar{X}) < 0$  ou  $\det DF(\bar{X}) > 0$  et  $\operatorname{tr} DF(\bar{X}) > 0$ , alors l'équilibre  $\bar{X}$  n'est pas stable. Si  $\det DF(\bar{X}) > 0$  et  $\operatorname{tr} DF(\bar{X}) < 0$ , alors l'équilibre  $\bar{X}$  est asymptotiquement stable.

**Exemple** . . . Soit le système dynamique dans  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - x \\ \dot{y} = -y + 2x \end{cases}$$

On définit la fonction  $F$  par  $F(x, y) = (2x^2 - x, y + 2x)$ , et sa matrice jacobienne

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Le système a deux points d'équilibre  $\bar{X}_1 = (0, 0)$  et  $\bar{X}_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ .

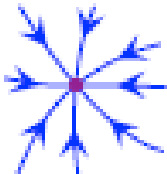

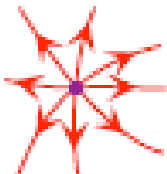

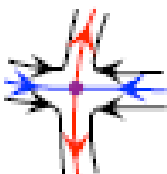
L'origine est stable car  $\operatorname{tr} DF(\bar{X}_1) = -2 < 0$  et  $\det DF(\bar{X}_1) = 1 > 0$ .

**Définition 1.1.1.** *Un équilibre  $\overline{X}$  est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de  $DF(\overline{X})$  ont une partie réelle non-nulle.*

D'après les deux théorèmes précédents, la stabilité d'un équilibre hyperbolique  $\overline{X}$  est totalement caractérisé par le signe des parties réelles des valeurs propres de  $DF(\overline{X})$ .

**Corollaire 1.1.1.** *Un équilibre hyperbolique  $\overline{X}$  est soit asymptotiquement stable (si toutes les valeurs propres de  $DF(\overline{X})$  sont de partie réelle négative), soit non-stable.*

**Remarque** *Si l'équilibre n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire sur la stabilité en utilisant le linéarisé (c-à-d s'il existe une valeur propre de partie réelle nulle, on ne peut rien conclure par la méthode de linéarisation).*

Points hyperboliques	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$\lambda = \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
$\Re(\lambda) < 0, \Re(\mu) < 0$ stable $\dim(\mathcal{W}^s) = 2$ $\dim(\mathcal{W}^u) = 0$	 Noeud attractif	 Foyer attractif
$\Re(\lambda) > 0, \Re(\mu) > 0$ instable $\dim(\mathcal{W}^s) = 0$ $\dim(\mathcal{W}^u) = 2$	 Noeud répulsif	 Foyer répulsif
$\Re(\lambda) < 0, \Re(\mu) > 0$ instable $\dim(\mathcal{W}^s) = 1$ $\dim(\mathcal{W}^u) = 1$	 Col ou Point selle ("saddle")	Impossible !

où  $\mathcal{W}^s$  (resp.  $\mathcal{W}^u$ ) est le sous-espace vectoriel caractéristique associé à  $W_\lambda$  avec  $\Re(\lambda) < 0$  (resp.  $\Re(\lambda) > 0$ ).

### **Théorème      Existence de la variété centrale**

Soit un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^k$  défini au voisinage de l'origine  $0 \in \mathbb{R}^n$  associé au système différentiel :

$$\dot{x} = C.x + F(x, y, z), \quad (2.12)$$

$$\dot{y} = P.y + G(x, y, z), \quad (2.13)$$

$$\dot{z} = Q.z + H(x, y, z), \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

où  $x \in \mathbb{R}^r$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}^q$ ,  $p + q + r = n$ ,

$C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  à valeurs propres à partie réelle nulle,

$P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  à valeurs propres à partie réelle strictement négative,

$Q \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  à valeurs propres à partie réelle strictement positive.

Alors, il existe une variété  $\mathcal{W}^c$ , appelée variété centrale, de dimension  $r$  de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  invariante par le flot, tangente au sous-espace  $y = z = 0$ .

### **Théorème 13. Réduction à la variété centrale**

Sous les conditions du théorème précédent, il existe un voisinage de  $\mathcal{W}^c$  et une conjugaison locale de classe  $\mathcal{C}^k$  sur ce voisinage du champ de vecteurs à sa restriction à la variété centrale.

En pratique, on cherche la variété centrale sous la forme de deux équations

$$y = h_1(x), \quad z = h_2(x).$$

Par dérivation, l'invariance de  $\mathcal{W}^c$  implique

$$\dot{y} = Dh_1(x).\dot{x}, \quad \dot{z} = Dh_2(x).\dot{x},$$

d'où le système de deux équations en  $(h_1, h_2)$  :

$$Dh_1(x)[C.x + F(x, h_1(x), h_2(x))] - P.h_1(x) - G(x, h_1(x), h_2(x)) = 0, \quad (2.16)$$

$$Dh_2(x)[C.x + F(x, h_1(x), h_2(x))] - Q.h_2(x) - H(x, h_1(x), h_2(x)) = 0. \quad (2.17)$$

La solution n'étant pas unique en général, on retrouve l'objet de la remarque ci-dessus. En connaissant  $(h_1, h_2)$  solution du système (2.16)-(2.17), le comportement qualitatif local du champ de vecteurs est alors donné par le théorème suivant.

**Théorème 14.** Sous les hypothèses des théorèmes précédents avec  $(h_1, h_2)$  solution de (2.16)-(2.17),  $X$  est, au voisinage du point singulier, topologiquement conjugué au champ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C.x + F(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} &= P.y, \\ \dot{z} &= Q.z. \end{aligned}$$

# Fonctions de Lyapuno :

Soit maintenant le système autonome

$$\dot{X}(t) = F(X(t))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = F_1(X(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = F_n(X(t)), \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad F = (F_1, \dots, F_n) \end{array} \right.$$

associé à un champ de vecteurs  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Définition** Soient  $\bar{X}$  un équilibre de (2.3),  $\mathcal{U} \subset \Omega$  un voisinage de  $\bar{X}$  et  $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov pour (2.3) en  $\bar{X}$  si

(1)  $V(\bar{X}) = 0$  et  $V(X) > 0$  pour tout  $X \in \mathcal{U}$ ,  $X \neq \bar{X}$  ( $\bar{X}$  est un minimum strict de  $V$  sur  $\mathcal{U}$ ).

(2) Pour tout  $X \in \mathcal{U}$ , la fonction  $t \mapsto V(\phi_t(X))$  est décroissante c-à-d

$$\forall X \in \mathcal{U} : \frac{d}{dt}(V \circ \phi_t)(X) = \sum_{i=1}^n F_i(X) \frac{\partial V}{\partial x_i}(X) \leq 0.$$

Autrement dit,  $V$  est décroissante le long des trajectoires.

Si de plus,  $V$  satisfait

(3) Pour tout  $X \in \mathcal{U}$ ,  $X \neq \bar{X}$ , la fonction  $t \mapsto V(\phi_t(X))$  est strictement décroissante, on dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov stricte pour (2.3) en  $\bar{X}$ .

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$ ,
3.  $V(x(t)) \rightarrow +\infty$  si  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ .

**Exemple**      *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}$$

*Nous étudions la stabilité en point d'équilibre  $(0,0)$  avec une fonction de Lyapunov,*

*supposons  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  où  $a > 0, b > 0$ ,*

*alors*

$$\dot{V}(x, y) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y}$$

$$\dot{V}(x, y) = 2ax(-x^3 - y^2) + 2byxy - y^3$$

*donc*

$$\dot{V}(x, y) = -2ax^4 - 2axy^2 + 2bxy^2 - 2by^4.$$

*On pose  $a = b = 1$  alors*

$$\dot{V}(x, y) = -2x^4 - 2y^4 = -2(x^4 + y^4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(x, y) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ V(0, 0) = 0 \\ \dot{V}(x, y) = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} V(x, y) = +\infty. \end{cases}$$

*Alors  $(0,0)$  est asymptotiquement stable.*

**Théorème 2.2.1** *Si l'équation différentielle (2.3) admet une fonction de Lyapunov en un équilibre  $\bar{X}$ , alors  $\bar{X}$  est un équilibre stable. Si de plus, la fonction de Lyapunov est stricte, alors  $\bar{X}$  est asymptotiquement stable.*

**Exemple**      (*Exemple de fonction de Lyapunov*) *L'oscillateur harmonique*

*Soit l'équation  $m\ddot{x} + k(x + x^3) = 0$ ,  $m, k > 0$  qui s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}(x + x^3). \end{cases}$$

*L'unique point d'équilibre est  $\overline{X} = (0, 0)$ .*

*L'énergie  $E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + k(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4})$  est une fonction de Lyapunov.*

*En effet,  $E(0, 0) = 0$ ,  $E(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $\dot{E}(x, y) = my\dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} = 0$ .*

*L'équilibre  $(0, 0)$  est alors stable.*

**Théorème :**      *Soit l'équation différentielle (2.3) définie sur  $\mathbb{R}^n$ . On suppose qu'elle admette en un équilibre  $\overline{X}$  une fonction de Lyapunov stricte  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que (si  $\|X\| \longrightarrow +\infty$  alors  $V(X) \longrightarrow +\infty$ ). Alors, le bassin d'attraction de  $\overline{X}$  est  $\mathbb{R}^n$  tout entier. On dit dans ce cas que l'équilibre  $\overline{X}$  est globalement asymptotiquement stable.*

## Exemple

$$\dot{X} = F(X) = \begin{pmatrix} y - x(x^2 + y^2) \\ -x - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{X} = G(X) = \begin{pmatrix} y + x(x^2 + y^2) \\ -x + y(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

où  $X = (x, y)^t$ .

Ces deux équations ont pour unique point d'équilibre  $(0, 0)$ . Les deux linéarisés en  $(0, 0)$

sont égaux

$$DF(0, 0) = DG(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et ont pour valeur propre  $\pm i$ , dont la partie réelle est évidemment nulle. Cependant,

l'équilibre  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable dans le premier cas alors qu'il n'est pas

stable dans le deuxième.

En effet, on pose  $V(X) = x^2 + y^2$ . Si  $X(\cdot)$  est une solution de  $\dot{X} = F(X)$ , alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(X(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}.\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}.\dot{y} \\ &= -2(x^2 + y^2) = -2V^2(X(t)) < 0.\end{aligned}$$

Ainsi,  $V$  est décroissante le long des trajectoires de  $\dot{X} = F(X)$ . Or  $V(X(t)) = \|X(t)\|^2$ ,  $V$  est décroissante et tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ . Ceci implique que  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable pour  $\dot{X} = F(X)$  (ici l'équilibre  $(0, 0)$  est un minimum local de  $V$ ).

De même, si  $X(\cdot)$  est une solution de l'équation  $\dot{X} = G(X)$ , on trouve

$$\frac{d}{dt}V(X(t)) = 2V^2(X(t)) > 0.$$

Ainsi,  $V$  est croissante le long des trajectoires de  $\dot{X} = G(X)$ . Dans ce cas,  $V(X(t)) = \|X(t)\|^2$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$ . Ceci implique que  $(0, 0)$  n'est pas stable pour  $\dot{X} = G(X)$  (Ici l'équilibre  $(0, 0)$  n'est pas un minimum local de  $V$ ).

# Théorème d'invariance LaSalle

il est souvent difficile de trouver une fonction de Lyapunov

stricte. Dans ce cas, le Théorème suivant (Théorème d'invariance LaSalle) permet de déterminer l'ensemble vers lequel convergent les solutions.

**Définition** *(Ensemble invariant)* Un sous-ensemble  $\mathcal{I}$  de  $\mathbb{R}^n$  est invariant si, pour tout  $X_0 \in \mathcal{I}$ , la solution maximale du système

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

satisfait  $X(X_0, t) \in \mathcal{I}, \forall t > 0$ .

**Théorème**            (*Théorème d'invariance LaSalle : version locale*)

*Soit  $V$  une fonction de Lyapunov sur  $\Omega$  pour le système  $\dot{X} = F(X)$ . Soit  $s > 0$  et*

*$\Omega_s = \{X \in \Omega : V(X) \leq s\}$ . On suppose que*

- 1)  $\Omega_s$  est fermé borné,*
- 2)  $\forall X \in \Omega_s : \dot{V}(X) \leq 0$*
- 3)  $\mathcal{V} \subset \Omega_s$  où  $\mathcal{V} = \{X \in \Omega_s : \dot{V}(X) = 0\}$ ,*
- 4)  $\mathcal{I}$  est le plus grand ensemble invariant tel que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$ .*

*Alors, toute trajectoire issue d'une condition initiale dans  $\Omega_s$  converge lorsque  $t \rightarrow +\infty$  vers  $\mathcal{I}$ , c-à-d*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X(X_0, t), \mathcal{I}) = 0, \quad \forall X_0 \in \Omega_s.$$

**Remarque**            1) *Il n'y est pas question de stabilité, mais uniquement de convergence.*

2) *La fonction  $V$  n'est pas nécessairement définie positive.*

3) *La stabilité asymptotique est garantie lorsque la condition  $V(X) > 0, X \neq 0$  et  $V(0) = 0$  est explicitement ajoutée.*

**Exemple** Soit l'oscillateur non-linéaire  $\ddot{x} + k\dot{x} + g(x) = 0$ , où  $k$  est un paramètre strictement positif et  $g$  est telle que  $xg(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ . On peut écrire ce système sous la forme d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky - g(x). \end{cases}$$

La fonction  $V(x, y) = \int_0^x g(s)ds + \frac{y^2}{2}$  est alors une fonction de Lyapunov.

En effet,  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(x(t), y(t))) &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= g(x)y + y(-ky - g(x)) \\ &= -ky^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Comme  $V(0, 0) = 0$  et  $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , alors  $V$  est une fonction de Lyapunov. Donc,  $(0, 0)$  est un équilibre stable et  $V$  n'est pas une fonction de Lyapunov stricte. On est donc amené à utiliser le principe d'invariance LaSalle. Ici, on a

$$\mathcal{V} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}.$$

Le plus grand sous-ensemble invariant contenu dans  $\mathcal{V}$  est  $\mathcal{I} = \{(0, 0)\}$ .

En effet, si  $x_0 \neq 0$ , la solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky - g(x) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

sont de  $\mathcal{V}$  car  $y'(0) = -g(x_0) \neq 0$ .

Il reste à voir si  $\Omega_s$  est borné pour un certain  $s > 0$ . Cela dépend de la fonction  $g$ .

On considère le cas particulier du pendule de longueur  $R$  soumis à la gravité, on a  $g(x) = \frac{g \sin x}{R}$ . Alors,  $V(x, y) = \frac{g}{R}(1 - \cos x) + \frac{y^2}{2}$ . Donc,  $\Omega_s = \{(x, y) : V(x, y) \leq s\}$  n'est jamais borné (il contient  $(0, 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). Cependant, pour une condition initiale  $(x_0, y_0) \in ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}$  telle que  $V(x_0, y_0) < 2\frac{g}{R}$ , la solution est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

En effet, comme  $t \mapsto V[(x, y)(t)]$  est décroissante, on a

$$y^2(t) \leq 2V(x_0, y_0), \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

$\frac{y^2}{2} \leq 2V(x_0, y_0)$  et  $(1 - \cos x(t)) < 2$ ,  $\forall t \in [0, +\infty[$ , donc  $x(t) \in ]-\pi, \pi[$ ,  $\forall t \in [0, +\infty[$  (théorème des valeurs intermédiaires).

La preuve de LaSalle peut être reproduite. On conclut que  $(0, 0)$  est (localement) asymptotiquement stable :  $\forall (x_0, y_0) \in ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} : V(x_0, y_0) < 2\frac{g}{R}$ ,  $(x, y)(t) \longrightarrow (0, 0)$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ .

# Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. tant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Une erreur  $\epsilon_0 > 0$  sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à un instant  $t$ , aura l'expression suivante :  $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$ . On peut calculer la valeur de  $\lambda$ , appelé exposant de Lyapunov, grâce aux méthodes développées par Alexandre Lyapunov.

## Exposant de Lyapunov pour un système de dimension égale a un

Soit un système dynamique de dimension égal un. donné par une application discrète  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$x_{k+1} = f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Soit  $x_0$  une condition initiale  $x_0$ , un accroissement  $\delta x_0$ , (avec  $\delta x_0 \rightarrow 0$ ) afin d'obtenir une seconde initiale proche  $x'_0$  telle que:

$$x'_0 = x_0 + \delta x_0.$$

On utilise les deux premiers termes d'un développement en séries de Taylor on a ;

$$f(x'_0) = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0).\delta x_0. \quad (3.10)$$

En remplaçant dans (3.10) on obtient

$$\delta x_1 = f'(x_0).\delta x_0 \quad \text{tel que} \quad \delta x_1 = x'_1 - x_1, \quad (3.11)$$

où  $x_1 = f(x_0)$  et  $x'_1 = f(x'_0)$ . Nous prenons à nouveau l'image par  $f$  des deux membres de (3.11) on obtient

$$f(x'_1) = f[f(x_0 + \delta x_0)] = f[f(x_0)] + f'[f(x_0)].\delta x_0, \quad (3.12)$$

donc

$$f(x'_1) = f^2(x_0) + f'[f(x_0)].\delta x_0, \quad (3.13)$$

donc le premier itéré de  $f$  sur  $x'_1$ , il vient

$$f(x'_1) = f(x_1) + f'(x_1).\delta x_1. \quad (3.14)$$

En introduisant (3.10) dans (3.14), nous obtenons l'équation suivante:

$$f(x'_1) = f(x_1) + f'(x_1).f'(x_0).\delta x_0. \quad (3.15)$$

On suppose ainsi

$$\delta x_2 = f'(x_1).f'(x_0).\delta x_0, \quad (3.16)$$

alors l'équation (3.15) est équivalent l'équation suivante

$$f(x'_1) = f(x_1) + \delta x_2. \quad (3.17)$$

Nous généralisons l'équation (3.16) à une étape d'itération quelconque  $k$  en écrivant

$$\delta x_k = \left( \prod_{m=0}^{m=k-1} f'(x_m) \right) .\delta x_0. \quad (3.18)$$

En supposant  $|\delta x_k| \approx (\gamma)^k |\delta x_0|$ , l'évolution est obtenue par un taux effectif  $\gamma$  par pas d'itération, qui est donné par l'équation (3.18) avec l'équation ( 3.19 ).

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \left| \frac{\delta x_k}{\delta x_0} \right| \right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \prod_{m=0}^{m=k-1} |f'(x_m)| \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (3.19)$$

Après logarithme de l'équation ( 3.19 ), nous obtenons l'exposant de de Lyapunov,

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{m=k-1} \log(|f'(x_i)|), \quad (3.20)$$

**Pour**  $\lambda \leq 0$  la trajectoire de l'évolution du système peut tendre vers un point fixe, avoir un comportement périodique (ou quasi-périodique).

**Pour**  $\lambda > 0$  le système est chaotique.

**Pour**  $\lambda \rightarrow \infty$  le système devient aléatoire.

## Exposants de Lyapunov pour un système de dimension supérieure strictement à un

Soit le système dynamique de dimension  $n$  défini par:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k), & k = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 \text{ est la condition initiale,} \end{cases} \quad (3.22)$$

On définit alors les  $n$  exposants de Lyapunov avec la limite suivante:

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{k} \log \left( \frac{\|\varepsilon_k\|}{\|\varepsilon_0\|} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k} \log \left( \frac{\|\varepsilon_i\|}{\|\varepsilon_{i-1}\|} \right).$$

## Exercice 01

*a) Soit l'équation différentielle*

$$\ddot{x}(t) + 5x^2(t)\dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (5.2)$$

*1) Transformer l'équation (5.2) en système d'équation différentielle d'ordre 1.*

*2) Etudier la stabilité de point d'équilibre  $(0, 0)$  de ce système (utiliser une fonction de Lyapunov).*

## Exercice 02

*Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^2 - y \\ \dot{y} = -y^3 - yx^2 + x, \end{cases} \quad (5.1)$$

- 1) Linéariser le système (5.1) en point d'équilibre  $(0, 0)$ .*
- 2) Etudier la stabilité en  $(0, 0)$ .*

## Exercice 03

*Soit le système dynamique continu non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) = f(x, y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y) = g(x, y) \end{cases} \quad (5.4)$$

- 1) Déterminer sur quelles régions les abscisses  $x(t)$  sont croissantes et décroissantes, et de même pour les ordonnées  $y(t)$ . Représenter par figure ces régions ci-dessous, pour  $(x, y) \in [-1, 5]^2$ .*
- 2) Déterminer les points d'équilibre du système (5.4).*
- 3) Calculer la matrice jacobienne  $J(x, y)$  du système (5.4) au point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .*
- 4) Etudier la stabilité des points d'équilibre et la nature de ces points.*
- 5) Tracer en figure le comportement des trajectoires du système (5.4) autour les points d'équilibre du système (5.4).*

## Exercice 04

*Soit le système dynamique discret suivant :*

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*où  $x_n \in \mathbb{R}$  et  $r$  est un paramètre réel.*

- 1) Déterminer les points fixes du système (5.5).*
- 2) Etudier la stabilité des points fixe.*

## Exercice 05

*Soit le système non-linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = -x + ay - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

1) *Etudier la stabilité de point d'équilibre  $(0, 0)$  (utiliser une fonction de Lyapunov).*

2) *Utiliser les coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et montrer que l'on obtient l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \dot{r} = (a - r)r \end{cases} \quad \text{Indication : utiliser } x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}. \quad (5.9)$$

# Chapitre 3: Systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre, bifurcations.

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la "bifurcation". Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. Par exemple, déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur, ...

La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

Soit le système dynamique non linéaire de dimension  $n$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (2.1)$$

avec le paramètre de contrôle  $\mu$ , et soit  $x^*$  sa solution.

**Définition 2.1** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système 2.1 lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

**Définition 2.2** *Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre pour laquelle le système 2.1 n'est pas structurellement stable)*

## Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque  $c$  franchit 0, un point d'équilibre stable (noeud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est souvent représenté par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = c - X^2 \quad (2.2)$$

Qui s'appelle équation générique de bifurcation noeud-col, On a alors  $F(X, c) = c - X^2$

\* Si  $c < 0$  , l'équation  $f(X, c) = 0$  n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

\* Si  $c > 0$  on a :

$$c - X^2 = 0 \iff X^2 = c$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} X = \sqrt{c} \\ ou \\ X = -\sqrt{c} \end{array} \right\}$$

Par conséquent 2.2 admet deux points fixes.

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = -2X \text{ alors } \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=\sqrt{c}} = -2\sqrt{c} \prec 0 \text{ et } \frac{dF(X, c)}{dX} \Big|_{X=-\sqrt{c}} = 2\sqrt{c} \succ 0 \text{ par}$$

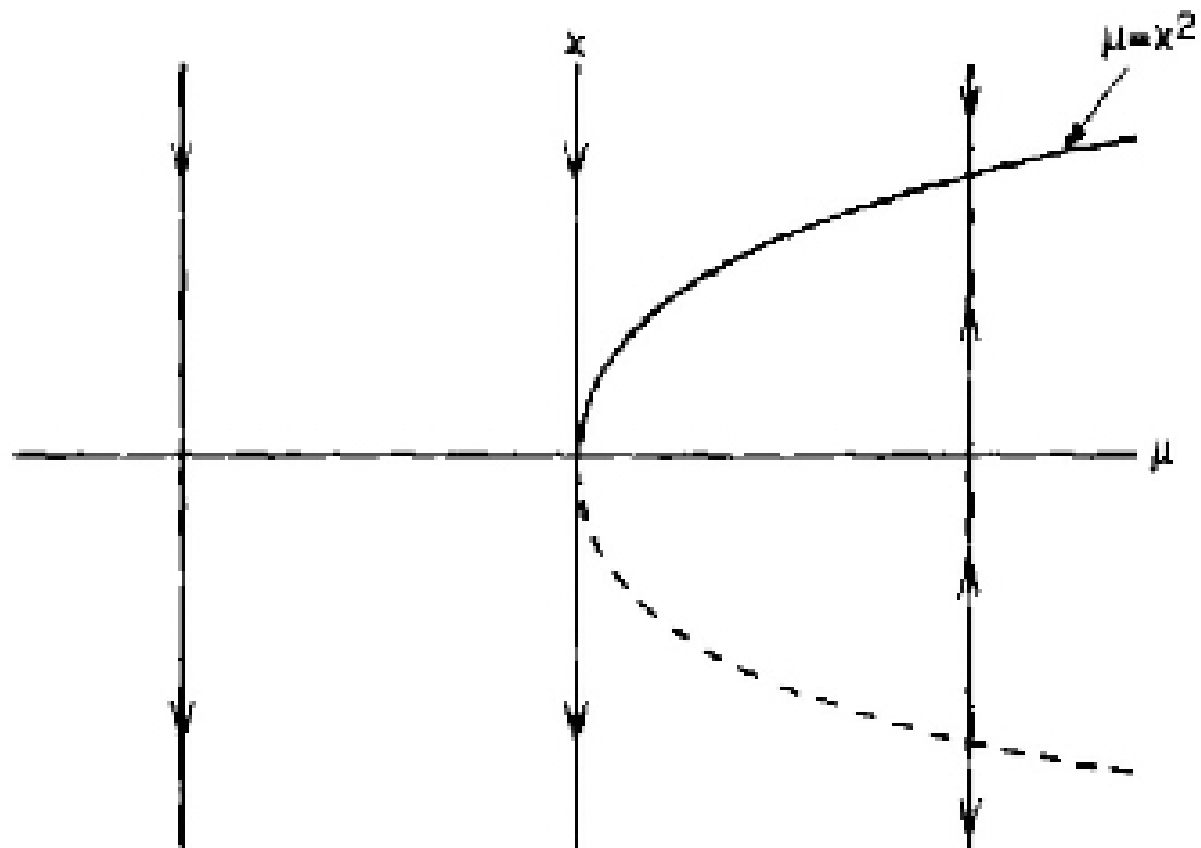
suite :

Le point fixe  $X = -\sqrt{c}$  est stable, mais  $X = \sqrt{c}$  est instable.

\* Si  $c = 0$  le seul point fixe est  $X = 0$ , par intégration de 2.2 on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point  $X = 0$  est semi-stable. (stable si  $X_0 > 0$  est instable si  $X_0 < 0$  )



Bifurcation noeud-col

## Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes ( les points stables deviennent instable et vice versa ) lorsque  $c$  franchit 0.

Elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^2 \quad (2.3)$$

Qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique. On a alors

$$\begin{aligned} cX - X^2 = 0 &\iff X(c - X) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ \text{ou} \\ X = c \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent on a deux points fixes

$$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 2X \text{ donc } \left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=0} = c \text{ et } \left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=c} = -c \text{ par suite :}$$

\* Si  $c < 0$ , le point fixe  $X = 0$  est stable, mais  $X = c$  est instable.

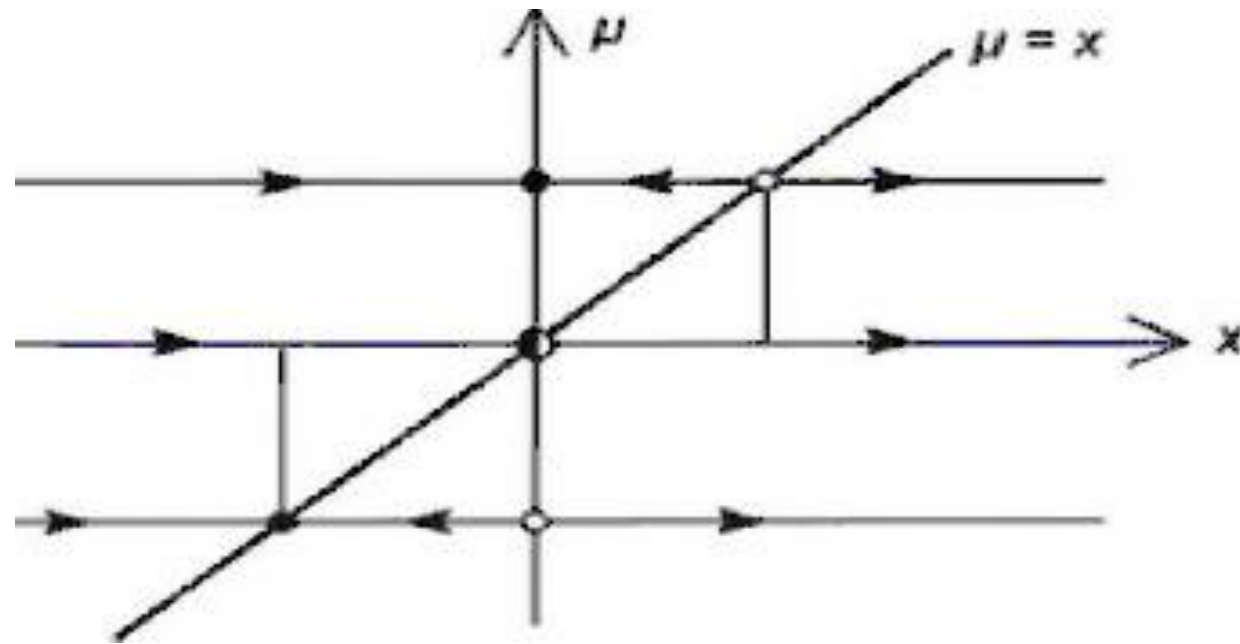
\* Si  $c > 0$ , le point fixe  $X = 0$  est instable, mais  $X = c$  est stable.

On remarque un échange de stabilité en  $c = 0$ .

\* Si  $c = 0$ , le seul point fixe est  $X = 0$ , par integration de [2.3](#) on obtient :

$$X(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{X_0}}$$

D'où le point  $X = 0$  est semi-stable. (stable si  $X_0 > 0$  et instable si  $X_0 < 0$ )



Bifurcation transcritique

## Bifurcation fourche(Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance d'une paire de point fixes.

$$\frac{dX}{dt} = cX - X^3$$

Et pour sous -critique :

$$\frac{dX}{dt} = cX + X^3$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a  $F(X, c) = cX - X^3$

$$\begin{aligned} cX - X^3 = 0 &\iff X(c - X^2) = 0 \\ &\iff \begin{cases} X = 0 \\ \text{ou} \\ c - X^2 = 0 \iff X^2 = c \end{cases} \end{aligned}$$

Alors si  $c < 0$  on a un seul point fixe  $X = 0$ .

Si  $c > 0$  on a trois point fixes :

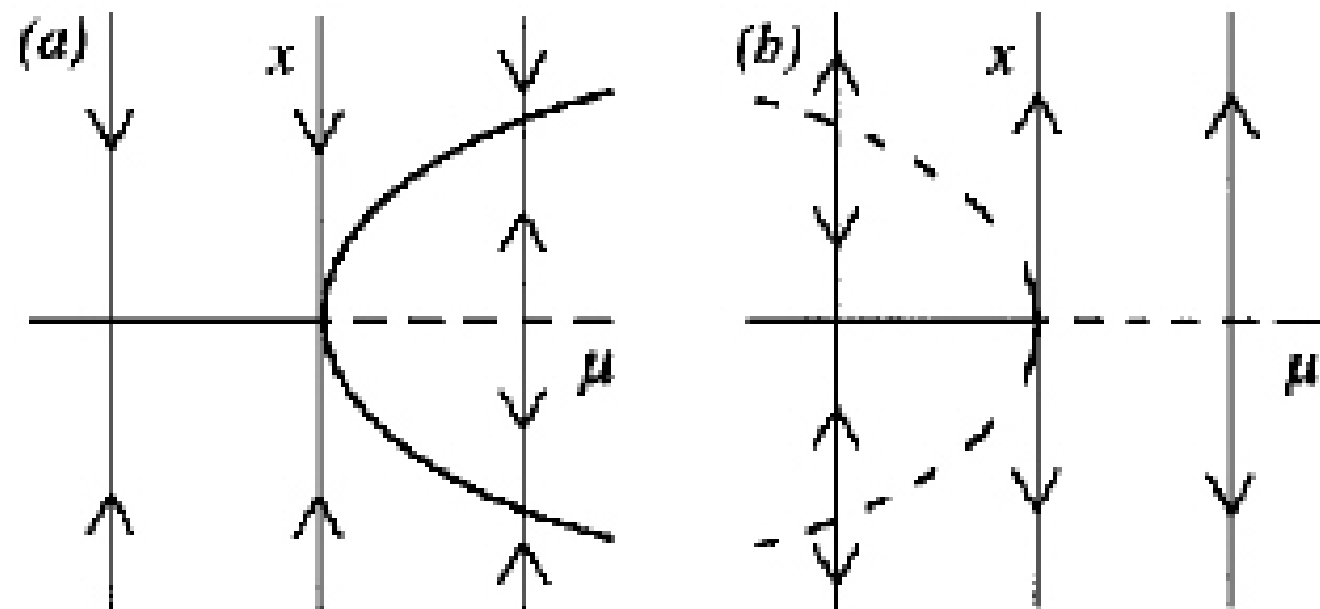
$$\begin{cases} X = 0 \\ X = \sqrt{c} \\ X = -\sqrt{c} \end{cases}$$

$\frac{dF(X, c)}{dX} = c - 3X^2$  alors  $\left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=0} = c$  et  $\left. \frac{dF(X, c)}{dX} \right|_{X=\pm\sqrt{c}} = -2c$  par suite :

\*Si  $c < 0$ , le seul point fixe  $X = 0$  est instable.

\*Si  $c > 0$ , le point fixe  $X = 0$  est stable, mais  $X = \sqrt{c}$  et  $X = -\sqrt{c}$  sont instables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes est dans la stabilité en  $c = 0$ .



Bifurcation fourche

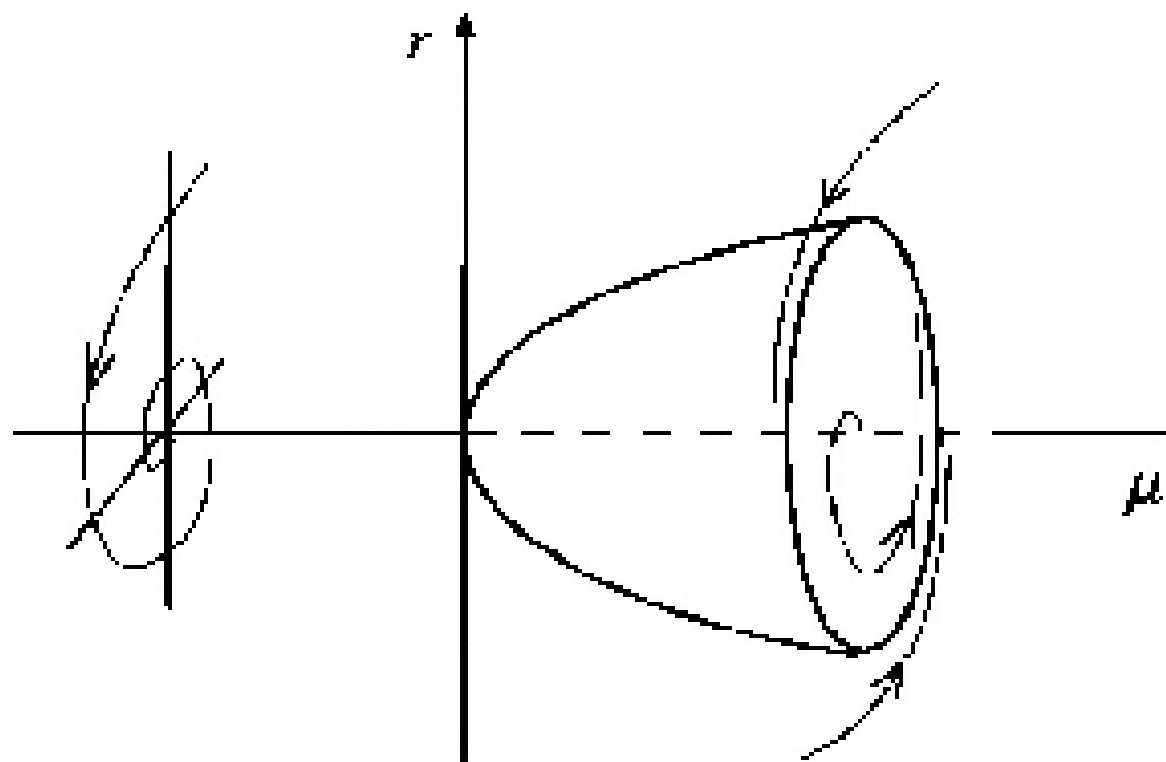
## Bifurcation Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque la paramètre de contrôle  $\mathbf{c}$  prend une valeur critique  $\mathbf{c}_0$  pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

**Définition 2.3** *Soit :*

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}, t, \mathbf{c}) \quad (2.4)$$

Un système dynamique non linéaire de dimension  $n$  et de paramètre de contrôle  $\mathbf{c}$ . Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $X_0$  de système [2.4](#) lors qu'on modifie  $\mathbf{c}$ , d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.



Bifurcation Hopf

# Bifurcations dans $\mathbb{R}^2$

On s'intéresse dans cette section aux systèmes dynamiques planaires dépendant d'un paramètre  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  du type

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x, y, \alpha) \\ \dot{y} = F_2(x, y, \alpha). \end{cases}$$

On va étudier trois types de bifurcations. Cette étude se fera sous forme d'exercices.

## Bifurcation selle-noeud

Soit le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel.

**Discussion.** Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x, y, \alpha) = (x^2 + \alpha, -y)$  pour tout  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le système est autonome dépendant d'un paramètre  $\alpha$  de la forme  $\dot{X} = F(X, \alpha)$ .

1. Si  $\alpha < 0$  alors, le système admet deux points d'équilibre  $(-\sqrt{|\alpha|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\alpha|}, 0)$ .

Pour déterminer la nature de chacun de ces points, on calcule la matrice jacobienne :

$$DF(x, y, \alpha) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne au premier point est

$$DF(-\sqrt{|\alpha|}, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|\alpha|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui admet deux valeurs propres réelles négatives :  $-1$  et  $-2\sqrt{|\alpha|}$ . On en déduit que le point  $(-\sqrt{|\alpha|}, 0)$  est un noeud asymptotiquement stable.

La matrice jacobienne au deuxième point est

$$DF(\sqrt{|\alpha|}, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|\alpha|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui admet deux valeurs propres réelles de signe différent :  $-1$  et  $2\sqrt{|\alpha|}$ . On en déduit que

2. Si  $\alpha = 0$  alors, le système se réduit à

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

qui admet un unique point d'équilibre à l'origine. La matrice jacobienne à l'origine est

$$DF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'origine est un point non hyperbolique.

3. Si  $\alpha > 0$  alors, le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

n'admet aucun point d'équilibre.

Cette bifurcation est appelée bifurcation selle-noeud et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud).

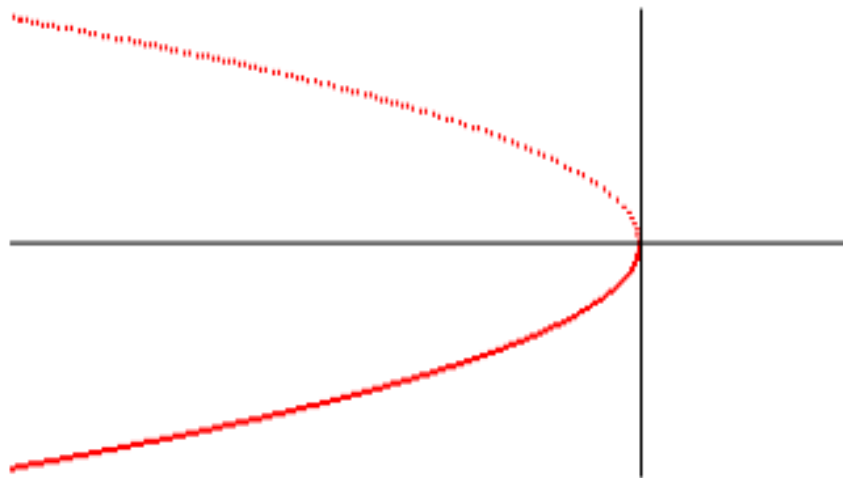


Diagramme de la bifurcation selle-oeud

# Bifurcation fourche

Soit le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\alpha - x^2) \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Dans le but d'étudier la stabilité du système aux points d'équilibre, on discute trois cas selon la valeur du paramètre réel  $\alpha$ .

**Discussion.** Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x, y, \alpha) = (x(-\alpha - x^2), -y)$  pour tout  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le système est autonome dépendant d'un paramètre  $\alpha$  de la forme  $\dot{X} = F(X, \alpha)$ .

En résumé, à la valeur du paramètre  $\alpha = 0$ , le système voit le nombre de points d'équilibre passer de trois à un. Pour  $\alpha < 0$ , on a un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stables. Pour  $\alpha \geq 0$ , le système admet un unique point d'équilibre, l'origine, qui est asymptotiquement stable.

Ici, il s'agit de la bifurcation fourche super-critique.

## Exercice

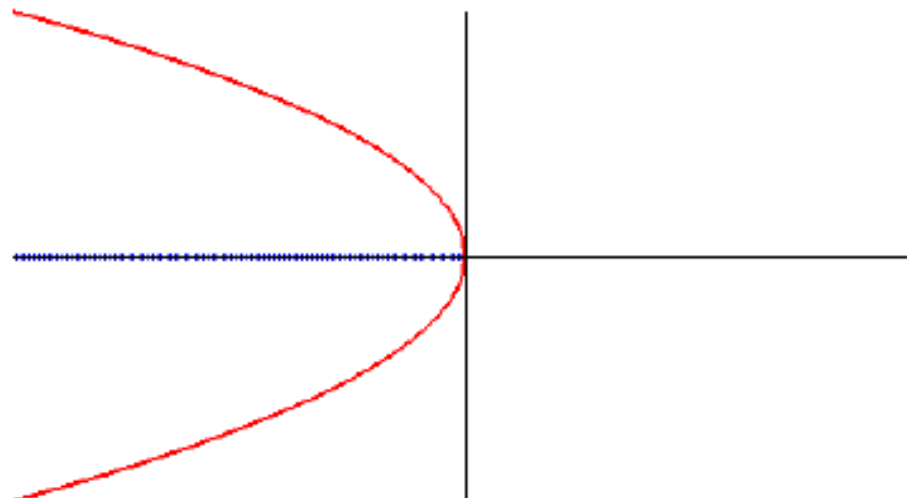


Diagramme de la bifurcation fourche super-critique

# Comportement des systèmes dynamiques

## Point d'équilibre

Dans ce cas, la solution asymptotique est représentée par un point, sa valeur étant déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibres. De même ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre elles.

## Régime périodique

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles  $nT$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  et  $T$  la période de la solution.

Dans l'espace de phase, l'ensemble limite correspondant à cette solution est une courbe fermée. Si l'espace de phase est de dimension 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée. Pour revenir à son état précédent, le système met exactement une période.

Si on travaille dans un espace de phase de dimension supérieur à 2, il faut tenir compte de certaines subtilités. En effet, dans un tel espace, une trajectoire périodique ne se situe pas nécessairement dans un même plan et elle peut se développer dans différentes formes fermées, il est parfois impossible d'étudier la trajectoire générée par le système dans l'espace de phase. Pour éviter ce problème on utilise la section de Poincaré.

## Régime quasi-périodique :

Un régime quasi-périodique correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique est représenté dans l'espace d'état par un tore.

## Régime chaotique :

Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale.

La moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale peut mener à un comportement très différent ce qui ne permet pas de faire une prédiction sur le comportement à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements. L'espace de phases est un outil qui permet d'avoir une

## Diagramme de bifurcation :

*“ La représentation d’une propriété quelconque, mais caractéristique de la ou des solutions en fonction du paramètre de bifurcation, constitue un diagramme de bifurcation. ”* **Bergé** [1984].

Comme cela a été souligné par **Glass et Mackey** [1988], la construction d’un diagramme de bifurcation est un bon moyen pour mettre en lumière une signature du chaos. Le graphe représentant comment la valeur de  $z_{\max}$  (par exemple) associée à chaque point d’un attracteur varie en fonction d’un des paramètres du modèle (le paramètre de bifurcation  $\mu$ , par exemple) permet de mettre en évidence deux types de comportements. Soit l’attracteur est représenté par un nombre fini de points visités successivement, ce qui va correspondre à un comportement périodique, soit par tout un ensemble de points répartis sur la verticale correspondant à la valeur du paramètre considéré, points visités de façon irrégulière, ce qui permettra de conclure à un attracteur chaotique.

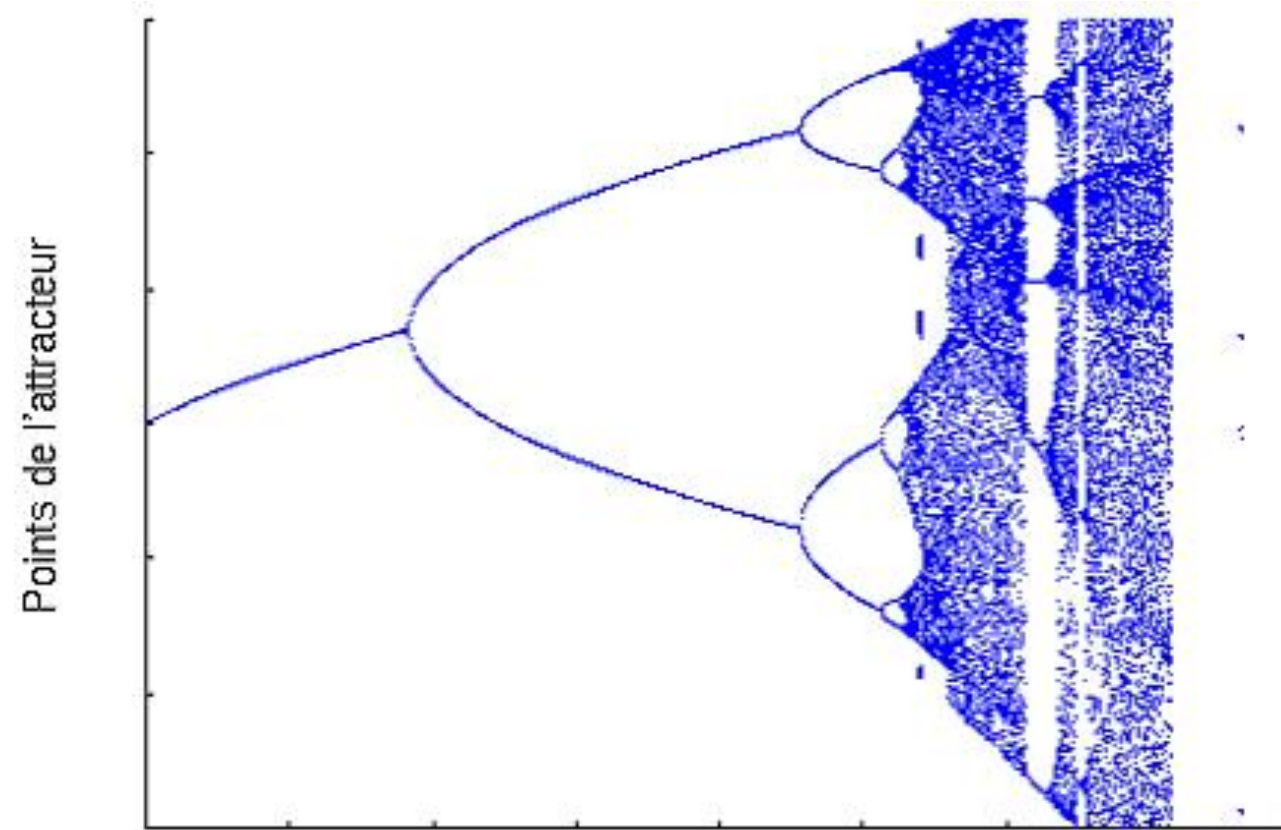


Diagramme de bifurcation

# Bifurcation du système de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

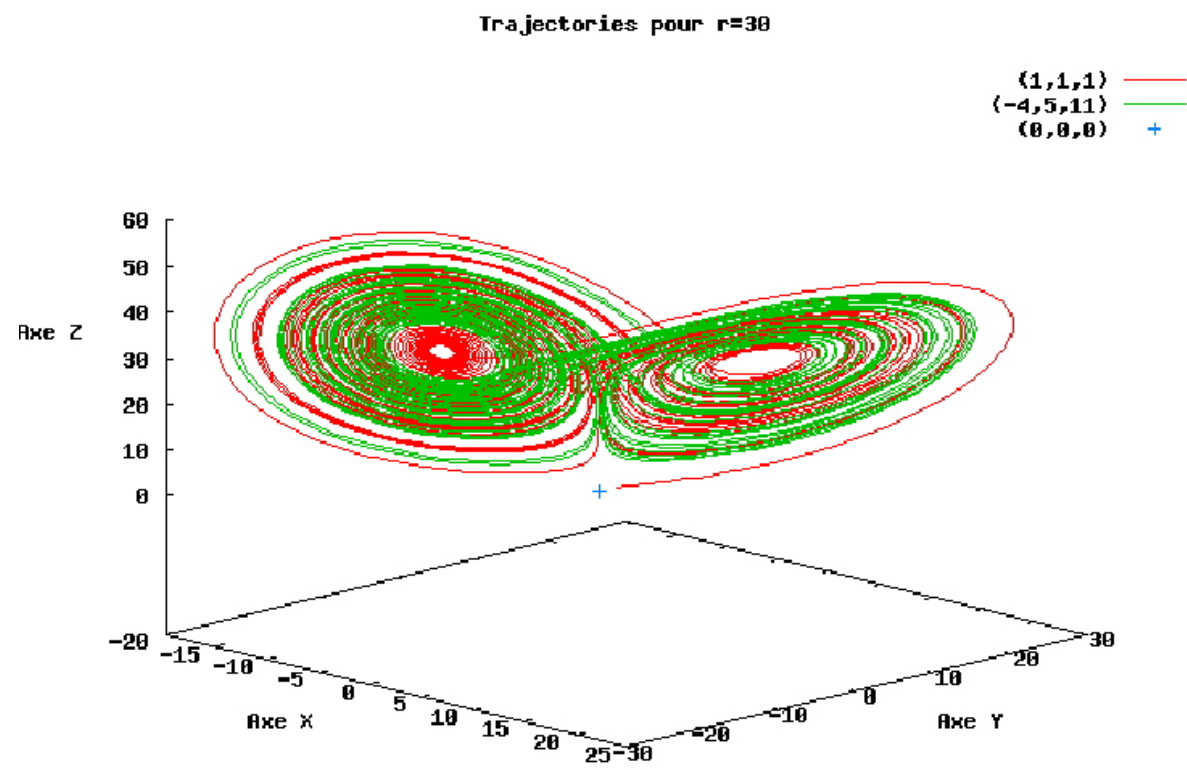
Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres. Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$

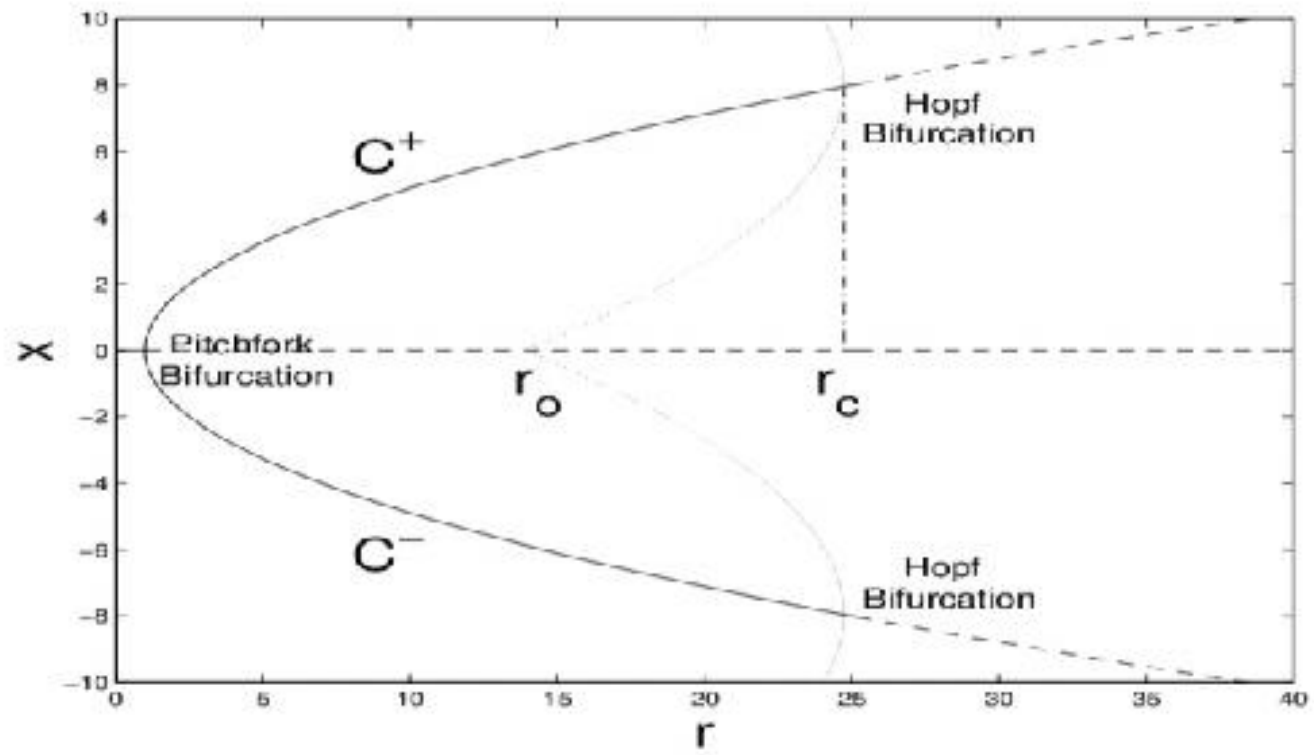
$$\dot{Y} = rX - Y - XZ$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

$\sigma$  ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égale à 10 dans les simulations),  $b = 8/3$  et  $r$  est le nombre de Rayleigh réduit.



Trajectoire de Lorenz



Bifurcation de Lorenz

**Exercice :** Etudier le comportement des points fixes du système de Lorenz

Soit le système dynamique non-linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

qui s'écrit sous la forme d'une somme de deux termes : une partie linéaire et une partie non-linéaire.

a) On s'intéresse à étudier la partie linéaire. Montrer que lorsque le paramètre  $\alpha$  change de signe, l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable.

b) Étudier la stabilité de l'origine.

c<sub>1</sub>) Montrer en effectuant le changement de variables en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , que le système s'écrit sous la forme

$$(II) \begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

c<sub>2</sub>) Que peut-on dire sur la vitesse angulaire ?

c<sub>3</sub>) Discuter la stabilité des points d'équilibre pour  $\alpha \leq 0$ .

c<sub>4</sub>) Montrer pour  $\alpha > 0$ , que la première équation du système (II) admet un point

1) Points fixes du système (5.5) sont  $0, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}$ .

$f'(0) = r$  alors 0 est stable si  $r \in [-1, 1]$  et instable si  $r \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

$f'(\pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}) = -2r + 3$  alors  $\pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}$  sont stables si  $r \in ]1, 2[$  et instable si  $r \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ . Le point fixe n'existe pas pour  $r \in [0, 1]$ .

Exercice 1 : Soit le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) - y(t) + e^{-t}. \end{cases}$$

1. Déterminer la solution générale du système.
2. Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité de la solution du système pour toute condition initiale  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  ?

**Exercice 2** L'analyse des circuits électriques RLC conduit à des équations différentielles sur  $\mathbb{R}^2$  du type

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - h(i), \\ C \frac{dv}{dt} = -i, \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ . Les variables  $v$  et  $i$  sont respectivement un voltage et une intensité et les constantes positives  $L$  et  $C$  une résistance et une capacité. L'énergie du système est  $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$ .

1. Déterminer l'équilibre de l'équation (5.6) et discuter sa stabilité en fonction de  $h'(0)$ .
2. Supposons que  $h$  vérifie  $xh(x) > 0$  pour  $x \neq 0$ . Montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable et déterminer son bassin d'attraction.

1. L'équilibre est le point  $i = 0, v = h(0)$ . Le linéarisé de l'équation différentielle en ce point est  $y'(t) = Ay(t)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{h'(0)}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $\det A = 1/(LC) > 0$ . Les valeurs propres de  $A$  ont donc des parties réelles de même signe, qui est aussi le signe de  $\operatorname{tr} A = -h'(0)/L$  (d'après la remarque 2.6). On en conclut que :

- si  $h'(0) > 0$ , l'équilibre est asymptotiquement stable ;
- si  $h'(0) < 0$ , l'équilibre n'est pas stable ;
- si  $h'(0) = 0$ , l'équilibre n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire en utilisant le linéarisé.

2. Notons d'abord que l'hypothèse sur  $h$  implique  $h(0) = 0$ . L'équilibre est donc l'origine. Essayons de montrer que l'énergie  $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0. On a déjà :

- 0 est un minimum strict de  $E$  ;
- $\frac{dE}{dt} = -ih(i) < 0$  si  $i \neq 0$ .

On a donc montré que, le long d'une trajectoire  $x(t) = (i(t), v(t))$ , la fonction  $E(x(t))$  est strictement décroissante tant que  $i(t) \neq 0$ . Or, si  $x(t)$  n'est pas identiquement nulle, les instants  $t_0$  où  $i(t_0) = 0$  sont isolés puisqu'alors  $i'(t_0) = v(t_0) \neq 0$ . Ainsi  $\frac{dE}{dt} < 0$  presque partout le long d'une trajectoire ; on en déduit que  $E(x(t))$  est strictement décroissante.

Par conséquent la fonction  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0, ce qui montre que 0 est un équilibre asymptotiquement stable. Comme de plus  $E(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ , le bassin d'attraction de 0 est  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

# Chapitre 4: Introduction au contrôle des systèmes dynamiques : contrôle optimal, stabilisation.

Introduction to  
the Mathematical Theory of Control

Alberto Bressan and Benedetto Piccoli

Control theory provides a different paradigm. We now assume the presence of an external agent, i.e. a “controller”, who can actively influence the evolution of the system. This new situation is modelled by a **control system**, namely

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} \quad (1.3)$$

where  $\mathcal{U}$  is a family of admissible control functions. In this case, the rate of change  $\dot{x}(t)$  depends not only on the state  $x$  itself, but also on some external parameters, say  $u = (u_1, \dots, u_m)$ , which can also vary in time. The control function  $u(\cdot)$ , subject to some constraints, will be chosen by a controller in order to modify the evolution of the system and achieve certain preassigned goals — steer the system from one state to another, maximize the terminal value of one of the parameters, minimize a certain cost functional, etc...

In a standard setting, we are given a set of control values  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ . The family of admissible control functions is defined as

$$\mathcal{U} \doteq \left\{ u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m; \quad u \text{ measurable, } u(t) \in \mathbf{U} \text{ for a.e. } t \right\}. \quad (1.4)$$

The system (1.1) can then be written as a **differential inclusion**, namely

$$\dot{x} \in F(x) \tag{1.5}$$

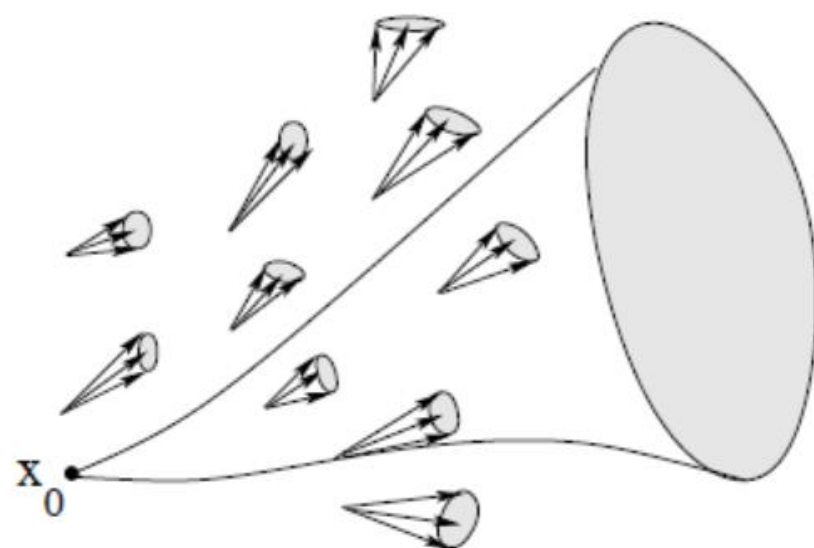
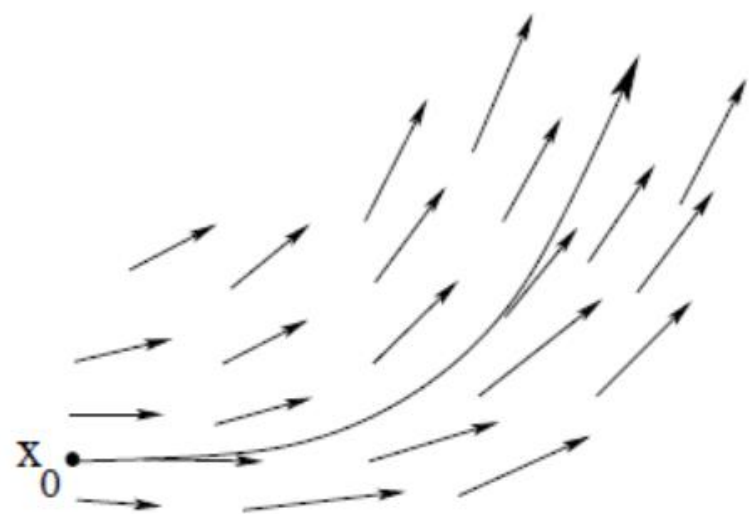
where the set of possible velocities is given by

$$F(x) \doteq \{y; \ y = f(x, u) \text{ for some } u \in \mathbf{U}\}. \tag{1.6}$$

Clearly, every admissible trajectory of the control system (1.3) is also a solution of (1.5). Under some regularity assumptions on  $f$ , it turns out that the converse is also true: given any absolutely continuous trajectory  $t \mapsto x(t)$  of (1.5), one can select a measurable control function  $t \mapsto u(t) \in \mathbf{U}$  such that

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

at almost every time  $t$ . Differential inclusions often provide a convenient approach for the analysis of control systems.



The control law can be assigned in two basically different ways. In “open loop” form, as a function of time:  $t \mapsto u(t)$ , and in “closed loop” or *feedback*, as a function of the state:  $x \mapsto u(x)$ . Implementing an open loop control  $u = u(t)$  is in a sense easier, since the only information needed is provided by a clock, measuring time. On the other hand, to implement a closed loop control  $u = u(x)$  one constantly needs to measure the state  $x$  of the system.

**Example 1.1 (boat on a river).** Consider a river with straight course. Using a set of planar coordinates, assume that it occupies the horizontal strip

$$\mathcal{S} \doteq \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -1 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Moreover, assume that speed of the water is given by the velocity vector  $\mathbf{v}(x_1, x_2) = (1 - x_2^2, 0)$ .

If a boat on the river is merely dragged along by the current, its position will be determined by the differential equation

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (1 - x_2^2, 0).$$

On the other hand, if the boat is powered by an engine, then its motion can be modelled by the control system

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \mathbf{v} + \mathbf{u} = (1 - x_2^2 + u_1, u_2), \tag{1.9}$$

where the vector  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  describes the velocity of the boat relative to the water. The set  $\mathcal{U}$  of admissible controls consists of all measurable functions  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  taking values inside the closed disc

$$\mathbf{U} \doteq \left\{ (\omega_1, \omega_2) : \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq M \right\}. \tag{1.10}$$

The constant  $M$  accounts for the maximum speed (in any direction) that can be produced by the engine.

Given an initial condition  $(x_1, x_2)(0) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , solving (1.9) one finds

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \bar{x}_1 + t + \int_0^t u_1(s) ds - \int_0^t \left( \bar{x}_2 + \int_0^s u_2(r) dr \right)^2 ds, \\
x_2(t) &= \bar{x}_2 + \int_0^t u_2(s) ds \quad (-1 \leq x_2 \leq 1).
\end{aligned}$$

In particular, the constant control  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \equiv (-2/3, 1)$  takes the boat from a point  $(\bar{x}_1, -1)$  on one side of the river to the point  $(\bar{x}_1, 1)$  on the opposite side, in two units of time. It is not difficult to show that if  $M > 0$  the boat can be steered from any point  $P$  on the river to any other point  $Q$ .

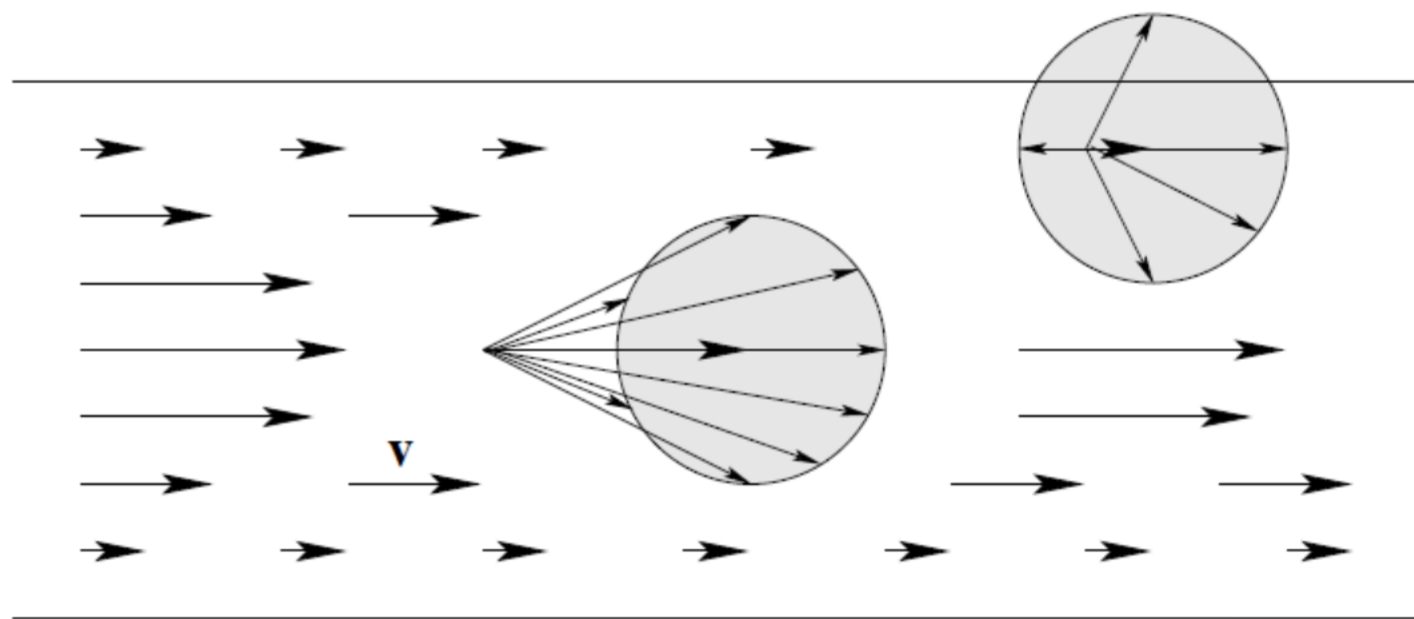


Figure 1.3: Velocities of the water and of the boat.

A second, very important area of control theory is concerned with **optimal control**. In many applications, among all strategies which accomplish a certain task, one seeks an optimal one, based on a given performance criterion. In mathematical terms, a performance criterion can be defined by an integral functional of the form

$$J = \int_0^T L(t, x, u) dt. \quad (1.17)$$

The value of  $J$  will have to be optimized among all admissible trajectories of (1.3), with a number of initial or terminal constraints.

For example, among all controls which steer the system from the initial point  $\bar{x}$  to some point on a target set  $\Omega$  at time  $T$ , we may seek the one that minimizes the cost functional (1.17). This problem is formulated as

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \int_0^T L(t, x, u) dt \quad (1.18)$$

subject to

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = \bar{x}, \quad x(T) \in \Omega. \quad (1.19)$$

The basic mathematical theory of optimal control has been concerned with three main issues:

- (i) *Existence of optimal controls.* Under a suitable convexity assumption, optimal solutions can be constructed following the direct method in the Calculus of Variations, i.e., as limits of minimizing sequences, relying on compactness and lower semi-continuity properties. When the convexity condition is not satisfied, the problem usually does not admit any optimal solution. In some special cases, however, the existence of optimal control can still be proved, using a variety of more specialized techniques.
- (ii) *Necessary conditions for the optimality of a control.* The ultimate goal of any set of necessary conditions is to isolate a hopefully unique candidate for the minimum. The major result in this direction is the celebrated Pontryagin Maximum Principle , which extends to control systems the Euler-Lagrange and the Weierstrass necessary conditions for a strong local minimum in the Calculus of Variations. These first order conditions have been supplemented by several high order conditions, which provide additional information in a number of special cases.

- (iii) *Sufficient conditions for optimality.* For some special classes of optimal control problems, one finds a unique control  $u^*(\cdot)$  which satisfies the Pontryagin's necessary conditions. In this case,  $u^*$  provides the unique solution to the optimization problem.

# Control Systems

In this chapter we begin a study of the control system:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (3.1)$$

where the set of admissible controls is defined as

$$\mathcal{U} = \{ u(\cdot) \text{ measurable, } u(t) \in \mathbf{U} \text{ for all } t \} \quad (3.2)$$

We shall assume the following basic hypothesis:

(H) The set  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$  of control values is compact,  $\Omega$  is an open subset of  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , the function  $f : \Omega \times \mathbf{U} \mapsto \mathbb{R}^n$  is continuous in all variables and continuously differentiable w.r.t.  $x$ .

We say that an absolutely continuous function  $x(\cdot)$  defined on some interval  $[a, b]$  is a solution of (3.1) if its graph  $\{(t, x(t)); a \leq t \leq b\}$  is entirely contained in  $\Omega$ , and if there exists a measurable control  $u$ , taking values inside  $\mathbf{U}$ , such that  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$  for almost every  $t \in [a, b]$ .

## 3.2 Fundamental properties of trajectories

Let  $f, \mathbf{U}$  satisfy the basic hypothesis (H). Let an initial value  $\bar{x}$  be given. For any measurable control  $u : [0, T] \mapsto \mathbf{U}$ , the Cauchy problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = \bar{x}, \quad (3.5)$$

is equivalent to

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)), \quad x(0) = \bar{x}, \quad (3.6)$$

where  $g(t, x) = f(t, x, u(t))$  satisfies the basic assumptions (A) and (B) of Chapter 2. By the results proved in Chapter 2, if  $(0, \bar{x}) \in \Omega$ , there exists  $\varepsilon > 0$  such that the Cauchy problem (3.6) has a unique local solution, defined on the small time interval  $[0, \varepsilon]$ . To study how the solution  $x(\cdot, u)$  varies with the control  $u$ , we first consider the globally bounded case, assuming

(H\*) The set  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$  of control values is compact. The function  $f = f(t, x, u)$  is defined and continuous on the entire space  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{U}$ , continuously differentiable w.r.t.  $x$ , and satisfies

$$|f(t, x, u)| \leq C, \quad \|D_x f(t, x, u)\| \leq L, \quad (3.7)$$

for some constants  $C, L$  and all  $t, x, u$ .

**Theorem 3.2** (Global existence and continuous dependence). *Let the assumption  $(H^*)$  hold. Then, for every  $T > 0$ ,  $u \in \mathcal{U}$ , the Cauchy problem (3.5) has a unique solution  $x(\cdot, u)$  defined for all  $t \in [0, T]$ . The “input–output” map  $u(\cdot) \mapsto x(\cdot, u)$  is continuous from  $\mathbf{L}^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$  into  $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ .*

**Proposition 3.1** *Let  $T > 0$  be given, and assume that  $f, \mathbf{U}$  satisfy the basic hypothesis  $(H^*)$ . Then the input–output map  $u(\cdot) \mapsto x(\cdot, u)$  is Lipschitz continuous from the complete metric space*

$$\mathcal{U} = \{u : [0, T] \mapsto \mathbf{U}; \quad u \text{ measurable}\},$$

*with the distance  $d(\cdot, \cdot)$  defined at (3.11), into  $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ .*

## 3.5 Reachable sets

In this section we consider a control system whose dynamics is independent of time:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = \bar{x}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (3.40)$$

where the set  $\mathcal{U}$  of admissible controls is given by (3.2). The *reachable set*  $R(\tau, \bar{x})$  at time  $\tau$ , starting from  $\bar{x}$ , is then defined as

$$R(\tau, \bar{x}) \doteq \left\{ x(\tau); \quad x(\cdot) \text{ is a solution of (3.40) with } x(0) = \bar{x} \right\}.$$

More generally, given a set  $K \subset \mathbb{R}^n$  of initial states, we define  $R(\tau, K)$  as the reachable set at time  $\tau$ , starting from points in  $K$ :

$$R(\tau, K) \doteq \left\{ x(\tau); \quad x(\cdot) \text{ is a solution of (3.1) with } x(0) \in K \right\}.$$

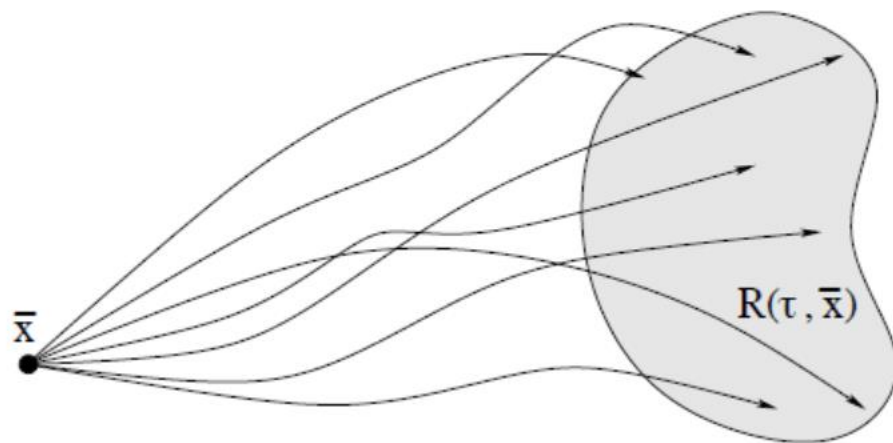


Figure 3.5: The reachable set at time  $\tau > 0$ , starting from the point  $\bar{x}$ .

**Theorem 3.8 (Closure of the reachable set).** *Let  $f, \mathbf{U}$  satisfy the basic assumption (H). Assume that the graphs of all solutions of (3.40) starting from any point  $\bar{x} \in K$  are contained in some compact set  $K' \subset \Omega$ , for  $t \in [0, T]$ . If all sets of velocities  $F(x) = \{f(x, \omega); \omega \in \mathbf{U}\}$  are convex, then, for every  $\tau \in [0, T]$ , the reachable set  $R(\tau, K)$  is compact.*

**Theorem 3.9 (Outer estimates on the reachable sets).** *Consider the control system (3.40), satisfying the basic assumptions (H). Let  $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  be a  $C^1$  function such that*

$$\nabla \phi(x) \cdot f(x, u) \leq 1 \quad \text{whenever } \phi(x) \in [0, T], \quad u \in \mathbf{U}.$$

*If the set  $K$  of initial states satisfies*

$$K \subseteq \{x; \phi(x) \leq 0\}, \tag{3.42}$$

*then for every  $\tau \in [0, T]$  the reachable set  $R(\tau, K)$  is contained in the corresponding sub-level set of  $\phi$ , namely (see figure 3.7)*

$$R(\tau, K) \subseteq \{x; \phi(x) \leq \tau\}. \tag{3.43}$$

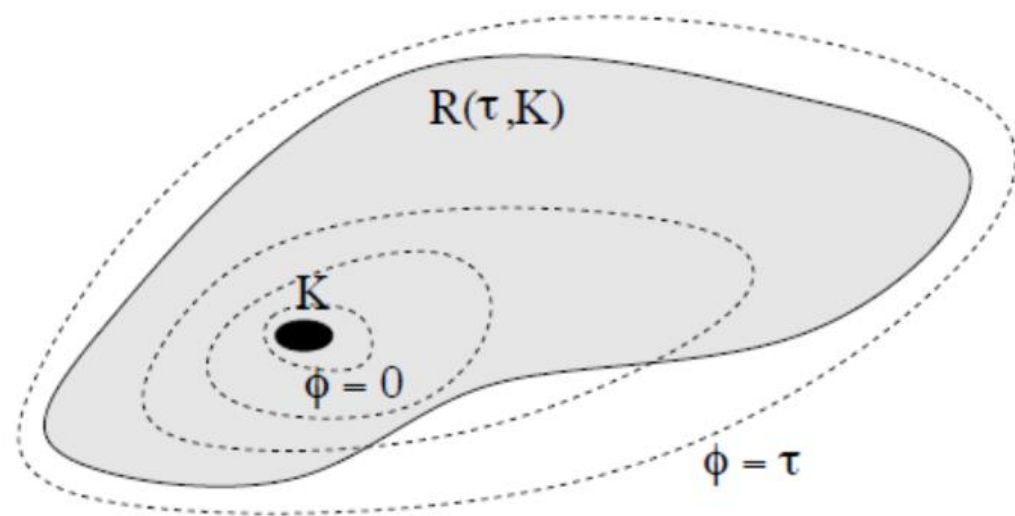


Figure 3.7: The reachable set  $R(\tau, K)$  is contained in the level set  $\{\phi(x) \leq \tau\}$ .

### 3.6 Linear systems

In this section we analyze in greater detail the case of a linear system :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = \bar{x}, \quad u(t) \in \mathbf{U}. \quad (3.51)$$

Here  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ , while  $A(t)$  and  $B(t)$  are respectively  $n \times n$  and  $n \times m$  matrices, continuously depending on  $t$ .

Calling  $M(t, s)$  the matrix fundamental solution for the homogeneous problem

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (3.52)$$

the solution of the Cauchy problem (3.51) can be written as

$$x(t) = M(t, 0) \bar{x} + \int_0^t M(t, s) B(s) u(s) ds. \quad (3.53)$$

We begin by examining the case where  $\bar{x} = 0$  and the set  $\mathbf{U}$  is the entire space  $\mathbb{R}^m$ . The reachable set at a time  $t > 0$  is then described by

$$R(t) = \left\{ \int_0^t M(t, s) B(s) u(s) ds; \quad u \in \mathbf{L}^1([0, t]; \mathbb{R}^m) \right\}. \quad (3.54)$$

**Corollary 3.3** *The linear system (3.55) is completely controllable if and only if*

$$\text{Rank}\left(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\right) = n. \quad (3.60)$$

**Example 3.6** Consider the linear system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R},$$

where

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

The controllability matrix is given by:

$$C(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

The rank of  $C(A, B)$  is two, thus the system is not controllable. Let us find a row vector  $p = (p_1, p_2, p_3)$  which is orthogonal to  $B$ ,  $AB$  and  $A^2B$ :

$$pB = pAB = pA^2B = 0.$$

This yields the system of three linear homogeneous equations

$$p_2 - p_3 = p_1 + 2p_2 - 2p_3 = p_1 + 4p_2 - 4p_3 = 0.$$

A non-trivial solution is  $p = (0, 1, 1)$ . From the proof of Theorem 3.11, it follows that the reachable set at any time  $t > 0$  coincides with the subspace orthogonal to  $p$ , namely

$$R(t) = \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_2 + x_3 = 0\}.$$

## 3.7 Local controllability of nonlinear systems

We now consider a general nonlinear system, with dynamics independent of time:

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad u(t) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m. \qquad (3.62)$$

Given a point  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , we say that the system is *(small time) locally controllable at  $\bar{x}$*  if, for every  $t > 0$ , the set  $R(t, \bar{x})$  contains a neighborhood of  $\bar{x}$ . Roughly speaking, this means that the system can be steered from  $\bar{x}$  to all nearby points, within a small interval of time.

**Theorem 3.12 (Small time local controllability).** *Consider the control system (3.40) and assume that set  $\mathbf{U}$  of admissible control values contains a neighborhood of the origin  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ . At a given point  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , assume that*

(a)  $f(\bar{x}, 0) = 0$ ,

(b) *Defining the matrices of partial derivatives of  $f$  w.r.t.  $x$  and  $u$  computed at the equilibrium point  $(\bar{x}, 0)$*

$$A \doteq D_x f(\bar{x}, 0), \quad B \doteq D_u(\bar{x}, 0), \quad (3.63)$$

*the linearized system*

$$\dot{x} = A \cdot (x - \bar{x}) + B u \quad (3.64)$$

*is completely controllable, i.e.  $A, B$  satisfy (3.60).*

*Then the system (3.40) is locally controllable at the point  $\bar{x}$ .*

**Example 3.7** Consider the motion of a forced pendulum, described by the equation

$$\ddot{x}(t) + \sin x(t) = u(t) \quad u(t) \in [-1, 1]. \quad (3.66)$$

Taking  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , we can rewrite (3.66) as a first order system, namely

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 + u \end{pmatrix}.$$

When  $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^2$ , The matrices of partial derivatives in (3.63) are computed as

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The controllability matrix here is

$$(B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

This matrix has full rank, hence the system is locally controllable at the origin.

## Problems

3.1. A forced linear pendulum is described by the system

$$\ddot{x} + x = u \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad (3.82)$$

Write (3.82) as a first order system, taking  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ . Show that this system is completely controllable.

Next, assume that the admissible controls are only those taking values inside the set  $\mathbf{U} = [-1, 1]$ . Show that the reachable set at time  $\tau > 0$ , starting from the origin, satisfies

$$R(\tau) \subseteq \{(x_1, x_2); \ x_1^2 + x_2^2 \leq \tau^2\}.$$

Hint: apply Theorem 3.9 with  $\phi(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

3.8. Consider the control system

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (x_1 + x_2^2 + u, \ \sin x_3 + u^2, \ x_1 + \sin x_2 + \cos x_3 - 1),$$

with  $x(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$  and  $|u| \leq 1$ . Prove that it is locally controllable at the origin.

3.9. Consider the control system on  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in \mathbf{U} = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}.$$

Describe the reachable set  $R(\tau)$  at any time  $\tau > 0$ . For a given point  $y \in R(\tau)$ , construct a control function  $u : [0, \tau] \mapsto \mathbf{U}$  that steers the system to the point  $y$  and is discontinuous at no more than  $n$  times, say  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \tau$ .

# Asymptotic stabilization

Consider a control system described by

$$\dot{x} = f(x, u) .$$

Assume that  $f(\bar{x}, 0) = 0$ , so that  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  is an equilibrium point when the null control  $u \equiv 0$  is applied. In general, this equilibrium may not be stable: a trajectory which starts at a point  $x_0 \approx \bar{x}$  may get very far from  $\bar{x}$  at large times. For many engineering applications, an important problem is to design a feedback control  $U = U(x)$  such that the resulting system

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$

is asymptotically stable at the point  $\bar{x}$ .

## 4.2 Stabilization of linear control systems

In this section we study the linear control systems

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.4)$$

where  $A$  is an  $n \times n$  matrix and  $B$  an  $n \times m$  matrix. If all the eigenvalues of the matrix  $A$  have negative real part, the system is already stable in connection with the null control  $u \equiv 0$ .

In the case where the uncontrolled system (4.2) is unstable, our aim is to find a linear feedback  $U(x) = Fx$ , with  $F$  an  $m \times n$  matrix, such that the resulting linear system

$$\dot{x} = (A + BF)x \quad (4.5)$$

is Lyapunov stable at the origin. In this case, the control  $U(x) = Fx$  is called a **stabilizing feedback**. By Theorem 4.2, this will be the case if and only if all eigenvalues of the matrix  $A + BF$  have negative real part. The main result given below will show that, if the system (4.4) is controllable, then one can always construct a stabilizing feedback. Toward a general result on stabilization by linear feedbacks, some preliminary lemmas are needed. The next result shows that the space  $\mathbb{R}^n$  can be decomposed as a sum of a subspace where the system is completely controllable, and another subspace where the control has no effect.

**Lemma 4.1** *Let  $d = \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  be the rank of the controllability matrix for the linear system (4.4). Then, by a linear change of variables, the control system can be written in the form:*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + A_2 z + B_1 u \\ \dot{z} &= A_3 z, \end{aligned} \quad (4.6)$$

where  $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ .

**Lemma 4.2 (Pole shifting).** *If the control system (4.4) is controllable, then for any given set of real numbers  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  one can find an  $m \times n$  matrix  $F$  such that the square matrix  $A + BF$  has  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  as eigenvalues.*

$$\dot{x} = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (4.2)$$

**Theorem 4.4 (Feedback stabilization of linear systems).** *Consider the linear control system (4.4), and let (4.6) be its decomposition, in terms of a fully controllable component  $y$  and a non-controllable component  $z$ . If all the eigenvalues of the matrix  $A_3$  have strictly negative real part, then there exists a linear feedback  $U = Fx$  that renders the system Lyapunov stable at the origin.*

*In particular, the conclusion holds when the system (4.4) is completely controllable.*

## 4.3 Stabilization of nonlinear systems

We now consider a general nonlinear system:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad u(t) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m. \quad (4.13)$$

The first result gives conditions for the existence of a stabilizing feedback on a small neighborhood of the origin, and is obtained by a linearization technique.

**Theorem 4.5** *Consider the control system (4.13), satisfying the standard conditions (H) in Chapter 3. Assume that  $f$  is continuously differentiable and that  $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  contains a neighborhood of the origin. If*

(a)  $f(0, 0) = 0,$

(b) *Setting*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0),$$

*the linearized system  $\dot{x} = Ax + Bu$  with is completely controllable.*

*Then there exists a neighborhood of the origin  $\Omega$  such that the system restricted to  $\Omega$  admits a continuous stabilizing feedback.*

**Theorem 4.6** *Consider the control system (4.13), assume  $\mathbf{U} = \mathbb{R}^m$  and  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuously differentiable. If there exists a smooth stabilizing feedback in a neighborhood of the origin, then the map  $f$  is open at 0, i.e. for every  $\varepsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that*

$$\{y; |y| < \delta\} \subset \{f(x, u); |x| + |u| \leq \varepsilon\}. \quad (4.17)$$

**Example 4.3 (Brockett)** Consider the control system on  $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 \quad (4.18)$$

with

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -x_2), \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, x_1).$$

Computing the Lie bracket, one finds

$$[f, g](x_1, x_2, x_3) \equiv (0, 0, 2).$$

Therefore, the Lie algebra  $\mathcal{L}$  generated by  $f_1$  and  $f_2$  satisfies

$$\mathcal{L}(x) \supset \text{span}\{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\}.$$

for all  $x \in \mathbb{R}^3$ . According to Theorem 3.14, every initial point can be steered to the origin in finite time.

However, a smooth stabilizing feedback to the origin for system (4.18) does not exist. Indeed, the map:

$$(x, u) \mapsto f(x, u) = (u_1, u_2, u_2x_1 - u_1x_2).$$

is not open at the origin. To verify this claim, consider the velocity  $v^\delta \doteq (0, 0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , and assume that  $v^\delta = f(x, u)$  for some  $(x, u)$ . Then, equating the first two components, we get  $u_1 = u_2 = 0$ . Hence  $\delta = u_2x_1 - u_1x_2 = 0$ , reaching a contradiction.

# Problems

4.1. Consider the linear differential equation  $\dot{x} = Ax$  on  $\mathbb{R}^2$ , with

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Compute a Lyapunov function for the system on  $\mathbb{R}^2$ .

4.3. Write the linear control system

$$\dot{x}_1 = 2x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -x_3, \quad \dot{x}_3 = x_3 + u_1..$$

in the standard form  $\dot{x} = Ax + Bu$ . Find a linear feedback  $u = Fx$  which stabilizes the system to the origin.

4.4. Consider the linear control system  $\dot{x} = Ax + Bu$ , with

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prove that this system is completely controllable. Find a linear feedback matrix  $F$  such that  $(A+BF)^3 = 0$ . Compute the solutions for the resulting system with feedback:  $\dot{x} = Ax + BFx$ .

**Exemple 4.2.1** *La position d'un train sur une voie est repérée par sa position  $X(t)$  et son accélération est contrôlée par la relation*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = U.$$

1. *Écrire cette équation sous la forme d'un système de contrôle*

$$\dot{X} = AX + BU.$$

2. *Montrer que le système est contrôlable.*

**Solution.** 1. Soit l'état  $X = (x, \dot{x})$ , on trouve

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(t).$$

2. La matrice de contrôlabilité  $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 2, le système est alors contrôlable.

**Exercice** : On considère le système de commande dans  $\mathbb{R}^3$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

où  $u(\cdot)$  est une commande à valeurs réelles,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

le paramètre  $a$  étant un réel.

1. Montrer que le système n'est pas commandable.
2. Montrer que

$$\mathcal{A}(\tau, 0) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$$

où  $\mathcal{A}(\tau, 0)$  est l'ensemble atteignable en temps  $\tau$  à partir de 0.

3. Peut-on savoir à priori si le système est asymptotiquement stabilisable par retour d'état proportionnel?

FIN