

إمتحان

يوضح النموذج التالي العلاقة بين الطلب على مادة القهوة (Q_i) من جهة وسعر مادة الشاي (سلعة بديلة) $PTHE$ وسعر القهوة

$$Q_i = a_0 + b_1 PTHE_i + b_2 PCAFE_i + \varepsilon_i$$

من جهة أخرى في الجزائر: $PCAFE$

◀ إملأ فراغات الجدول التالي مستعينا بالمعطيات المتوفرة مع بيان طريقة الحل في الجدول الملحق:

t_{cal}	$\alpha = 5\%$	$V(\hat{b}_i)$	مقدر المعلمة	المعلمة	10	n
8,062	(6)	(5)	a_0	(1)	R^2	
(8)	(7)	-0,1882	b_1	(2)	درجة الحرية	
(9)	0,01268	0,3186	b_2	(3)	$\sum_{i=1}^{10} (\hat{Q}_i - \bar{Q})^2$	
$(p'p)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,00342 & -0,00074 & -0,01826 \\ -0,00074 & 0,10317 & -0,12548 \\ -0,01826 & -0,12548 & (10) \end{bmatrix} p = \begin{pmatrix} 1 PTHE_1 PCAFE_1 \\ 1 PTHE_2 PCAFE_2 \\ 1 PTHE_{10} PCAFE_{10} \end{pmatrix}$					168,85	$\sum_{i=1}^{10} (Q_i - \bar{Q})^2$
					0,337	$\sum_{i=1}^{10} e_i^2$
					(4)	$F_{cal} \quad \alpha = 5\%$
$R^2 = \frac{\sum (\hat{Q} - \bar{Q})^2}{\sum (Q - \bar{Q})^2} = \frac{\sum (Q - \bar{Q})^2 - \sum e_i^2}{\sum (Q - \bar{Q})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (Q - \bar{Q})^2} = 1 - \frac{0,337}{168,85} = 0,998 \quad (1)$						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						
(7)						

(8)

(9)

(10)

ما مدى مطابقة النموذج للنظرية الاقتصادية للمستهلك؟

أدرس المعنوية الجزئية والكلية للنموذج إذا علمت ما يلي: مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ ، $t_{tab} = 2,365$ و $F_{tab} = 4,74$

أعط توقعاً لما سيكون عليه الطلب على مادة القهوة إذا كان سعر الشاي 10 ون وسعر القهوة 10 ون، وحدد مجالا للتوقع عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

"الإجابة النموذجية لامتحان النمذجة الإحصائية"

التمرين الأول

t_{cal} $\alpha = 5\%$	$V(\hat{a}_i)$	مقدر المعلمة	المعلمة	10 (0)	n
8,062	0,0002(6)	0,1140 (5)	a_0	0,998(1)	R^2
-2,6615(8)	0,005(7)	-0,1882	$\hat{a}_1$	7(2)	درجة الحرية
2,8293(9)	0,01268	0,3186	$\hat{a}_2$	168,513(3)	$\sum_{i=1}^{10} (\hat{Q}_i - \bar{Q})^2$
$(p'p)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,00342 & -0,00074 & -0,01826 \\ -0,00074 & 0,10317 & -0,12548 \\ -0,01826 & -0,12548 & (0,2636) \end{bmatrix}$				168,85	$\sum_{i=1}^{10} (Q_i - \bar{Q})^2$
				0,337	$\sum_{i=1}^{10} e_i^2$
				1663.333(4)	$F_{cal} \quad \alpha = 5\%$

(0) من خلال المعطيات الخاصة بالجميع $\sum_{i=1}^{10} (\hat{Q}_i - \bar{Q})^2$ نلاحظ أن $n=10$

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Q} - \bar{Q})^2}{\sum (Q - \bar{Q})^2} = \frac{\sum (Q - \bar{Q})^2 - \sum e_i^2}{\sum (Q - \bar{Q})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (Q - \bar{Q})^2} = 1 - \frac{0,337}{168,85} = 0,998 \quad (1)$$

(2) درجة الحرية = عدد المشاهدات الكلية - عدد المعلمات المقدرة

$$7 = 3 - 10 = \text{درجة الحرية}$$

$$\sum_{i=1}^{10} (\hat{Q}_i - \bar{Q})^2 = \sum_{i=1}^{10} (Q_i - \bar{Q})^2 - \sum_{i=1}^{10} e_i^2 = 168,85 - 0,337 = 168,513 \quad (3)$$

$$F_{cal} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0,998/2}{(1-0,998)/10-3} = \frac{0,499}{0,0003} = 1663,333 \quad (4)$$

(5)

$$t_c = \frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V(\hat{a}_0)}} \Rightarrow \hat{a}_0 = t_{cal} \times \sqrt{V(\hat{a}_0)}; \quad V(\hat{a}_0) = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1} \times b_{00} = \frac{0,337}{10-2-1} \times 0,00342 = 0,0002$$

$$\hat{a}_0 = t_{cal} \times \sqrt{V(\hat{a}_0)} = 8,062 \times \sqrt{0,0002} = 0,1140$$

$$V(\hat{a}_0) = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1} \times b_{00} = \frac{0,337}{7} \times 0,00342 = 0,0002 \quad (6)$$

$$V(\hat{a}_1) = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1} \times b_{11} = \frac{0,337}{7} \times 0,10317 = 0,0481 \times 0,10317 = 0,005 \quad (7)$$

(8)

$$t_{cal} = \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{V(\hat{a}_1)}} = \frac{-0,1882}{\sqrt{0,005}} = -2,6615$$

$$t_{cal} = \frac{\hat{a}_2}{\sqrt{V(\hat{a}_2)}} = \frac{0,3186}{\sqrt{0,01268}} = 2,8293 \quad (9)$$

$$V(\hat{a}_2) = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1} \times b_{22} \Rightarrow b_{22} = \frac{V(\hat{a}_2)}{\sum e_i^2 / n-k-1} = \frac{0,01268}{0,0481} = 0,2636 \quad (10)$$

مدى مطابقة النموذج للنظرية الاقتصادية للمستهلك

الإجابة: إن النموذج لا يتوافق مع ما تمليه النظرية الاقتصادية للمستهلك لأن إشارة معامل سعر حليب البودرة موجبة وإشارة معامل سعر الحليب السائل سالبة، وهذا يعني أن هناك علاقة طردية بين كمية الطلب على حليب البودرة وسعره وعلاقة عكسية بين كمية الطلب على حليب البودرة وسعر الحليب السائل (كسلعة بديلة) وهذا هو عكس ما تفترضه النظرية الاقتصادية للمستهلك

دراسة الجودة:

نلاحظ أن معامل التحديد قوي جدا.

نقوم بدراسة معنوية معامل الارتباط:

$$\begin{cases} H_0 : r = 0 \\ H_1 : r \neq 0 \end{cases}$$

$$t_{cal} = \frac{r\sqrt{n-k-1}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,9989\sqrt{7}}{\sqrt{1-0,998}} = \frac{2,6428}{0,0447} = 59,1230$$

نلاحظ أن $|t_{cal}| = 59,123 > t_{tab}$ ومنه نقبل الفرضية H_1 ونقول أن r معنوي.

1. $\hat{a}_0$: نلاحظ أن $|t_{cal}| = |8,062| > t_{tab}$ ومنه نقبل الفرضية H_1 ونقول أن $\hat{a}_0$ معنوي.
 2. $\hat{a}_1$: نلاحظ أن $|t_{cal}| = |-2,6615| > t_{tab}$ ومنه نقبل الفرضية H_1 ونقول أن $\hat{a}_1$ معنوي.
 3. $\hat{a}_2$: نلاحظ أن $|t_{cal}| = |2,8293| > t_{tab}$ ومنه نقبل الفرضية H_1 ونقول أن $\hat{a}_2$ معنوي.
- من خلال كل ما سبق يمكن القول أن النموذج صالح للتنبؤ

1. التوقع بقيمة الطلب:

$$\hat{Y} = 0,1140 - 0,1882 P_1 + 0,3186 P_2$$

لدينا:

$$\hat{Y} = 0,1140 - 0,1882(10) + 0,3186(10) = 1,418$$

2. تحديد مجال الثقة للتوقع:

$$Y_{PR} \in \hat{Y}_{PR} \pm t_{cal} \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}} \sqrt{P'_{PR} (P'P)^{-1} P_{PR} + 1}$$

لدينا:

$$Y_{PR} \in 1,418 \pm 2,365 \sqrt{0,0481} \sqrt{11,2044 + 1}$$

$$Y_{PR} \in 1,418 \pm 1,8120$$

$$Y_{PR} \in [-0,394 \quad 3,23]$$

التمرين الثاني:

العلاقة الأولى:

$$[t_{Cal}(\hat{a}_1)]^2 = \frac{\hat{a}_1^2}{V(\hat{a}_1)} = \frac{\hat{a}_1^2}{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-2}} = \frac{\hat{a}_1^2 \sum (X - \bar{X})^2}{\sum (Y - \hat{Y})^2} = \frac{\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \hat{Y})^2} = \frac{SCE}{SCR/n-2} = F_{Cal}$$

العلاقة الثانية:

$$r^2 = \left(\frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} \right)^2 = \frac{Cov(X, Y)^2}{V(X)V(Y)} = \frac{1/n^2 (\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}))^2}{1/n^2 \sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2} = \frac{(\sum XY - n\bar{X}\bar{Y})^2}{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}$$

نضرب كل من البسط والمقام في $\sum (X - \bar{X})^2$ فنحصل على ما يلي:

$$\frac{\sum (X - \bar{X})^2 (\sum XY - n\bar{X}\bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2 (\sum (X - \bar{X})^2)^2} = \frac{\hat{a}_1^2 \sum (X - \bar{X})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2} = \frac{SCE}{SCT} = R^2$$

إنتهى.