Exercice 1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$. Appliquer la règle du trapèze simple et la règle de Simpson simple afin d'approcher $\int_0^2 f(x)\,dx$. Calculer les valeurs approchées pour f donnée par

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^4, \quad f(x) = \tfrac{1}{x+1}, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = e^x$$

et comparer avec les valeurs exactes correspondantes.

Solution. La valeur approchée de $I(f) = \int_0^2 f(x)\,dx$ obtenue en appliquant la règle du trapèze simple est donnée par

$$I_T(f) = \tfrac{2-0}{2}\,(f(0) + f(2)) = f(0) + f(2).$$

De manière similaire, la valeur approchée de $I(f)$ obtenue en appliquant la règle de Simpson simple est donnée par

$$I_S(f) = \tfrac{2-0}{6}\,(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \tfrac{1}{3}\,(f(0) + 4f(1) + f(2))\,.$$

Le tableau résume les résultats obtenus pour les différentes fonctions

$f(x)$	x^2	x^4	$\frac{1}{x+1}$	$\sin x$	e^x
$I(f)$	$\frac{8}{3}$	$\frac{32}{5}$	1.0986123	1.4161468	6.3890561
$I_T(f)$	4	16	1.3333333	0.9092974	8.3890561
$I_S(f)$	$\frac{8}{3}$	$\frac{20}{3}$	1.1111111	1.4250604	6.4207278

Le tableau des erreurs montre que pour ces fonctions, la règle de Simpson simple est plus précise que la règle du trapèze simple.

$f(x)$	x^2	x^4	$\frac{1}{x+1}$	$\sin x$	e^x
$\lvert I(f) - I_T(f)\rvert$	1.3333333	9.6	0.2347210	0.5068494	2
$\lvert I(f) - I_S(f)\rvert$	0	0.2666666	0.0124988	0.0089136	0.0316717

Remarquons aussi que la règle de Simpson simple est exacte pour $f(x) = x^2$, mais n'est pas précise pour $f(x) = x^4$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soient $I_R(f)$, $I_T(f)$

et $I_S(f)$ les approximations de $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ obtenues en utilisant, respectivement, la règle simple du rectangle (ou point milieu), du trapèze et de Simpson.

(1) Montrer que

$$\begin{aligned} I_R(1) &= I(1) \\ I_R(x) &= I(x) \\ I_R\left(x^2\right) &\neq I\left(x^2\right) \end{aligned}$$

et déduire que la règle du rectangle est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

(2) Montrer

$$\begin{aligned} I_T(1) &= I(1) \\ I_T(x) &= I(x) \\ I_T\left(x^2\right) &\neq I\left(x^2\right) \end{aligned}$$

et déduire que la règle du trapèze est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

(3) Montrer que

$$\begin{aligned} I_S(1) &= I(1) \\ I_S(x) &= I(x) \\ I_S\left(x^2\right) &= I\left(x^2\right) \\ I_S(x^3) &= I(x^3) \\ I_S\left(x^4\right) &\neq I\left(x^4\right) \end{aligned}$$

et déduire que la règle de Simpson est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Solution. Il est facile de voir que

$$
\begin{aligned}
I(1) &= \int_a^b 1\,dx = b-a \\
I(x) &= \int_a^b x\,dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_b^a = \tfrac{b^2-a^2}{2} \\
I\left(x^2\right) &= \int_a^b x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_b^a = \tfrac{b^3-a^3}{3} = \tfrac{b^2+ba+a^2}{3}\,(b-a) \\
I\left(x^3\right) &= \int_a^b x^3\,dx = \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_b^a = \tfrac{b^4-a^4}{4} = \tfrac{b^3+b^2a+ba^2+a^3}{4}\,(b-a) \\
I\left(x^4\right) &= \int_a^b x^4\,dx = \left[\tfrac{x^5}{5}\right]_b^a = \tfrac{b^5-a^5}{5} = \tfrac{b^4+b^3a+b^2a^2+ba^3+a^4}{5}\,(b-a)\,.
\end{aligned}
$$

(1) Appliquant la règle du rectangle, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_R(1) &= 1\times(b-a) = b-a = I(1) \\
I_R(x) &= \tfrac{a+b}{2}(b-a) = \tfrac{b^2-a^2}{2} = I(x) \\
I_R\left(x^2\right) &= \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2(b-a) = \tfrac{b^3+b^2a-ba^2-a^3}{4} \neq I\left(x^2\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, si $P(x)=\alpha+\beta x$, on a

$$
\begin{aligned}
I(P) &= I(\alpha+\beta x) = \alpha I(1)+\beta I(x) \\
&= \alpha I_R(1)+\beta I_R(x) = I_R(\alpha+\beta x) \\
&= I_R(P),
\end{aligned}
$$

montrant ainsi que la règle du rectangle est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

(2) De manière similaire, appliquant la règle du trapèze, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_T(1) &= \tfrac{1+1}{2}\times(b-a) = b-a = I(1) \\
I_T(x) &= \tfrac{a+b}{2}(b-a) = \tfrac{b^2-a^2}{2} = I(x) \\
I_T\left(x^2\right) &= \tfrac{a^2+b^2}{2}(b-a) = \tfrac{b^3-b^2a+ba^2-a^3}{2} \neq I\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

impliquant la règle du trapèze est aussi exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

(3) Finalement, appliquant la règle de Simpson, on obtient

$$\begin{aligned}
I_S(1) &= \tfrac{1+4+1}{6} \times (b-a) = b-a \\
&= I(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_S(x) &= \tfrac{1}{6}\left(a + 4\tfrac{a+b}{2} + b\right)(b-a) \\
&= \tfrac{3}{6}(a+b)(b-a) \\
&= I(x) \\
I_S\left(x^2\right) &= \tfrac{1}{6}\left(a^2 + 4\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 + b^2\right)(b-a) \\
&= \tfrac{2}{6}\left(a^2 + ab + b^2\right)(b-a) \\
&= I\left(x^2\right) \\
I_S\left(x^3\right) &= \tfrac{1}{6}\left(a^3 + 4\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right)(b-a) \\
&= \tfrac{3}{12}\left(a^3 + b^2 a + b a^2 + b^3\right)(b-a) \\
&= I\left(x^3\right) \\
I_S\left(x^4\right) &= \tfrac{1}{6}\left(a^4 + 4\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^4 + b^4\right)(b-a) \\
&\neq I\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

impliquant de la même manière que la règle de Simspn est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Exercice 3. (1) Appliquer la règle du trapèze simple pour approcher

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

Calculer l'erreur correspondante. (Indication: on sait que la valeur exacte est $I(f) = 0.746824133\cdots$)

(2) Appliquer la règle du trapèze composée avec un nombre de sous-intervalles $m = 2$, $m = 4$ et $m = 8$. Calculer les erreurs correspondantes

et déterminer numériquement l'ordre de la méthode.

(3) Quel est le nombre de sous-intervalles garantissant une erreur de l'ordre de 10^{-3}. Comparer avec les résultats obtenus dans l'alinéa (2).

(4) Apliquer la règle de Romberg avec $= 3$. Commenter.

Solution. (1) Appliquant la règle du trapèze simple pour approcher

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0.746824133\cdots$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_T^1(f) &= \tfrac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{-1}\right) = 0.6839372058\cdots \end{aligned}$$

et l'erreur correspondante est donc donnée par

$$E_T^1 = \left|I(f) - I_T^1(f)\right| = 0.0628868749.$$

(2) Appliquant la règle du trapèze composée avec $m = 2$, on obtient

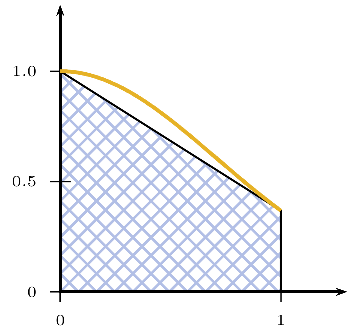
$$\begin{aligned} I_T^2(f) &= \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f(0) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(f(0) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(1 + 2e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}\right) \\ &= 0.7313702518\cdots \end{aligned}$$

et l'erreur correspondante est donc donnée par

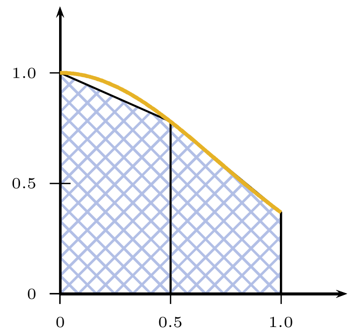
$$E_T^2 = \left|I(f) - I_T^2(f)\right| = 0.0154538812.$$

De manière similaire, on approche $I(f)$ avec $m = 4$ et $m = 8$. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant

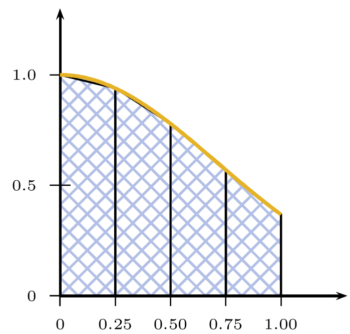
m	$I_T^m(f)$	E_T^m
1	0.6839372058	0.0628868749
2	0.7313702518	0.0154538812
4	0.7429840978	0.0038400352
8	0.7458656148	0.0009585182



Règle du trapèze simple



Règle du trapèze composée avec $m = 2$



Règle du trapèze composée avec $m = 4$

Pour déterminer l'ordre q de la méthode, remarquons que si E_h est l'erreur correspondant au pas h, alors

$$E_h \approx Ch^q,$$

où C est une constante indépendante de h. L'erreur $E_{\frac{h}{2}}$ correspondant à $\frac{h}{2}$ satisfait alors

$$E_{\frac{h}{2}} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^q,$$

et donc

$$\frac{E_h}{E_{\frac{h}{2}}} = \frac{Ch^q}{C\left(\frac{h}{2}\right)^q} = 2^q.$$

Ainsi,

$$q = \frac{\ln\left(\frac{E_h}{E_{\frac{h}{2}}}\right)}{\ln 2} = \log_2\left(\frac{E_h}{E_{\frac{h}{2}}}\right).$$

Utilisant le tableau précédent, nous obtenons

m	$q_m = \log_2\left(\frac{E_T^m}{E_T^{2m}}\right)$
1	2.0247
2	2.0087
4	2.0022

et nous concluons que la méthode du trapèze est d'ordre 2.

(3) On a

$$|I(f) - I_T^m(f)| \leq \max_{x\in[0,1]} |f"(x)| \, \tfrac{h^2}{12},$$

où $h = \frac{1}{m}$. La fonction $f^{(3)}(x) = 4xe^{-x^2}(3-2x^2)$ est positive sur $[0,1]$ et donc $f"$ est croissante sur cet intervalle. Par conséquent,

$$-2 = f"(0) \leq f"(x) \leq f"(1) = \tfrac{2}{e},$$

ce qui implique que $|f"(x)| \leq 2$ pour tout $x \in [0,1]$ et

$$|I(f) - I_T^m(f)| \leq \tfrac{h^2}{6} = \tfrac{1}{6m^2}.$$

Pour garantir une erreur de l'ordre de 10^{-3}, il est suffisant d'imposer

$$\tfrac{1}{6m^2} \leq 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad 6m^2 \geq 10^3 \quad \Longleftrightarrow \quad m \geq 12.9.$$

(4) Les coefficients associés à la méthode de Romberg sont donnés par

$$\begin{cases} R(n,1) = \frac{4R(n,0)-R(n-1,0)}{3} \\ R(n,2) = \frac{16R(n,0)-R(n-1,0)}{15} \\ R(n,3) = \frac{64R(n,0)-T(n-1,0)}{63} \end{cases}$$

et peuvent être organisés selon le tableau suivant:

n	$R(n,0)$	$R(n,1)$	$R(n,2)$	$R(n,3)$
0	0.6839372058			
1	0.7313702518	0.7471812671		
2	0.7429840978	0.7468553798	0.7468336540	
3	0.7458656148	0.7468261205	0.7468241699	0.7468240193

L'erreur correspondante est donnée par

$$|I(f) - R(3,3)| = 1.137 \times 10^{-7}$$

et elle est clairement inférieure aux erreurs obtenus dans l'alinéa (2).

Exercice 4. (1) Appliquer la règle Simpson simple pour approcher

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx,$$

et calculer l'erreur correspondante.

(2) Appliquer la règle de Simpson composée avec un nombre de sous-intervalles $m = 2$, $m = 4$ et $m = 8$. Calculer les erreurs correspondantes et déterminer numériquement l'ordre de la méthode.

(3) Comparer avec les résultats obtenus dans l'exercice précédent.

Solution. 1) Appliquant la règle de Simpson simple pour approcher

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 0.746824133\cdots$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_S^1(f) &= \tfrac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\left(1 + 4e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}\right) = 0.7471804289\cdots \end{aligned}$$

et l'erreur correspondante est donc donnée par

$$E_S^1 = \left|I(f) - I_S^1(f)\right| = 5.562959 \times 10^{-4}.$$

2) Appliquant la règle de Simpson composée avec $m = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} I_S^2(f) &= \tfrac{\frac{1}{2}}{6}\left(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \tfrac{1}{6}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{12}\left(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{12}\left(1 + 4e^{-\frac{1}{16}} + 2e^{-\frac{1}{4}} + 4e^{-\frac{9}{16}} + e^{-1}\right) \\ &= 0.7468553798\cdots \end{aligned}$$

et l'erreur correspondante est donnée par

$$E_S^2 = \left|I(f) - I_S^2(f)\right| = 3.124679 \times 10^{-5}.$$

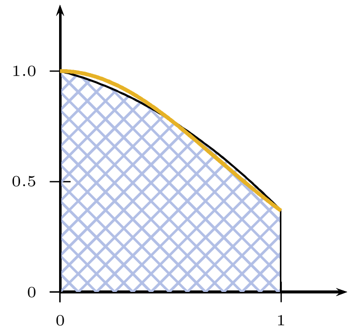
De manière similaire, on approche $I(f)$ avec $m = 4$ et $m = 8$. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant

m	$I_S^m(f)$	E_S^m
1	0.7471804289	5.562959×10^{-4}
2	0.7468553798	3.124679×10^{-5}
4	0.7468261205	1.987527×10^{-6}
8	0.7468242574	1.244000×10^{-7}

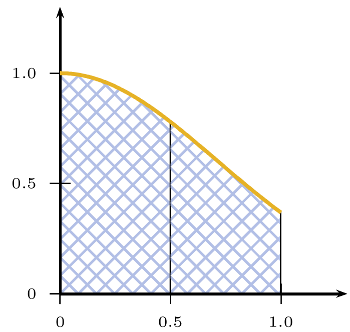
Utilisant ces résultats, nous obtenons

m	$q_m = \log_2\left(\frac{E_S^m}{E_S^{2m}}\right)$
1	3.51
2	3.97
4	3.9979

et nous concluons que la méthode de Simpson est d'ordre 4.



Règle de Simpson simple



Règle de Simpson composée avec $m = 2$

(3) Il est clair, et prévisible, que l'approximation par la règle de Simpson est plus précise que l'approximation par la règle du trapèze.

Exercice 5. On sait que $I(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

(1) Montrer que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx &= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \\ &= 2\int_0^1 e^{-x^2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^2}\,dy.\end{aligned}$$

(2) Appliquer la règle du rectangle avec $m = 16$ pour approcher

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^2}\, dy.$$

(3) Déduire la valeur approchée de $I(f)$ et l'erreur correspondante.

Solution. (1) Vu que $x \to e^{-x^2}$ est une fonction paire, pour tout $a > 0$, on a

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^a e^{-x^2}\, dx$$

et donc

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = 2 \lim_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-x^2}\, dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^1 e^{-x^2}\, dx + 2\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx. \end{aligned}$$

De l'autre côté, utilisant le changement de variables $x = \frac{1}{y}$, nous obtenons

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = -\int_1^0 \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^2}\, dy = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^2}\, dy.$$

Combinant ces deux identités, nous concluons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^1 e^{-x^2}\, dx + 2\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^2}\, dy.$$

(2) Appliquant la règle du rectangle avec $m = 16$, nous obtenons

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^2}\, dy \approx \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} f\left(\frac{2i+1}{32}\right) = 0.139402931\cdots$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx &\approx 2 \times 0.746824133\cdots + 2 \times 0.139402931\cdots \\ &\approx 1.772454128\cdots \end{aligned}$$

et l'erreur correspondante est donnée par

$$\left|\sqrt{\pi} - 1.772454128\right| = 2.7709 \times 10^{-7}.$$