Université Med Seddik Benyahia-Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Enseignement Fondamental en Sciences et Technologie

Exercices : Cinématique du point matériel

Mouvement relatif : Solution

Exercice 01 :

Les coordonnées d'un point matériel dans le référentiel $R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t) = t^2 - 4t + 1$; $y(t) = -2t^4$ et $z(t) = 3.t^2$

Dans un deuxième référentiel $R_1(O_1,\vec{i}_1 = \vec{i},\vec{j}_1 = \vec{j},\vec{k}_1 = \vec{k})$, elles ont pour expressions : $x_1(t) = t^2 + t + 2$; $y_1(t) = -2t^4$+5 et $z_1(t) = 3t^4 - 7$

1. Déterminer les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$;
2. Exprimer la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$
3. Exprimer l'accélération $\vec{a}(M/R_0)$ en fonction de l'accélération $\vec{a}(M/R_1)$
4. Quelle est la nature du mouvement du référentiel R_1 par rapport au référentiel R_0 ?
5. Supposons R_0 galiléen. R_1 est-il aussi galiléen ? Justifier votre réponse.

Solution Ex. 01

Dans R_1 : $x_1(t) = t^2 + t + 2$, $y_1(t) = 2t^4 + 5$, $z_1(t) = 3t^4 - 7$

1) * Les expressions de vitesses

1) $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \vec{V}(M/R_0)$

$V_x = 2t - 4$, $V_y = -8t^3$, $V_z = 6t$.

2) $\vec{V}_1 = V_{1x} \vec{i} + V_{1y} \vec{j} + V_{1z} \vec{k} = \vec{V}(M/R_1)$

$V_{1x} = \frac{dx_1}{dt} = 2t + 1$, $V_{1y} = \frac{dy_1}{dt} = -8t^3$, $V_{1z} = \frac{dz_1}{dt} = 6t$

2 * $M(M/R_0)$ en fonction de $\vec{V}(M/R_1)$

$$V(M/R_0) = (2t + 1 - 5)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k} = (2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k} - 5t\vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_0) = V(M/R_1) - 5t\,\vec{i}.}$$

3 * $\vec{a}(M/R_0)$ en fonction de $\vec{a}(M/R_1)$

$$\vec{a}(M/R_0) = \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\,V(M/R_1) - 5\,\vec{i}}{dt}\Big|_{R_0}$$

$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1)}$

4* Nature du mouvement

- On a $\vec{\omega}(R_1/R_0) = \vec{0} \Rightarrow$ translation
- $\vec{V}(M/R_0) - \vec{V}(M/R_1) = -5\vec{i} \Rightarrow$ rectiligne

$\Rightarrow \vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) \Rightarrow$ uniforme

R_1 est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_0

5/* Si R_0 est galiléen alors R_1 est aussi galiléen

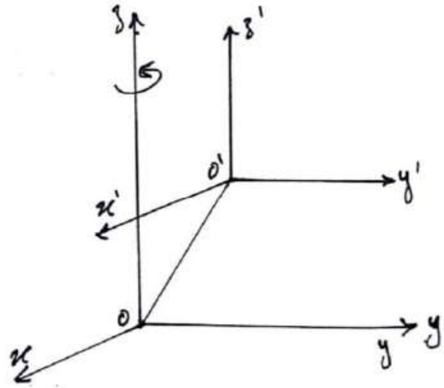
6)* Car R_1 est en translation réctiligne uniforme par/R.

Exercice 02 :

Un repère mobile $R'(O', x', y', z')$ tourne autour de l'axe (Oz) du repère fixe $R(O, x, y, z)$, d'une vitesse angulaire constante ω de façon que les axes des deux repères restent parallèles. La distance OO' entre les origines des deux repères est :

$\overrightarrow{OO'} = R.cos(\omega t)\,\vec{i} + R.sin(\omega t)\vec{j}\,; R = Cte,$

Un point matériel se déplace sur l'axe (Oy') suivant la loi : $y' = \frac{1}{2}.a.t^2$ avec $a = Cte,$



Calculer :

1. Les vitesses relative, d'entraînement et absolue ;
2. Les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue ;
3. Les modules de la vitesse et de l'accélération du point M dan R.

Solution Ex. 02

1* Calcul des vitesse relative, d'entraînement et absolue

- vitesse d'entraînement

$\vec{V_e}$ On a : $\vec{OO'} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j}$; $R = cte$; $y' = \frac{1}{2} a t^2$, $a = Cte$.

$$\Rightarrow \quad \vec{V_r} = \frac{d\vec{O'M}}{dt}\bigg|_{R'} = \boxed{a t \cdot \vec{j'}}$$

- Vitesse absolue $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$, $\vec{j} = \vec{j'}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_a} = -R\omega(\sin\omega t\,\vec{i} - \cos\omega t\,\vec{j}) + a t\,\vec{j}}$$

2) $$\vec{a_r} = \frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2}\bigg|_{R'} = \boxed{a\,\vec{j'}}$$

$$a_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\bigg|_R + \vec{\omega}\wedge(\overset{=\vec{0}}{\vec{\omega}}\wedge\vec{O'M}) + \overset{=\vec{0}}{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}\wedge\vec{O'M}$$

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\bigg|_R = -R\omega^2\left(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}\right)$$

- $\vec{a_c} = 2\,\vec{\ }\wedge\vec{V_r} = \vec{0}$; $\vec{\omega} = \vec{0}$.

- $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_c} = -R\omega^2(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}) + a\vec{j}$

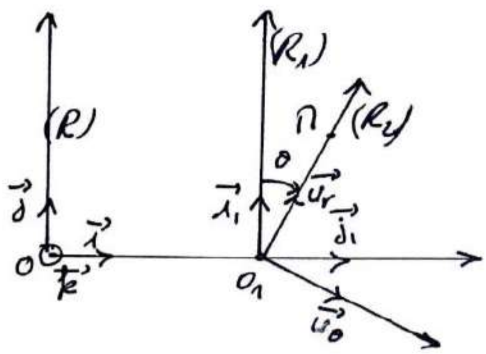
3* $$\|\vec{V_a}\| = \sqrt{(-R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos\omega t + a t)^2}$$

$$\|\vec{a_a}\| = \sqrt{(-R\omega^2\cos\omega t)^2 + (-R\omega^2\sin(\omega t) + a)^2}$$

Exercice 03 :

Soient $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un référentiel fixe et $R_1(O_1,\vec{\imath}_1=\vec{\imath},\vec{\jmath}_1=\vec{\jmath},\vec{k}_1=\vec{k})$ un référentiel mobile tel que : $\vec{V}(O_1/R)=a\,t\,\vec{J}_1$; où a est une constante positive.

Considérer $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ comme référentiel absolu et $R_1(O_1,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$ comme référentiel relatif : (fig. ci-contre), R_2 est donné pour **l'exercice 04**.



1. Quelle est la nature de la trajectoire de M dans R_1 ? (sans faire le calcul) ;
2. Déterminer l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$;
3. Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V}(M/R_1)$ et de la vitesse d'entraînement $\vec{V_e}(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M)$
4. Quelle est la nature du mouvement de R_1 par rapport à R ?
5. Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relatives $\vec{a}_r(M/R_1)$, d'entraînement $\vec{a_e}\,(M)$. En déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}\,(M)$

Solution Ex. 03

1) La nature de la trajectoire de M dans R_1

$\vec{V}(O_1/R) = a\,t\,\vec{j}_1$, $a = cte$

$\vec{O_1M} = l\,\vec{u}_r$, $l = cte$ $\Rightarrow$ $\|O_1M\| = cte$ donc ds (R_1) la trajectoire est circulaire de centre O_1.

2) le référentiel R_1 ne fait aucune rotation par rapport à R, alors $\boxed{\vec{\omega}(R_1/R_2)\ \vec{0}}$.

3) $\vec{V}_r$ et $\vec{V}_e$.

- $\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_1) = \left.\dfrac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\dfrac{d\,l\vec{u}_r}{dt}\right|_{R_1} = l\left.\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right|_{R_1} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\boxed{\vec{V}_r = l.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$

- $\vec{V}_e = \vec{V}(P\equiv M) = \left.\dfrac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_{R} + \overbrace{\vec{\omega}(R_1/R)}^{=\vec{0}}\wedge\vec{O_1M}$ (P: Point coïncident)

$= a\,t\,\vec{j} = a.t.(\sin(\theta)\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$

$- \quad \vec{V}_a = \vec{V}(M/R) = \vec{V}_e + \vec{V}_r = at\sin\theta\,\vec{u_r} + (l\dot{\theta} + at\cos\theta)\,\vec{u_\theta}$

4) On a : $\vec{\omega}(R_1/R) = \vec{0} \Rightarrow$ translation

$\vec{V}(O_1/R) = at\,\vec{j} \Rightarrow$ rectiligne

c) L'accélération relative : $\vec{a_r} = \vec{a}(M/R_1)$

$$※ \quad \vec{a_r} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d(l\dot{\theta}\vec{u_\theta})}{dt}\right|_{R_1} = l\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u_r}$$

$$\boxed{\vec{a_r} = -l\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + l\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}}$$

$$※ \quad \vec{a_e} = \vec{a}(M\equiv P)/_R = \left.\frac{d\vec{OO_1}}{dt}\right|_R + \underbrace{\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R}_{=\vec{0}} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{O_1M})}_{\vec{0}}$$

$$\vec{a}(M/_R) = \left.\frac{d\,at\,\vec{j}}{dt}\right|_R = a\vec{j} = \boxed{a(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta})}$$

$$※ \quad \vec{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a_c} = \vec{0}}$$

$$※ \quad \vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c} = -l\dot{\theta}^2\vec{u_r} + l\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} + a\sin\theta\,\vec{u_r} + a\cos\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a_a} = (a\sin\theta - l\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (l\ddot{\theta} + a\cos\theta)\,\vec{u_\theta}$$

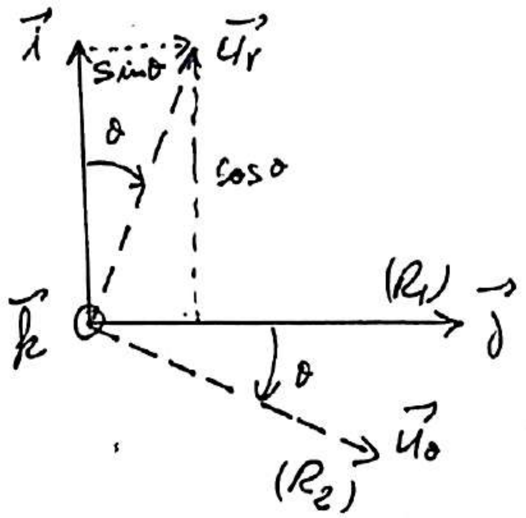
Exercice 04

Prendre la situation de l'exercice précédent et considérer maintenant $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ comme référentiel absolu et $R_2\left(O_1,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k}\right)$ comme référentiel relatif ;

Soit $R_2\left(O_1,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k}\right)$ un deuxième référentiel, lié à un point matériel M et tel que : $\overrightarrow{O_1M} = l\,\overrightarrow{e_r}$ où l est une constante positive et l'angle $\theta(t) = (\vec{\imath}_1,\overrightarrow{e_r})$. Voir fig. de **l'exercice 3**

1. Donner l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$; En déduire le vecteur de rotation $\vec{\Omega}(R_2/R)$;
2. Déterminer l'expression de la vitesse relative $\vec{V_r}(M/R_2)$ et de la vitesse d'entraînement $\vec{V_e}(M)$. En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$;
3. Déterminer l'expression des vecteurs accélérations relative $\vec{a}_r(M/R_2)$, d'entraînement $\overrightarrow{a_e}\,(M)$ et de Coriolis $\overrightarrow{a_C}\,(M)$. En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}\,(M)$;
4. Comparer les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$ avec celle trouvée dans l'exercice précédent ;
5. Comparer les expressions de l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}(M/R)$ avec celle trouvée dans l'exercice précédent.

Solution de l'ex. 04



1) L'expression de $\vec{\omega}_1(R_2/R_1)$

$\vec{u_r}$ Tourne autour de $\vec{k}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}\vec{k} = \vec{\omega}_1(R_2/R_2)}$

$\vec{i} = \vec{i'}$, $\vec{j} = \vec{j'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\omega}_2 = \boxed{\vec{\omega}(R_2/R) = \dot{\theta}\vec{k}}$

2) $\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_2)$, $\vec{V}_e = \vec{V}(P\equiv M/R)$, $\vec{V}_a = \vec{V}(M/R)$?

$\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_2) = \dfrac{d\, l\,\vec{u_r}}{dt}\Big|_{R_2} = \vec{0}$, $l = cte$, $\vec{u_r} = \vec{cte}$.

$$- \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\Big|_R + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_1 M} \quad , \quad \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}(R_2/R)$$

$$= a.t.\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge l\vec{u}_r = at(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta) + \dot{\theta} l \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = at\sin\theta\,\vec{u}_r + (at\cos\theta + l.\dot{\theta})\vec{u}_\theta}$$

$$- \vec{V}_a = \vec{V}(M/R) = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{0} + \vec{V}_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_a = at.\sin\theta\,\vec{u}_r + (at\sin\theta + l\dot{\theta})\vec{u}_\theta}$$

3) Les accélérations :

- $\vec{a}_r$: relative. $\vec{a}(M/R_2) = \frac{d\vec{V}_r}{dt}\Big|_{R_2} = \vec{0}$.

- $\vec{a}_e$ = d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\Big|_R + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\Big|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\Big|_R = a(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\Big|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} = \ddot{\theta}\vec{k}_1 \wedge l\vec{u}_r = l.\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_1M}) = \dot{\theta}\vec{k} \wedge (\dot{\theta}\vec{k} \wedge l\vec{u}_r) = -\dot{\theta}^2 l.\vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{a}_e = (a\sin\theta - l\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (a\cos\theta + l\ddot{\theta})\vec{u}_\theta}$$

- $\vec{a}_c$ = Coriolis

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_2 \wedge \vec{v}_r = \vec{0}}$$

- $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{0} + \vec{a}_e + \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e$$

4) les expressions des vitesses absolues obtenues ds l'exo3 - question 3 et ds l'exo4, ques. 2 sont identiques

5) les accélérations absolues ds l'exo3 et l'exo4 sont identiques, le calcul de l'accélération est indépendant du choix de référentiel.

Proposée par Dr MAHAMDIOUA N.