

Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatiques

Département de mathématiques Master 2, Analyse fonctionnelle
Le 10 Décembre 2023

Examen partiel
Optimisation
Durée : 1h :30

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

OK 10pts
Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point $x_0 \in E$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \text{ on a } f(x) - f(x_0) > -\epsilon.$$

Montrer que f est s.c.i. au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ alors

10pts
$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe.

1. Donner la définition de la fonction conjuguée (Fenchel) f^* de f .
2. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f^*(y) + f(x) = \langle y, x \rangle.$$

Montrer que $y \in \partial f(x)$.

3. On suppose réciproquement que $y \in \partial f(x)$. Montrer que

$$f(x) + f^*(y) = \langle y, x \rangle.$$

4. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \partial f(x)$. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle y, x \rangle - f(x)) \geq \langle y, x \rangle - \langle p, x \rangle + f^*(p).$$

5. En déduire que $x \in \partial f^*(p)$.

On considère dans $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 - x + 1$. Calculer f^* .

Bon Travail
F. Aliouane

Exercice n°13 (4,00pts)

f est s.c.i. au point $x_0 \in E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -\varepsilon \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Supposons que f est s.c.i. au point $x_0 \in E$

soit $(x_n)_n \subset E$ tq. $\|x_n - x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \|x_n - x_0\| < \varepsilon \quad (0,5)$$

Utilisant (*), on aura pour $n \geq n_0$:

$$f(x_n) - f(x_0) > -\varepsilon \quad (0,75)$$

$$\text{alors } \inf_{n \geq n_0} f(x_n) > f(x_0) - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \quad (0,5)$$

$$\text{d'où: } \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq n_0} f(x_n) \geq f(x_0) \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0) \quad (0,5)$$

$\Leftarrow$ Supposons maintenant qu'il existe x_0 où f n'est pas s.c.i.

Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E$ tq. $\|x - x_0\| < \delta$ et $f(x) - f(x_0) \leq -\varepsilon \quad (0,75)$

i.e., $\exists (x_n)_n \subset E$ tq. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ et $f(x_n) - f(x_0) \leq -\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \quad (0,75)$

Donc, $f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x_0) - \varepsilon$ contradiction. $(0,75)$

Exercice n°20 (10,00pts)

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

La fonction conjuguée de f est donnée par:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle y, x \rangle - f(x)) ; y \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

2 - Soit $y \in \mathbb{R}^n$, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tq.

$$f^*(y) + f(x) = \langle y, x \rangle.$$

Donc $\sup_{z \in \mathbb{R}^n} (\langle y, z \rangle - f(z)) + f(x) = \langle y, x \rangle$ (0,75)

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle - f(x) \geq \langle y, z \rangle - f(z), \forall z \in \mathbb{R}^n$$
 (0,75)

$$\Rightarrow f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n$$
 (0,5)

$$\Rightarrow y \in \partial f(x).$$
 (0,25)

3 - Inversement, on suppose que

$$y \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n$$
 (0,25)

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle - f(x) \geq \langle y, z \rangle - f(z), \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle - f(x) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} (\langle y, z \rangle - f(z)) = f^*(y)$$
 (0,5)

$$\Rightarrow f^*(y) \leq \langle y, x \rangle - f(x) \quad \text{--- (1)}$$
 (0,25)

D'autre part, nous avons (inégalité de Fenchel)

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle y, x \rangle - f(x)) \geq \langle y, x \rangle - f(x) \quad \text{--- (2)}$$
 (1)

De (1) et (2), on déduit que

$$f^*(y) + f(x) = \langle y, x \rangle$$
 (0,25)

4 - Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \partial f(x)$ i.e., $f^*(p) + f(x) = \langle p, x \rangle$. (0,25) --- (3)

$$\text{Or, } f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle y, x \rangle - f(x))$$

Donc, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle y, x \rangle - f(x)) \geq \langle y, x \rangle - f(x)$ 0,5

$\stackrel{(*)}{=} \langle y, x \rangle - \langle p, x \rangle + f^*(p)$ 0,25

5. De l'inégalité précédente, on a

$f^*(y) \geq \langle x, y - p \rangle + f^*(p), \forall y \in \mathbb{R}^n$ 0,75

Par conséquent, $x \in \partial f^*(p)$. 0,5

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^2 - x + 1$

$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (yx - f(x))$ 0,5

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} (yx - x^2 + x - 1) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (-x^2 + (y+1)x - 1)$ 0,5

Soit- $h(x) = -x^2 + (y+1)x - 1$; $h'(x) = -2x + y+1$

1

x	$-\infty$	$\frac{y+1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$		$+$ 0 $-$	
$h(x)$	$-\infty$	$h(\frac{y+1}{2})$	$-\infty$

$h(\frac{y+1}{2}) = -(\frac{y+1}{2})^2 + \frac{(y+1)^2}{2} - 1$
 $= \frac{-(y+1)^2 + 2(y+1)^2 - 4}{4}$
 $= \frac{(y+1)^2 - 4}{4}$

$\Rightarrow f^*(y) = \frac{(y+1)^2}{4} - 1$ 0,75