Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques Master 2, Analyse fonctionnelle
Le 17 Janvier 2024

Examen D'Optimisation

Durée : 2h :00

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leur produit de dualité. Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre.

Expliquer pourquoi la fonction de Fenchel f^* de f est convexe et semi-continue inférieurement.

Soit $x'_0 \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définie la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \langle x'_0, x \rangle + \alpha, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

1. Montrer que, pour tout $x' \in E'$

$$f^*(x') = \begin{cases} +\infty & si\ x' \neq x'_0 \\ -\alpha & si\ x' = x'_0. \end{cases}$$

2. Montrer que $f^{**} = f$.

Exercice 2.

Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leur produit de dualité. Soient $f, g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres convexes.

1. Montrer que si f est Gâteaux-différentiable au point $x_0 \in dom(f)$, alors f est sous-différentiable et $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$, où $\nabla f(x_0)$ désigne le gradient de f au point x_0.
2. Soit $x_0 \in E$. Montrer que

$$\partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subseteq \partial (f+g)(x_0).$$

Notre objectif dans la suite est de montrer que l'inclusion est stricte. Pour celà, on considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définies par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ +\infty & \text{si } x>0\end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases}-\sqrt{x} & \text{si} \quad x\geq 0\\ +\infty & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

1. Montrer que les sous-différentiels des fonctions f et g sont donnés par :

$$\partial f(x)=\begin{cases}\{0\} & \text{si } x<0\\ [0,+\infty[& \text{si } x=0\\ \emptyset & \text{si } x>0\end{cases} \quad \text{et} \quad \partial g(x)=\begin{cases}\left\{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\} & \text{si } x>0\\ \emptyset & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

2. Calculer $\partial(f+g)(x)$ et comparer le résultat avec celui de $\partial f(x)+\partial g(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Indication : Notons que pour tout ensemble non vide $A\subset E$, $A+\emptyset=\emptyset$.

Exercice 3.

Résoudre le problème de minimisation convexe suivant :

$$\begin{cases}\min J(x,y)=x^2+2y^2+x\\ \text{Sujet à}\\ C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y^2-x\leq 0 \quad et \quad x+y\geq 0\right\}.\end{cases}$$

Bon Travail

F. Aliouane

Correction

Exercice 1: (04 pts) Soit $x' \in E'$,

Sachant que $f^*(x') = \sup\limits_{x \in E} (\langle x', x\rangle - f(x))$

f^* est le supremum d'une famille de fonctions affines

(1) $x' \longmapsto \langle x', x\rangle - f(x)$, donc f^* est convexe et s.c.i.

(voir Thm 1-11 cours).

2/ $f(x) = \langle x'_0, x\rangle + \alpha, \quad \forall x \in E$

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} (\langle x', x\rangle - f(x)) \quad 0,5$$

$$= \sup_{x \in E} (\langle x', x\rangle - \langle x'_0, x\rangle - \alpha)$$

$$= \sup_{x \in E} (\langle x' - x'_0, x\rangle - \alpha) \quad 0,5$$

$$= \begin{cases} -\alpha & \text{Si } x' = x'_0 \\ +\infty & \text{Si } x' \neq x'_0 \end{cases} \quad 0,25$$

On a $f^{**}(x) = \sup\limits_{x' \in E'} (\langle x', x\rangle - f^*(x'))$ 0,5

$$= \sup\Big(\sup_{\substack{x' = x'_0 \\ x' \in E'}} (\langle x', x\rangle + \alpha), \sup_{\substack{x' \in E' \\ x' \neq x'_0}} (\langle x', x\rangle - \infty) \Big) \quad 0,75$$

$$= \sup_{x' \in E'} (\langle x'_0, x\rangle + \alpha) = \langle x'_0, x\rangle + \alpha = f(x). \quad 0,5$$

Exercice 2: (12,5 pts)

1) Soit $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$;

f est G-diff. au pt. $x_0 \iff \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle \nabla f(x_0), v\rangle, \ v \in E$ 0,75

$$\iff \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t(x_0+v) + (1-t)x_0) - f(x_0)}{t} = \langle \nabla f(x_0), v\rangle.$$

(0,5)

Puisque f est convexe, alors

$$\langle \nabla f(x_0), v\rangle \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{t f(x_0+v) + (1-t) f(x_0) - f(x_0)}{t}$$

$$= f(x_0+v) - f(x_0)$$

(0,5)

Posons $y = x_0 + v \in E$, on aura

$$\langle \nabla f(x_0), y - x_0\rangle \leq f(y) - f(x_0) \quad (0{,}25)$$

i.e., $f(y) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y - x_0\rangle, \ \forall y \in E$.

donc $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$ (0,25) i.e., f est sous-diff au point x_0

et $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ (0,75) (voir cours pour l'inclusion inverse).

(0,5)

2) Soit $x' \in \partial f(x_0) + \partial g(x_0) \iff \exists x_1' \in \partial f(x_0), \exists x_2' \in \partial g(x_0) : x' = x_1' + x_2'$

$x_1' \in \partial f(x_0) \iff f(y) \geq f(x_0) + \langle x_1', y - x_0\rangle, \ \forall y \in E$ (0,5)

$x_2' \in \partial g(x_0) \iff g(y) \geq g(x_0) + \langle x_2', y - x_0\rangle, \ \forall y \in E$ (0,5)

Sommant, on trouve

$$(f+g)(y) \geq (f+g)(x_0) + \langle \underbrace{x_1' + x_2'}_{x'}, y - x_0\rangle, \ \forall y \in E \quad (0{,}25)$$

d'où $x' \in \partial(f+g)(x_0)$. Alors, $\partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subset \partial(f+g)(x_0)$.

(0,25)

II/

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Si $x < 0$: f est différentiable et $\partial f(x) = \{0\}$. (0,75)
- Si $x > 0$: $\partial f(x) = \emptyset$. (0,5)

Reste à calculer $\partial f(0)$.

$$\partial f(0) = \{x' \in \mathbb{R},\ f(y) \geq f(0) + x'y,\ \forall y \in \mathbb{R}\}$$

0,75

$$= \{x' \in \mathbb{R},\ 0 \geq x'y,\ \forall y \leq 0\} \cap \underbrace{\{x' \in \mathbb{R},\ +\infty \geq x'y,\ \forall y > 0\}}_{\mathbb{R}}$$

$$= \{x' \in \mathbb{R};\ x' \geq 0\} = [0, +\infty[.$$ 0,25

soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- si $x > 0$: g est différentiable et $\partial g(x) = \left\{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$ 0,5
- si $x < 0$: $\partial g(x) = \emptyset$. 0,5

$$\partial g(0) = \{x' \in \mathbb{R};\ g(y) \geq g(0) + x'y,\ \forall y \in \mathbb{R}\}$$

0,75

$$= \{x' \in \mathbb{R};\ -\sqrt{y} \geq x'y,\ \forall y \geq 0\} \cap \{x' \in \mathbb{R};\ +\infty \geq x'y,\ \forall y < 0\}$$

$$= \{x' \in \mathbb{R};\ x' \leq -\frac{1}{\sqrt{y}},\ \forall y > 0\} = \emptyset$$ 0,5

2) Nous avons, $(f+g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \vee x < 0 \end{cases}$ 0,75

- si $x > 0 \vee x < 0$: $\partial(f+g)(x) = \emptyset$ 0,5
- si $x = 0$:

$$\partial(f+g)(0) = \{x' \in \mathbb{R};\ (f+g)(y) \geq x'y,\ \forall y \in \mathbb{R}\}$$

0,75

$$= \{x' \in \mathbb{R};\ 0 \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

D'autre part, $\partial f(x) + \partial g(x) = \emptyset$ 0,75

Donc $\partial(f+g)(x) \neq \partial f(x) + \partial g(x)$. 0,25

Exercice 3 : 03,5pts

Soient $J(x,y) = x^2 + 2y^2 + x$

$g_1(x,y) = y^2 - x$, $g_2(x,y) = -x - y$.

. Les fonctions J, g_1 et g_2 sont C. diff et on a

$\nabla J(x,y) = (2x+1, 4y)$, $\nabla g_1(x,y) = (-1, 2y)$, $\nabla g_2(x,y) = (-1,-1)$. 0,5 0,25 0,25

. Il existe $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ tq. $g_1(1,0) = -1 < 0$ et $g_2(1,0) = -1 < 0$

donc g_1 et g_2 vérifient la condition de Slater. 0,5

D'après les conditions de Kuhn-Tucker, (x,y) est solution optimale du problème (P) ssi $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} \nabla J(x,y) + \lambda_1 \nabla g_1(x,y) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ g_1(x,y) \leq 0, \quad g_2(x,y) \leq 0 \\ \lambda_1 g_1(x,y) = 0, \quad \lambda_2 g_2(x,y) = 0 \end{cases}$$ 0,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 4y + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ y^2 - x \leq 0, \quad -x - y \leq 0 \\ \lambda_1(y^2 - x) = 0, \quad \lambda_2(-x-y) = 0 \end{cases}$$ 0,25

Si $\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} 2x + 1 - \lambda_2 = 0 \\ 4y - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2x + 1 \\ y = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \end{cases}$.

0,75

$-x - y = 0 \Leftrightarrow -x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2}x = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{6}}$, $\boxed{y = \frac{1}{6}}$; $\boxed{\lambda_2 = \frac{2}{3}}$

Si $\lambda_2 = 0$: $\begin{cases} 2x + 1 - \lambda_1 = 0 \\ 4y + 2\lambda_1 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -2 < 0$ 0,25

Donc $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ est une solution optimale de (P) et on a $J\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$. 0,25