**جـــامعة محمد الصديق بن يحي – جيجــل**

**كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلـــي**

**قسم الإعلام الآلي** **2024 - 01 – 23**

**السـنة الأولـى** **الوقت : ساعة و 30 دقيقة**

# امتحـــــان " الجـــبر 1"

**التمـرين الأول: (9ن)**

نعتبر $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ والقانون$(*)$ المعرف بـــ : $\forall(x, y) \in G^2;\ x * y = xy + x + y$

1- أثبت ان $(*)$ عملية داخلية في $G$ (يمكنك استعمال البرهان بالتناقض أو البرهان بعكس النقيض)
2- برهن أن $(G,*)$ زمرة تبديلية.
3- ليكن التطبيق $f$ المعرف بـ :

$$f: (G,*) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$$
$$x \longmapsto ax + 1$$

.

- عين قيمة $a$ حتى يكون $f$ تماثل زمري.
- نفرض a=1. عين$Kerf$ نواة التماثل. هل $f$ تشاكل زمري؟

**التمرين الثاني** : (7ن)

لتكن المجموعة $H = \left\{x \in \mathbb{R}: x = a + b\sqrt{3}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

1- برهن أن $H$ مستقرة بعملية الضرب أي:

$$.\forall x = a + b\sqrt{3}, y = a' + b'\sqrt{3} \in H \Rightarrow x \times y \in H$$

2- برهن أن $H$ حلقة جزئية من $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3- من أجل كل $x = a + b\sqrt{3} \in H$ نعرف التطبيق $g$ من $H$ في $\mathbb{Z}$ بـ:

$$g(x) = g\left(a + b\sqrt{3}\right) = a^2 - 3b^2.$$

أ) اثبت أن: $\forall\left(x = a + b\sqrt{3}, y = a' + b'\sqrt{3}\right) \in H^2;\ g(x \times y) = g(x) \times g(y)$

ب) برهن اذا كان $x = a + b\sqrt{3}$ قابل للقلب في $H$ فان $g(x) = \pm 1$.

ت) عين مقلوب $1 + \sqrt{3}$ ؟ استنتج فيما اذا كان $H$ حقلا جزئيا من $(\mathbb{R}, +, \times)$؟

**التمرين الثالث**: (4ن)

نعتبر كثيرات الحدود $A = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 + 3X - 3$ ، $B = X^4 - X^3 + X - 1$

و $C = X^4 + 2X^3 + X^2 + 3$.

1) عين الحاصل Q و الباقي R للقسمة الاقليدية لكثير الحدود A على C . ماذا تستنتج؟
2) احسب القاسم المشترك الأكبر لــ $A$ و $B$ أي $PGCD(A, B)$ .

**بالتوفيق**