

جامعة محمد الصديق بن يحيى – جيجل



كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم المالية والمحاسبة

مقياس الإحصاء 04

أستاذ المقياس: الدكتور رشيد علاب

السداسي الرابع

2026-2025

المحاضرة الأولى:

المعاينة

أهداف المحاضرة:

- ◀ التعريف بطرق المعاينة
- ◀ التعريف بتوزيعات المعاينة للمتوسط والنسبة واستخداماتهما

مدنوى المحاضرة:

1- مقدمة

2- مفاهيم أساسية

3- أساليب المعاينة

3-1 الأساليب غير الاحتمالية (غير العشوائية)

(المعاينة الحصصية ، المعاينة القصدية، معاينة الصدفة)

3-2 الأساليب الاحتمالية (العشوائية)

- المعاينة العشوائية البسيطة
- المعاينة العشوائية المنتظمة
- المعاينة الطبقية

4- توزيع المعاينة

4-1 توزيع المعاينة للمتوسط

4-2 توزيع المعاينة للنسبة

4-3 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

4-4 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي

توزيع المعاينة للتباين

5- ملخص

1- مقدمة

لدراسة ظاهرة معينة يقوم الباحث بتجميع البيانات الاحصائية حوله، وتستخدم في ذلك طريقتين:

- المسح الشامل: وذلك باستجواب أو مراقبة جميع عناصر المجتمع الاحصائي.
- سحب عينة: يتعلق الأمر بسحب عينة بطريقة علمية حتى تكون ممثلة للمجتمع ويمكن أن تلاحظ أن الطريقة الأولى مكلفة وتتطلب جهدا ووقتا، على عكس الطريقة الثانية، لهذا تتجه أغلب الدراسات والأبحاث إلى دراسة العينة بدلا من المجتمع، وهنا يطرح تحد يتعلق بمدى مطابقة النتائج المحصل عليها في العينة على ما يُتوقع أن يكون في المجتمع، وتسمى دراسة خصائص العينات وطرق اختيارها بنظرية المعاينة (Sampling theory).

2- مفاهيم أساسية

المفهوم	التعريف
قاعدة المعاينة	◀ قائمة العناصر التي يتم اختيار العينة من ضمنها
توزيع المعاينة	◀ توزيع احتمالي لجميع القيم المختلفة لـ "إحصاءة" أو مؤشر إحصائي في العينة
العينة	◀ مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي
المعاينة	◀ هي عملية القيام باختيار عينة ممثلة من المجتمع الإحصائي
طرق المعاينة	◀ هي مجموعة متعددة من الطرق التي يتم من خلالها اختيار العينة، ويتم تجميعها غالباً في مجموعتين: طرق احتمالية وطرق غير احتمالية.
المعلمة-الإحصاءة	◀ هي مؤشر إحصائي يعبر عن خاصية وصفية للمجتمع كمتوسط المجتمع: μ و الانحراف المعياري σ والنسبة p
المجتمع	◀ عبارة عن مفردات يقوم الباحث بدراسة خاصية من خصائصها، ويتكون من "وحدات إحصائية"
مجتمع محدود	◀ عدد المفردات منتهي قابل للعد
مجتمع متجانس	◀ مجتمع يتكون من مفردات لها نفس الخصائص
المتوسط داخل المجتمع	نرمز له بالرمز μ
المتوسط داخل العينة	نرمز له بالرمز $\bar{X}$
النسبة داخل المجتمع	نرمز له بالرمز p
النسبة داخل العينة	نرمز له بالرمز f
الانحراف المعياري داخل المجتمع	نرمز له بالرمز σ ويرمز بـ σ^2 لتباين المجتمع
الانحراف المعياري داخل العينة	نرمز له بالرمز S ويرمز بـ S^2 لتباين العينة

3- أساليب المعاينة: Echantillonnage / Sampling

"المعاينة هي عملية اختيار عينة تتكون من مجموعة من المفردات تسحب من المجتمع الأصلي".

• يرمز لحجم العينة بالرمز n - يرمز لحجم المجتمع بالرمز N

هناك العديد من الطرق المعتمدة في اختيار العينة، يقسمها الخبراء إلى مجموعتين من الطرق بحسب طريقة الاختيار بالإضافة إلى أدوات التحليل الإحصائي المعتمدة، وهي:

- الطرق غير الاحتمالية.
- الطرق الاحتمالية.

3-1 الطرق غير الاحتمالية (غير العشوائية)

هي مجموعة من الطرق تتدخل رغبة الباحث الشخصية في اختيار مفردات العينة بحيث لا يكون نفس احتمال الاختيار ضمن العينة، ومن أشهر هذه الطرق:

المعينة القصدية - المعينة الحصصية - المعينة بالصدفة... وغيرها

• المعينة القصدية (Purposive Sampling)

تسمى أيضاً: المعينة الحكيمة / الهادفة، الباحث يختار العينة بناءً على خبرته ومعاييره الخاصة، تُستخدم عندما يكون الهدف اختيار أفراد ذوي خصائص محددة.
مثال: اختيار محاسبين معتمدين، مدققين ماليين، مدراء ماليين فقط.

• المعينة العرضية (Convenience Sampling)

المعينة المتاحة / السهلة / الصدفة
يكون فيها اختيار الأفراد الأسهل وصولاً للباحث. وهي سريعة، قليلة التكلفة، لكنها ضعيفة التمثيل الإحصائي.
مثال: توزيع استبيان على طلبة في نفس الكلية فقط.

• المعينة الحصصية (Quota Sampling)

يتم فيها تقسيم المجتمع إلى فئات (حسب الجنس، العمر، التخصص...) ثم اختيار عدد محدد من كل فئة دون عشوائية داخل الفئة.
مثال: 50٪ ذكور، 50٪ إناث من طلبة الاقتصاد.

• المعينة الشبكية / كرة الثلج (Snowball Sampling)

تبدأ بعينة صغيرة، وكل فرد يقترح مشاركين آخرين. مفيدة في المجتمعات الصعبة الوصول.

مثال: دراسات الاقتصاد غير الرسمي، التهرب الضريبي.

المعينة التطوعية (Voluntary Sampling)

يشارك الأفراد بمحض إرادتهم. لكن خطر التحيز مرتفع (Self-selection bias).
مثال: استبيان إلكتروني مفتوح.

...إلى غير ذلك من الطرق

ملاحظة منهجية مهمة:

الطرق غير الاحتمالية لا تسمح بالتعميم الإحصائي الدقيق
لكنها تفيد فقط في: الدراسات الاستكشافية - الدراسات النوعية - الدراسات التي يصعب فيها تحديد إطار المعينة - البحوث الأكاديمية في العلوم الاجتماعية والمالية التطبيقية

ملاحظة: ليس المجال ولا الوقت مناسباً للتوسع في هذه الطرق، خاصة وأن الإحصاء 3 (الإستدلالي) موضوعه هو الطرق العشوائية أو الاحتمالية، لمزيد من المعلومات حول هذا الموضوع بإمكانكم الاطلاع على طرق المعاينة في جميع كتب الإحصاء.

2-3 الطرق الاحتمالية (العشوائية)

• المعاينة العشوائية البسيطة

هي طريقة من طرق المعاينة الاحتمالية يتم فيها اختيار مفردات العينة من مجتمع الدراسة بصورة عشوائية خالصة، بحيث تكون فرصة الاختيار متساوية ومستقلة لكل فرد من أفراد المجتمع، دون أي تحيز أو تدخل ذاتي من الباحث يشترط فيها شرطين:

- معرفة وتحديد جميع مفردات المجتمع.
- أن يكون هناك تجانس بين مفردات المجتمع.

ويتم اختيار هذه العينة وفق طرق:

- 1- **طريقة القرعة:** وفيها يتم ترقيم جميع عناصر المجتمع وكتابة هذه الأرقام في أوراق صغيرة مع إخفاء المضمون، ثم يتم سحب العينة عشوائياً، ومن عيوب هذه الطريقة تعذر استعمالها للمجتمعات الكبيرة والعينات الكبيرة.
- 2- **طريقة الجداول العشوائية:** وهذه الجداول تكون موجودة داخل كتب الإحصاء، ويتم قراءة الجدول في أي اتجاه يرغبه الباحث سواء رأسياً أو أفقياً أو قطرياً. والشكل التالي يبين مقطعاً من جدول عشوائي:

01581	36001	15892	57621	85239
02972	56177	87580	66794	48123
97022	65380	91304	32853	99729
67583	01277	77815	60558	75920
26935	56306	38710	77239	47139
21201	75983	35695	60517	14579
02628	26124	68322	01436	85994
93635	69404	76323	33459	70041
08984	81320	03226	60959	78246
04415	78662	28295	46513	92889
13070	18401	14382	48262	53177
53531	36891	29620	72532	47368
87733	74995	61843	88472	15736
47619	57452	92819	34401	48782
94060	67951	28895	79309	91897

وفق المنهجية التالية:

- أ. تحديد وتعريف المجتمع.
- ب. تحديد حجم العينة المرغوب فيه.
- ج. إعداد قائمة بأسماء أفراد المجتمع.
- د. ترقيم مفردات المجتمع من 1 إلى N.

هـ. نأخذ صفحة من صفحات الجداول العشوائية نختار عموداً أو سطراً أو قطراً عدد أرقامه هو نفس عدد أرقام المجتمع (إذا كان حجم المجتمع هو 350 فإن الجدول المختار هو جدول ذو 3 أرقام) وننطلق من الرقم الأول في السطر أو العمود أو القطر وتكون هذه نقطة البداية في اختيار العينة.

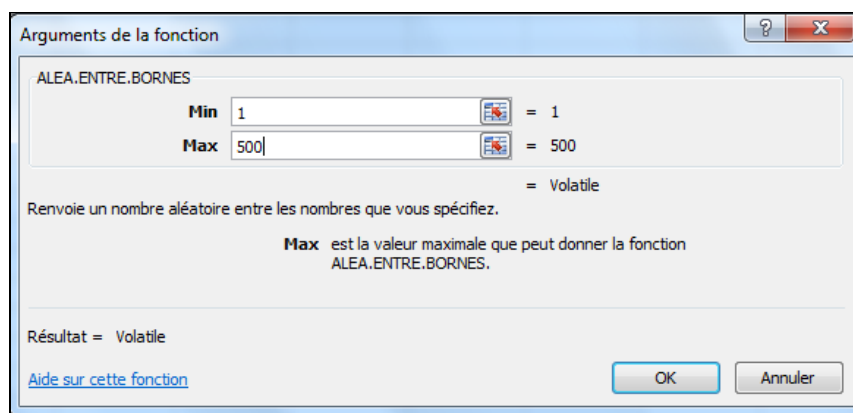
و. نختار الأعداد العشوائية في الجدول العشوائي التي تنتمي تكون محصورة بين 1 و آخر عدد في المجتمع حتى تكتمل العينة.

ملاحظات:

- في حالة إذا تكرر العدد أو زاد عن الرقم الموجود لديك في القائمة يتم تجاهله.
- وعندما ينتهي العمود الأول ننتقل إلى أعلى العمود الثاني، وهكذا حتى نحصل على حجم العينة المرغوب.

3. المولدات العشوائية بالحاسوب (Random Number Generator)

- يمكن اختيار العينة أيضاً باستخدام برنامج إكسل Excel باستخدام الدالة التالية: ALEA.ENTRE.BORNES، بحيث نضع الترقيم الأدنى والترقيم الأعلى للمفردات، ثم نسحب الفأرة إلى أسفل حتى نحصل على حجم العينة المطلوب.



ثم نمدد بواسطة الفأرة إلى مدى 10 خانات مثلاً (حجم العينة) فنحصل على ما يلي:

	A
1	259
2	107
3	403
4	1
5	90
6	257
7	103
8	228
9	270
10	47

4. طريقة المولدات العشوائية بالبرامج الإحصائية SPSS، R

- يمكن إختيار العينة أيضا باستخدام الـ SPSS، باختيار الايقونات التالية:

Données → Sélectionner des observations → par échantillon aléatoire

مثال 1: مجتمع حجمه $N=500$ طالبا، نريد اختيار عينة مكونة من 10 مفردات، لاختيار هذه العينة نقوم بما يلي:

- نرقم عناصر المجتمع من 1 إلى 500 (كل طالب يحمل رقما).
- من جدول الأرقام العشوائية نأخذ سطرا أو عمودا مكونا من 3 أرقام ونختار 10 أرقام، نطابق هذه الأرقام مع القائمة الأصلية لمفردات المجتمع، وتكون العينة هم 10 طلبة يحملون الأرقام المختارة.

مثال 2: إذا كان لدينا مجتمع مكون من 1000 طالب، ونريد اختيار عينة من 100 طالب:

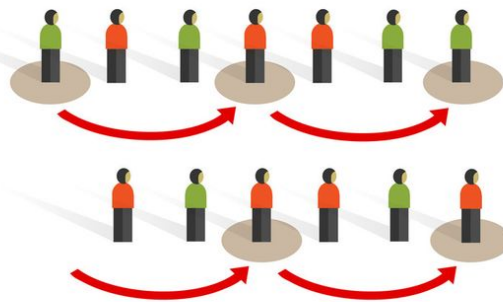
- يتم ترقيم الطلبة من 1 إلى 1000
- ثم اختيار 100 رقم عشوائي بالحاسوب (EXCEL)
- الأرقام المختارة تمثل أفراد العينة

• المعاينة العشوائية المنتظمة

هي إحدى الطرق الاحتمالية، ويتم اختيار العينة وفق هذه الطريقة باتباع الخطوات التالية:

- نقوم أولا بحساب "الخطوة" K بحيث: $k = \frac{N}{n}$
- باستخدام الجدول العشوائي نختار رقما الجدول الذي له عدد أرقام مطابق لعدد أرقام k .
- نضيف في كل مرة العدد k "الخطوة"، حتى تكتمل العينة

Systematic sampling



مثال:

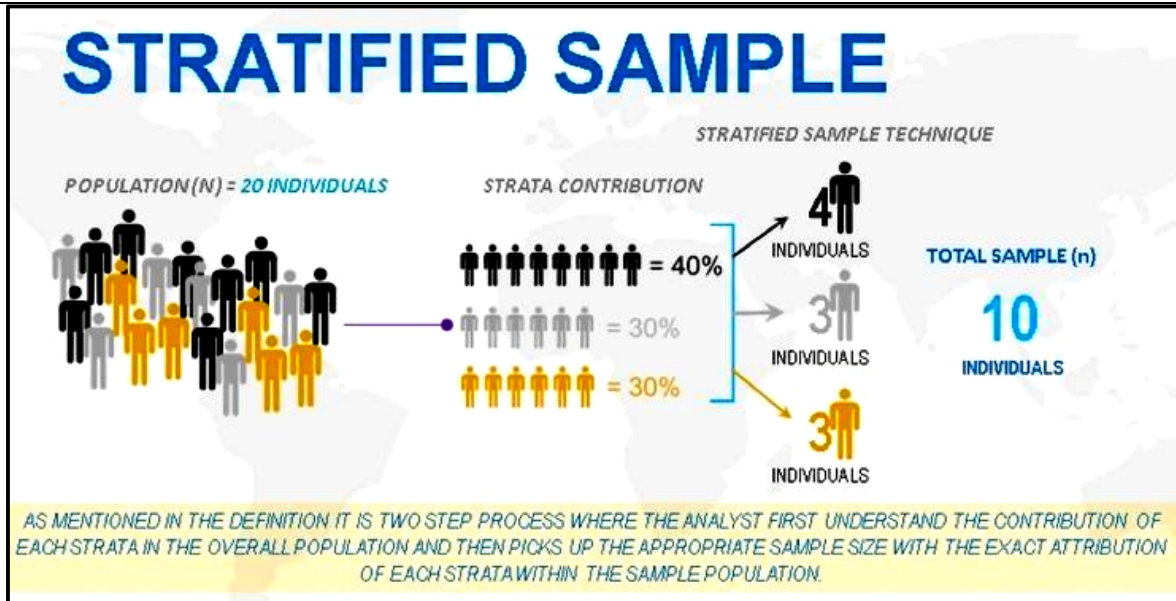
في مجتمع مكون من 300 مفردة، نريد اختيار عينة عشوائية مكونة من 10 مفردات:

- نقوم أولاً بحساب "الخطوة" K بحيث: $k = \frac{N}{n} = \frac{300}{10} = 30$
- باستخدام الجدول العشوائي نختار رقما الجدول الذي له عدد أرقام مطابق لعدد أرقام k ، ليكون العدد "14".
- نضيف في كل مرة 30، فنحصل على العينة التالية:

• المعاينة العشوائية الطبقية:

هي طريقة من طرق المعاينة الاحتمالية تقوم على تقسيم مجتمع الدراسة إلى طبقات (Strata) متجانسة داخلياً وفق خصائص محددة (مثل: الجنس، العمر، التخصص، المستوى العلمي، القطاع...)، ثم يتم سحب عينة عشوائية من كل طبقة، إما بنسبة تمثيلها في المجتمع أو بعدد محدد، وذلك لضمان تمثيل جميع الفئات الأساسية في العينة تستخدم في حالة المجتمعات غير المتجانسة، بعد تقسيم المجتمع نقوم باختيار عينة عشوائية داخل كل طبقة، بحيث:

عدد مفردات الطبقة "في العينة" = (حجم الطبقة / حجم المجتمع) × حجم العينة



مثال:

إذا كان عدد طلبة قسم علوم المالية والمحاسبة هو 250، ونريد اختيار عينة عشوائية مقدارها 20، وبسبب عدم تجانس المجتمع من ناحية الجنس نقوم بقسمة المجتمع إلى طبقتين: ذكور / إناث، وكان:

- عدد الطلبة الذكور هو 50
- عدد الطلبة الإناث هو 200، فإنه وحسب القاعدة:

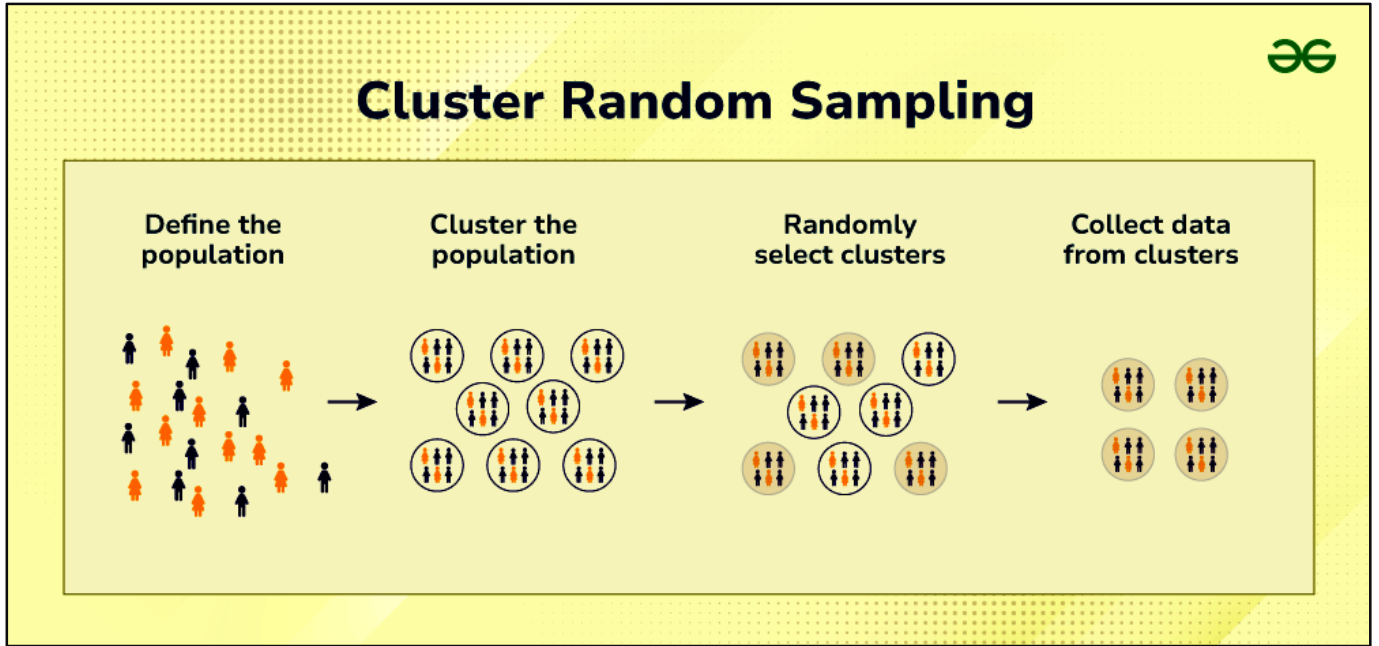
عدد مفردات الطبقة "في العينة" = (حجم الطبقة / حجم المجتمع) × حجم العينة

عدد الطلبة الذكور في العينة = $4 = 20 \times (250 / 50)$

عدد الطلبة الذكور في العينة = $16 = 20 \times (250 / 200)$

• المعاينة العشوائية العنقودية

هي طريقة من طرق المعاينة الاحتمالية يتم فيها تقسيم مجتمع الدراسة إلى عناقيد (Clusters) طبيعية أو تنظيمية (مثل: مدارس، جامعات، أحياء، مؤسسات، فروع بنكية...)، بحيث يكون كل عنقود غير متجانس داخلياً ويمثّل المجتمع ككل، ثم يتم اختيار عدد من العناقيد عشوائياً، وبعدها: إما دراسة جميع مفردات العناقيد المختارة أو سحب عينة عشوائية داخل كل عنقود مختار



مثال:

دراسة على طلبة جامعة وطنية:

تقسيم المجتمع إلى كليات (عناقيد) - اختيار 5 كليات عشوائياً

ثم دراسة جميع الطلبة فيها - أو اختيار عينة عشوائية من كل كلية.

• المعاينة متعددة المراحل Multistage Sampling

تتم عبر أكثر من مرحلة من السحب العشوائي

مزيج من الطبقية + العنقودية + العشوائية البسيطة

مثال:

دراسة حول السلوك الادخاري للأسر في الجزائر.

المرحلة الأولى:

تقسيم المجتمع إلى وحدات كبرى: ← الولايات (عناقيد كبرى) - ثم اختيار 4 ولايات عشوائياً

المرحلة الثانية:

داخل كل ولاية مختارة: ← اختيار بلديات عشوائياً

المرحلة الثالثة:

داخل كل بلدية ← اختيار أحياء عشوائياً

المرحلة الرابعة:

داخل كل حي: ← اختيار أسر عشوائياً

النتيجة:

العينة النهائية = أسر مختارة عشوائياً عبر عدة مراحل متتالية من التقسيم والاختيار.

مثال آخر (طلبة):

رضا الطلبة عن جودة التعليم الجامعي

- جامعات (اختيار جامعات عشوائياً)
- كليات (اختيار كليات عشوائياً)
- أقسام (اختيار أقسام عشوائياً)
- طلبة (اختيار طلبة عشوائياً)

4 - تعريف توزيع المعاينة:

نفتتح هذا العنصر بسؤال:

كم عدد العينات ذات حجم n الممكن سحبها من مجتمع يتكون من N مفردة؟؟؟

الإجابة: نميز بين حالتين:

◀ السحب بدون إرجاع (السحب النفاذي): C_N^n

◀ السحب مع الإرجاع (السحب غير النفاذي): N^n

إذا أخذنا جميع العينات ذات حجم n الممكن سحبها من مجتمع ما بحجم N ، فإننا يمكننا حساب "إحصاءات" أو مؤشرات إحصائية لكل عينة (المتوسط الحسابي - الانحراف المعياري - التباين - النسبة...)، بحيث تتغير هذه المؤشرات من عينة لأخرى، إن تغير هذه المؤشرات تشكل توزيعاً احتمالياً لهذه المؤشرات يُطلق عليه اسم: "توزيع المعاينة".

مثال:

ليكن لدينا **مجتمع** مكون من 5 ($N=5$)، طلبة أعمارهم كما يبينه الجدول التالي:

الشخص	(01)	(02)	(03)	(04)	(05)
السن	21	23	27	29	30

$$\mu_x = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{(21+23+27+29+30)}{5} = 26 \quad /1 \text{ المتوسط الحسابي: } 26$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N} = \frac{(21-26)^2 + (23-26)^2 + \dots + (30-26)^2}{5} = 12 \quad /2 \text{ تباين المجتمع: } 12$$

المطلوب الآن هو تشكيل جميع العينات الممكنة من شخصين مع حساب متوسط كل عينة:

◀ إذا كان السحب مع الإرجاع فإن عدد العينات الممكنة: هو $N^n = 5^2 = 25$

◀ كل عينة لها احتمال $1/25$ لأن تُختار، النتائج المحصل عليها ملخصة في الجدول التالي:

العينه رقم	تتكون من الشخصين	سن الأشخاص	متوسط العينة
1	(1،1)	(21،21)	21
2	(2،1)	(23،21)	22
3	(3،1)	(27،21)	24
4	(4،1)	(29،21)	25
5	(5،1)	(30،21)	25,5
6	(1،2)	(21،23)	22
7	(2،2)	(23،23)	23
8	(3،2)	(27،23)	25
9	(4،2)	(29،23)	26
10	(5،2)	(30،23)	26,5
11	(1،3)	(21،27)	24
12	(2،3)	(23،27)	25
13	(3،3)	(27،27)	27
14	(4،3)	(29،27)	28
15	(5،3)	(30،27)	28,5
16	(1،4)	(21،29)	25
17	(2،4)	(23،29)	26
18	(3،4)	(27،29)	28
19	(4،4)	(29،29)	29
20	(5،4)	(30،29)	29,5
21	(1،5)	(21،30)	25,5
22	(2،5)	(23،30)	26,5
23	(3،5)	(27،30)	28,5
24	(4،5)	(29،30)	29,5
25	(5،5)	(30،30)	30

ملاحظات:

- المتوسط يتراوح بين: 21 و 30
- هناك متوسطات تظهر أكثر من مرة، وهناك من تظهر مرة واحدة
- احتمال الظهور مرة واحدة هو: $1/25$ ، وكلما زاد عدد مرات الظهور كلما زاد الاحتمال أي إذا ظهر المتوسط مرتين فإن الاحتمال هو $2/25$ ، إلخ.

يمكن أن نبوب هذه المتوسطات كما يلي:

المتوسط	التكرار	التكرار النسبي (الاحتمال)
21	1	25/1
22	2	25/2
23	1	25/1
24	2	25/2
25	4	25/4
25.5	2	25/2
26	2	25/2
26.5	2	25/2
27	1	25/1
28	2	25/2
28.5	2	25/2
29	1	25/1
29.5	2	25/2
30	1	25/1
المجموع	25	1

- حساب متوسط المتوسطات: أي متوسط المعاينة: نكتب:

$$E(\bar{X}) = \frac{\sum \bar{X}_i}{25} = \frac{650}{25} = 26$$

لاحظ جيدا أن متوسط المعاينة هو نفسه متوسط المجتمع، أي: $E(\bar{X}) = \mu$

- حساب تباين المتوسطات:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum (\bar{X} - E(\bar{X}))^2}{25} = \frac{150}{25} = 6$$

لاحظ جيدا أن تباين متوسط المعاينة هو تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة، أي:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{12}{2} = 6$$

الخلاصة:

هو توزيع احتمالي لقيم إحصائية (Statistic) ناتجة عن جميع العينات الممكنة ذات الحجم نفسه التي يمكن سحبها من نفس المجتمع الإحصائي، حيث يبين هذا التوزيع كيف تتغير قيمة الإحصائية من عينة إلى أخرى ، سنركز على دراسة متوسط المعاينة وتباين متوسط المعاينة:

- متوسط المعاينة $E(\bar{X}) = \mu_x$ وتباين متوسط المعاينة $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$

ملاحظة:

في حالة السحب بدون إرجاع يكون توزيع للمتوسط كما يلي:

$E(\bar{X}) = \mu_x$	المتوسط
$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$	التباين
$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1} \right)}$	الانحراف المعياري

- يطلق على المعامل: $\frac{N-n}{N-1}$ معامل التصحيح.
- إذا كان حجم المجتمع N كبيراً جداً بالمقارنة مع حجم العينة n فإن المقدار $\frac{N-n}{N-1}$ يؤول إلى 1، وبالتالي يفقد تأثيره على قيمة التباين والانحراف المعياري،
- يحدد الإحصائيون هذا الكبر بالعلاقة: $n \leq 0.05N$ أي أنه في هذه الحالة لا داعي لاستخدام معامل التصحيح.

مثال تطبيقي:

إذا كان لديك مجتمع مكون من 5 مفردات تحمل أرقاماً هي: (2-4-6-8-10)

- (1) أوجد المتوسط الحسابي وتباين المجتمع
- (2) أوجد خصائص توزيع المعاينة للمتوسط إذا تم سحب مفردتين أ. في حالة السحب مع الإرجاع
ب. في حالة السحب بدون إرجاع

الإجابة:

(1) إيجاد المتوسط الحسابي وتباين المجتمع: $\mu = 6 \dots \dots Var(x) = 8$

(2) إيجاد خصائص المعاينة:

$$\begin{cases} E(\bar{X}) = \mu = 6 \\ Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases} \text{ في حالة السحب مع الإرجاع:}$$

$$\begin{cases} E(\bar{X}) = \mu = 6 \\ Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = \frac{8}{2} \times \frac{5-2}{5-1} = 3 \end{cases} \text{ في حالة السحب دون إرجاع:}$$

4-1: توزيع المعاينة للمتوسط:

أ- توزيع المعاينة للمتوسط عندما يكون المجتمع موزع طبيعيا

إذا كان المجتمع الذي تنتمي إليه العينة "طبيعيا" بمتوسط μ وانحراف معياري σ ، فإن متوسط العينة يتبع بدوره التوزيع الطبيعي بمتوسط $E(\bar{X}) = \mu$ وانحراف معياري: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ ونكتب:

$$\bar{X} \rightarrow N(E(\bar{X}), \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}})$$

ملاحظة مهمة:

تفيدنا معرفة طبيعة التوزيع الاحتمالي للمتوسط في حساب الإحتمالات والاجابة على الاسئلة من الشكل: "ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة يقل / يزيد عن مقدار ما)

مثال:

يختار مدير شركة عينة عشوائية حجمها 16 من مجموع زبائن يقدر بـ: 1000، نفترض أن مقادير مشترياتهم تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط مشتريات: 26000 دج، وانحراف معياري قدره: 4500 دج

1- أوجد خصائص توزيع المعاينة للمتوسط.

2- ما هو احتمال أن يكون متوسط مشتريات هذه العينة أقل من 28250 دج؟

الإجابة:

1- خصائص توزيع المعاينة للمتوسط (المتوسط والانحراف المعياري):

إذا كان: $X \sim N(\mu = 26000, \sigma = 4500)$ فإن: $\bar{X} \sim N(E(\bar{X}) = 26000, \sigma_{\bar{X}} = \frac{4500}{\sqrt{16}})$

أي: متوسط توزيع المعاينة: $E(\bar{X}) = 26000$ ، تباين متوسطات توزيع المعاينة: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4500}{\sqrt{16}} = 1125$

2- حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} < 28250)$

ب: توزيع المعاينة للمتوسط عندما يكون المجتمع مجهولا:

حسب نظرية "النهاية المركزية" فإنه إذا كان حجم العينة كبيرا ($n \geq 30$) فإن توزيع المعاينة للمتوسط يمكن أن يتم تقريبه إلى توزيع طبيعي مهما كان توزيع المجتمع الأصلي.

أما إذا كان حجم المجتمع صغيرا وله توزيع مجهول فيمكننا أن نحسب المتوسط الحسابي والتباين، لكن لا يمكننا تقريبه إلى التوزيع الطبيعي.

مثال:

مجتمع حجمه $N=900$ بمتوسط $\mu = 20$ و $\sigma = 12$ ، نستخرج عينة ذات حجم 36 ،

1- أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتوسطات

2- أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة أقل أو يساوي 22

3- أحسب احتمال أن يكون هذا المتوسط محصورا بين 18 و 21

الإجابة:

1- حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتوسطات

$$\text{المتوسط: } E(\bar{X}) = \mu = 20$$

الانحراف المعياري: نتأكد أولا من المقدار $0.04 < 0.05$ ومنه $\frac{n}{N} = \frac{36}{900}$ لا داعي لإدراج معامل

$$\text{التصحيح} - - \text{ ومنه } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

2- حساب احتمال أن يكون متوسط العينة أقل أو يساوي 22

$$P(\bar{X} < 22) = P\left(\frac{\bar{X} - 20}{2} < \frac{22 - 20}{2}\right) = P(Z < 1) = 0.8413$$

3- حساب احتمال أن يكون هذا المتوسط محصورا بين 18 و 21

$$P(18 < \bar{X} < 21) = P\left(\frac{18 - 20}{2} < \frac{\bar{X} - 20}{2} < \frac{21 - 20}{2}\right) = P(-1 < Z < 0.5) = \phi(0.5) - \phi(-1) = 0.5328$$

4-2 توزيع المعاينة للنسبة:

أحيانا تكون الخاصية المراد دراستها هي نسبة بدلا من المتوسط، كـ: "نسبة الناجحين"، "نسبة الذكور"، "نسبة العمال"

أ - متوسط النسبة وتباينها (وانحرافها المعياري):

إذا كان لدينا مجتمع يتميز بنسبة لصفة ما : P وتم سحب عينة ذات حجم n فإن توزيع المعاينة للنسبة هو:

• المتوسط هو: $E(\hat{P}) = P$ متوسط المعاينة للنسبة هو نفسه النسبة داخل المجتمع.

• الانحراف المعياري: $\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

• التباين: "مربع الانحراف المعياري": $\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$

حيث:

P : نسبة ظهور الظاهرة في المجتمع

Q : نسبة عدم ظهور الظاهرة في المجتمع

ملاحظة: يضرب معامل التصحيح في قيمة الانحراف المعياري إذا كان المجتمع محدودا أو $\frac{n}{N} \leq 0.05$

ب - حساب الاحتمالات المتعلقة بالنسبة باستخدام التوزيع الطبيعي:

حسب نظرية النهاية المركزية فإنه إذا كان: $n \geq 30$ ، وكان المجتمع يتميز بخاصية معينة

معبر عنها بنسبة، فإن توزيع المعاينة للنسبة هو: $\hat{P} \rightarrow N\left(E(\hat{P}) = p, \sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

وبالتالي يستخدم جدول التوزيع الطبيعي لحساب الاحتمالات.

مثال: إذا كانت نسبة الناجحين في مسابقة ما هي: 60% وتم سحب عينة عشوائية حجمها 150 فرد.

1- أوجد خصائص توزيع المعاينة للنسبة

2- أوجد احتمال أن تكون نسبة الناجحين داخل العينة أقل من 65%.

الإجابة

1- إيجاد خصائص توزيع المعاينة للنسبة

لدينا: $n = 150$ ونسبة الناجحين داخل المجتمع: $P = 0.6$

$$\hat{P} \rightarrow N \left(E(\hat{P}) = p, \sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

$$\hat{P} \rightarrow N \left(0.6, \sqrt{\frac{0.6(0.4)}{150}} \right)$$

$$\hat{P} \rightarrow N(0.6, 0.04)$$

أي: $(E(\hat{P}) = 0.6, \sigma_{\hat{P}} = 0.04)$

2- إيجاد احتمال أن تكون نسبة الناجحين داخل العينة أقل من 65%.

$$P(P < 0.65) = P \left(\frac{P - E(\hat{P})}{\sigma_{\hat{P}}} < \frac{0.65 - E(\hat{P})}{\sigma_{\hat{P}}} \right)$$

$$P(P < 0.65) = P \left(Z < \frac{0.65 - 0.6}{0.04} \right) = P(Z < 1.25) = 0.8944$$

4-3 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين:

أ- إذا كان كلا المجتمعين يتوزعان طبيعياً:

نفترض أنه لدينا مجتمعين (1) و (2) يتوزعان توزيعاً طبيعياً بمتوسطين μ_{X1} و μ_{X2} وانحرافين معياريين σ_{X1} و σ_{X2} ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين له بدوره توزيع طبيعي يتميز بالخصائص التالية:

$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_{X1} - \mu_{X2}$	المتوسط
$Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \frac{Var(X_1)}{n_1} + \frac{Var(X_2)}{n_2}$	التباين
$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{Var(X_1)}{n_1} + \frac{Var(X_2)}{n_2}}$	الانحراف المعياري

ب- إذا كان كلا المجتمعين مجهولي التوزيع:

إذا كانت العينتين كبيرتين (أكبر من 30) فإنه مهما كان توزيع المجتمعين فإن توزيع المعاينة طبيعي

مثال: عينة عشوائية حجمها 20 سحبت من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 50 وتباين 9، وعينة أخرى بحجم 15 سحبت من مجتمع طبيعي بمتوسط 40 وتباين 4.

- 1- أوجد خصائص توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين
 2- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 8.20

الإجابة

1- إيجاد خصائص توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين

لدينا: $n_1=20$ و $\mu_{X_1} = 50$ و $\sigma_{x_1} = 9$

لدينا: $n_2=15$ و $\mu_{X_2} = 40$ و $\sigma_{x_2} = 4$

بما أن المجتمعين يتوزعان طبيعياً فإن توزيع المعاينة بدوره توزيع طبيعي، بالخصائص التالية:

- المتوسط: $E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_{X_1} - \mu_{X_2} = 50 - 40 = 10$

- الانحراف المعياري: $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{9}{20} + \frac{4}{15}} = 0.85$

2- إيجاد احتمال $p(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 8.20)$

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 8.20] = P\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 10}{0.85} \leq \frac{8.20 - 10}{0.85}\right] = P(Z \leq -2.12) = 1 - P(Z \leq 2.12) = 0.0170$$

4-4 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتيين:

أ- إذا كان كلا المجتمعين يتوزعان طبيعياً:

نفترض أنه لدينا مجتمعين (1) و (2) يتوزعان توزيعاً طبيعياً ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين

نسبتي العينتين له بدوره توزيع طبيعي يتميز بالخصائص التالية:

- المتوسط: $E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2$
- التباين: $Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sigma_{\hat{p}_1}^2 + \sigma_{\hat{p}_2}^2 = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$
- الانحراف المعياري: $\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = \sqrt{\sigma_{\hat{p}_1}^2 + \sigma_{\hat{p}_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

ب- إذا كان كلا المجتمعين مجهولي التوزيع:

إذا كانت العينتين كبيرتين (أكبر من 30) فإنه مهما كان توزيع المجتمعين فإن توزيع المعاينة طبيعي

مثال:

حسب دراسة داخل جامعة ما، تبين أنه من بين 1400 طالب في العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير حصل 70% من الطلبة على معدل يفوق 10، وأنه من بين 1200 طالب في كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية، تبين أن 65% من الطلبة حصلوا على معدل يفوق 10. أخذت عينة عشوائية مقدارها 350 طالب بدون إرجاع من كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وأخذت عينة أخرى حجمها 150 طالب بدون إرجاع من كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية، وكانت العينتين مستقلتين عن بعضهما.

1. أوجد توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين

2. أحسب احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي العينتين أقل من 20%.

الإجابة

المتغير الأول: $n_1 = 350$, $p_1 = 0,7$, $N_1 = 1400$
 المتغير الثاني: $n_2 = 150$, $p_2 = 0,65$, $N_2 = 1200$
 1- إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين:

$$E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2 = 0,7 - 0,65 = 0,05$$

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}^2 = \sigma_{\hat{p}_1}^2 + \sigma_{\hat{p}_2}^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{p_2 q_2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right) \quad \text{مع العلم: } \frac{n_1}{N_1}, \frac{n_2}{N_2} > 0,05$$

$$= \frac{(0,7)(0,3)}{350} \left(\frac{1400 - 350}{1400 - 1} \right) + \frac{(0,65)(0,35)}{150} \left(\frac{1200 - 150}{1200 - 1} \right)$$

$$= 0,0006(0,76) + 0,002(0,84) = 0,0022$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{0,0022} = 0,047 \approx 0,05$$

2- إيجاد الاختبار: $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0,2)$. (توزيع طبيعي) $30 < n_1, n_2$

$$\begin{aligned} P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0,2) &= P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0,05}{0,054} < \frac{0,2 - 0,05}{0,054} \right) \\ &= P(Z < 3) = 0,9986 \end{aligned}$$