

Chapitre II : Écoulement souterrain sous l'influence d'un pompage

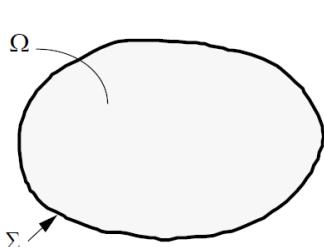
1. Equation fondamentale de l'hydrodynamique : L'écoulement en milieux poreux est régi par les lois de la physique et de la thermodynamique et peut être décrit par des équations différentielles aux dérivées partielles basées sur l'équation de Laplace. En effet, la loi de conservation de la masse établit que tout changement dans la masse qui s'écoule à travers un volume élémentaire de l'aquifère doit être compensé par un changement dans la masse contenue dans le volume. La loi de la conservation de l'énergie, ou première loi de la thermodynamique, établit que, dans un système clos, il y a une quantité constante d'énergie qui ne peut être perdue ou augmentée. Ces deux lois doivent être respectées dans l'élaboration des équations de l'écoulement souterrain et c'est à partir de ces dernières, et de la loi de comportement de Darcy, que les équations générales de l'écoulement en milieu poreux ont été définies.

1.1. Etablissement de l'équation de diffusivité : on se propose d'établir une relation qui permette de décrire le mouvement d'une particule d'eau en fonction de sa position, du temps, des caractéristiques physiques du fluide et de l'encaissant (le terrain). On dispose de 3 types de relations :

- *Equations d'état isotherme du fluide :*

$$\rho = \rho_0 e^{(P-P_0)}, \text{ avec ; } \beta : \text{ coefficient de compressibilité du fluide } [M^{-1} L T^2]$$

- *Equation de continuité (conservation de la masse) : ("rien ne se perd, rien ne se crée")*



$$\frac{\partial M}{\partial t} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho n}{\partial t} d\Omega$$

$$\operatorname{div}(\vec{\rho}V) + \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \rho q = 0$$

avec ; Ω : volume de frontière Σ , M : masse du fluide, n : porosité

- *Equation de la dynamique ($\vec{F} = m\vec{y}$) :* Les équations de la dynamique se traduisent pour les fluides visqueux, dont les coefficients de viscosité sont supposés constants, en équation de Navier Stokes.

A partir de ces 3 types d'équations on peut établir l'équation de diffusivité.

1.2. Développement de l'équation de la diffusivité (Loi de Darcy (1856)) : la loi de Darcy est

donnée par la formule suivante : $Q = K \frac{A}{L} (h_1 - h_2)$

Q : débit (m^3/s), K : coefficient de perméabilité (m/s)

$$h_1 = z_1 + \frac{P_1}{\rho g}, \quad h_2 = z_2 + \frac{P_2}{\rho g}$$

La loi de Darcy peut être écrite sous la forme différentielle :

$$v = -k \frac{\Delta h}{L} \quad \text{Si ; } L \Rightarrow 0, \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial L}$$

Le coefficient K dépend du terrain traversé et du fluide qui traverse ce terrain. La loi de

Darcy peut s'exprimer sous la forme générale : $\vec{V} = -\frac{k}{m} (\vec{\text{grad}} p + r g \vec{\text{grad}} z)$

Implicitement nous avons généralisé la loi à trois dimensions en supposant que le terrain était homogène et isotrope et que la loi établie en dimension 1 était valable pour les 3 composantes

de l'espace c'est à dire que l'on pouvait écrire : $v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}$

Si le milieu est anisotrope :

$$\left. \begin{array}{l} v_x = -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_y = -k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_z = -k_{zx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \end{array} \right\} \quad \text{Si : } \bar{k} = \begin{pmatrix} K_{xx..} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix}$$

$$v = \bar{k} \cdot \text{grad}(h)$$

- *L'équation conservation de la matière* : Considérant la densité de l'eau comme peu variable, la somme des débits entrant dans un volume fermé de milieu poreux est :

En régime permanent : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$

En régime transitoire (quantité d'eau emmagasinée ou produite) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = -\frac{dm}{dvdt}$

Si : α : coefficient de compressibilité du solide, β : Coefficient de compressibilité du fluide

η : Porosité du solide, ρ : Indépendant de temps t

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = -\rho(\alpha + n\beta) \frac{dP}{dt}$$

En remplaçant les vitesses par leur valeur de Darcy :

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\rho K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho K_y \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = -\rho(\alpha + n\beta) \frac{\partial \rho g h}{\partial t}$$

Si : $Ss = \rho g(\alpha + \eta\beta)$ coefficient d'emmagasinement spécifique du milieu (L^{-1}) et après

simplification : Equation de Boussinesq : $\frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = Ss \frac{dh}{dt}$

- Cas bidimensionnel : dans le cas bidimensionnel l'équation de diffusivité s'écrite :

$$\frac{\partial}{\partial x}(T_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T_y \frac{\partial h}{\partial y}) = S \frac{dh}{dt} + q(x, y, t)$$

Avec q : somme algébrique de débit injecté ou pompé dans un ver à l'instant t

En nappe captive : débit soutiré dans un puits, débit de recharge ou d'injection, débit de drainance.

En nappe libre : débit d'infiltration de la pluie et débit d'évapotranspiration.

Équations valables pour un écoulement en charge (nappe captive) où le milieu poreux est limité par deux plans horizontaux imperméables et non déformables. Dans le cas d'une nappe libre, on peut utiliser les équations précédentes si le battement est faible, S devenant la porosité du milieu.

Dans cette équation aux dérivées partielles de l'hydrodynamique souterraine, encore appelée l'équation de la diffusivité : l'inconnue est le $h(x, y)$, quant à $T(x, y)$, $S(x, y)$ et $q(x, y)$ ce sont les données, et x, y et t sont les variables.

1.3. Propriétés de l'équation de diffusivité

- *Unicité de la solution* : Si D est un domaine d'intégration donné de l'équation de diffusivité, muni de conditions aux limites et initiales, on démontre, que si h vérifie ces conditions aux limites et si h vérifie l'équation de diffusivité, h est, en général, la solution unique du problème (en régime permanent ou transitoire).

- *Principe de superposition* : Dans un domaine D l'équation de diffusivité est linéaire en h et en q . Si (h_1, q_1) et (h_2, q_2) sont 2 solutions particulières de l'équation de diffusivité vérifiant des conditions aux limites données, alors $\alpha \times h_1 + \beta \times h_2$ est solution de la même équation, avec les débits $\alpha q_1 + \beta q_2$ et les conditions aux limites qui en résultent.

1.4. Solutions de l'équation de diffusivité lors de pompage dans un puits : Un des ouvrages le plus fréquent en hydraulique souterraine consiste en un puits atteignant un aquifère. Ces puits permettent de prélever un débit Q constant ou variable dans la nappe (ou une partie de la nappe) ainsi atteinte. Pour connaître les caractéristiques hydrauliques des réservoirs il est fréquent d'effectuer des "pompages d'essais" qui consiste à enregistrer les variations de la

charge hydraulique (ou du débit) au puits et dans des piézomètres proches du puits en fonction du temps. Ces variations sont interprétées selon différents modèles théoriques de comportement.

- *Equation de diffusivité en coordonnées radiales* : En coordonnées radiales l'équation de diffusivité s'écrit : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial H}{\partial t}$

2 . Essai de puits et essais de nappe

Les expérimentations, par pompage à débit constant sur les puits et sondages sont exécutées par des essais de puits et des pompages d'essais. Elles consistent à mesurer l'accroissement des rabattements du niveau piézométrique en relation avec le temps de pompage et leur remontée après arrêt de l'opération.

Les interprétations sont effectuées par résolution graphique des expressions d'hydrodynamique souterraine en régime transitoire.

- Les essais de puits par paliers de débit, suivis d'arrêt de durée égales et courtes évaluent les caractéristiques du complexe aquifère/ouvrage de captage. Ce sont le débit spécifique, les pertes de charge et la productivité.
 - Les pompages d'essais, de longue durée, mesurent la transmissivité et le coefficient d'emmagasinement et étudient qualitativement les caractéristiques particulières de l'aquifère comme les conditions aux limites, les hétérogénéités et la drainance.

2.1. Equipement technique des puits et sondages : L'équipement technique d'un sondage comporte deux éléments essentiels :

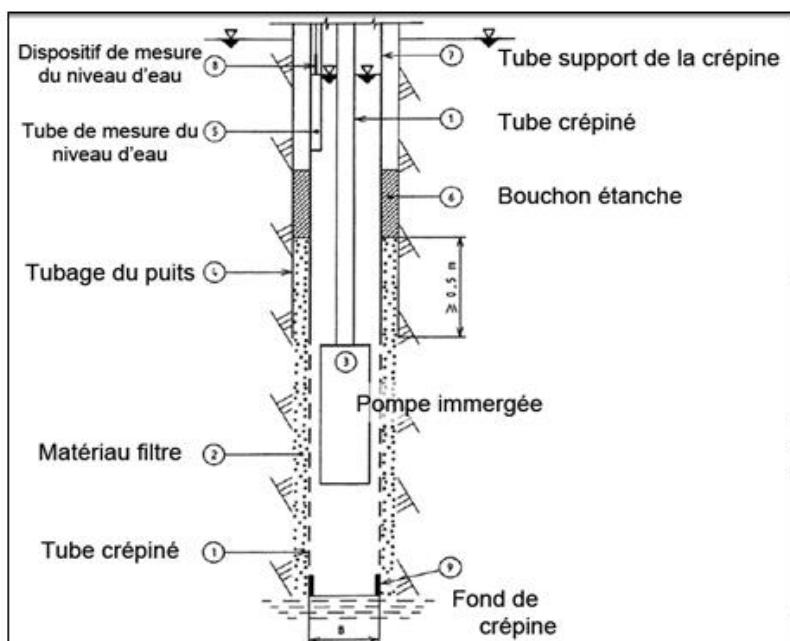


Figure. 9 : Partie captant d'un ouvrage de captage

➤ *La colonne ascensionnelle* : constituée d'un tube unique ou d'éléments télescopiques, soutient la paroi du trou. L'espace annulaire, entre le tubage et le terrain, est obstrué par une colonne de ciment. Celle-ci joue un double rôle : consolidation de l'ouvrage et suppression des fuites et intercommunications entre aquifères. A sa base elle est ancrée dans le toit de l'aquifère à nappe captive ou dans le substratum de la nappe libre. Son diamètre est calculé pour le logement de la pompe et en vue de limiter la perte de charge quadratique.

➤ *La partie captante* : comporte une crêpine et, éventuellement, un massif filtrant (fig.9). La crêpine est un tube perforé d'ouvertures de formes diverses, à travers lesquelles l'eau pénètre dans le sondage. Dans les terrains meubles l'espace annulaire, entre la crêpine et le terrain, est rempli de gravier calibré. Son rôle est double : filtre retenant les éléments fins augmentant la perméabilité au voisinage du sondage et soutènement du terrain. Diamètre des ouvertures et granulométrie du gravier sont calculés par des expressions empiriques introduisant le diamètre caractéristique des grains du réservoir. L'ensemble, partie captant et aquifère au voisinage immédiat du sondage, constituent *un complexe aquifère/ ouvrage de captage*.

2.2. Effet d'un pompage sur un aquifère : Un pompage d'essai consiste à mesurer l'effet direct de l'exploitation d'un forage sur l'aquifère. Le pompage dans un aquifère crée une dépression en forme d'entonnoir dont l'axe coïncide avec celui du forage. Quand la nappe est libre, ce cône de dépression affecte le réservoir (fig.10) tandis qu'il est fictif dans celui à nappe captive (fig.11). L'expérimentation a pour but de mesurer, à débit constant, l'évolution dans le temps de ce cône de rabattement au droit du forage et si possible dans un ouvrage voisin (piézomètre). Les mesures portent également sur son effacement après arrêt du pompage : c'est la remontée.

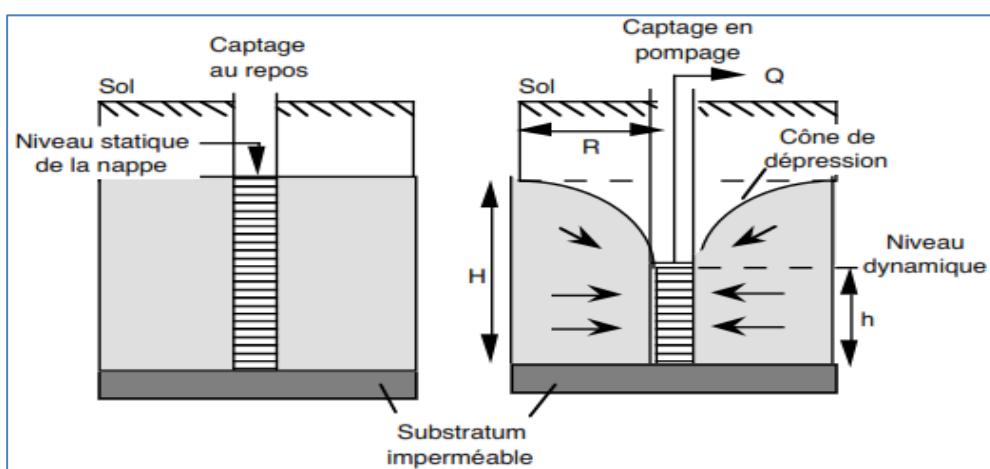


Figure.10 : Fonctionnement d'un captage d'eau souterraine en nappe libre.

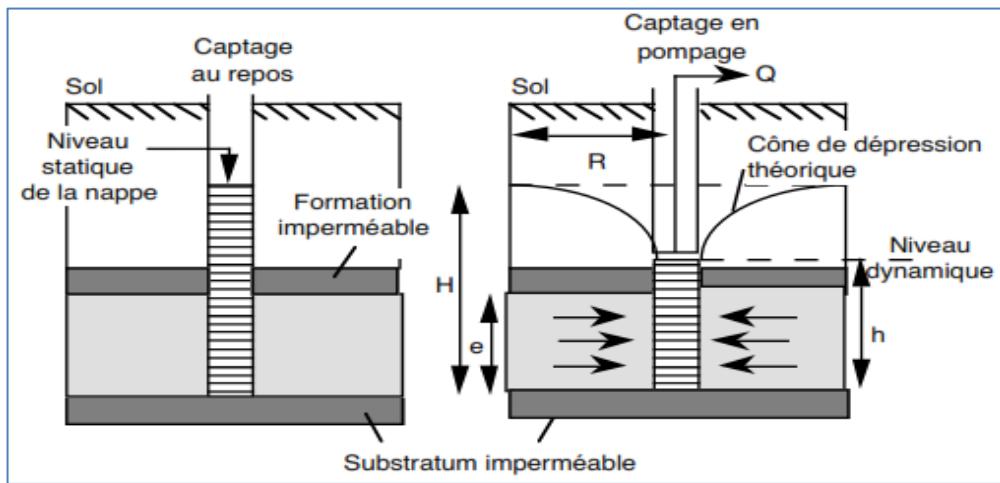


Figure. 11 : Fonctionnement d'un captage d'eau souterraine en nappe captive non jaillissant.

2.2.1. Géométrie du cône de dépression : Le cône de dépression est délimité par le domaine où la surface piézométrique est influencée. C'est-à-dire affectée de rabattements mesurables. Il caractérise un écoulement à trois dimensions représentées en coupe et en plan. Les deux données géométriques du cône de dépression, à un instant donné, t , sont :

- **Le rabattement :** noté s , mesuré par l'abaissement du niveau piézométrique dans le puits de pompage ou dans un piézomètre implanté à une distance, x , de l'axe de l'ouvrage. Le plan d'eau, dans l'ouvrage est *le niveau dynamique*. La profondeur du niveau dynamique au-dessous du niveau piézométrique initial, en régime non influencé, est le rabattement, s qui correspond au rabattement et aux pertes de charges singulières dans le puits. Le rabattement, mesuré au cours de la remontée, est appelé *rabattement résiduel*, s_r .
- **Le rayon d'influence :** noté R , est la distance de l'axe du puits à laquelle le rabattement est nul ou négligeable (fig.12). Dans la pratique où il n'est plus mesurable.

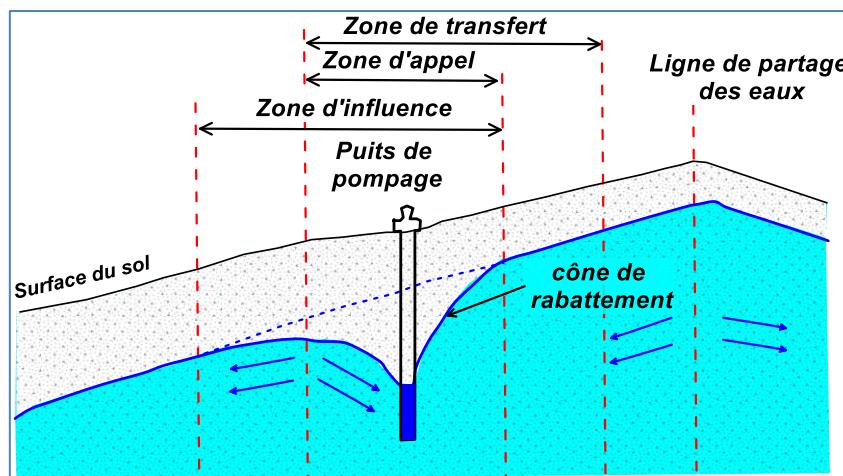


Figure. 12 : Cône de rabattement induit par un pompage.

En conditions naturelles, un aquifère est en état d'équilibre dynamique. Le pompage dans un forage modifie cet équilibre et provoque un rabattement de la surface de la nappe. Cela induit des écoulements d'eau de l'extérieur vers l'intérieur du captage ; il faut alors distinguer deux zones :

- **La zone d'influence** est la zone dans laquelle les niveaux sont influencés, donc rabattus par le pompage,
- **La zone d'appel** est la partie de la zone d'influence dans laquelle l'ensemble des lignes de courant se dirigent vers le forage de pompage. Elle est comprise dans l'aire d'alimentation du captage qui se prolonge en amont jusqu'à une limite du système.

2.3. Métrologie d'un essai de pompage : Divers éléments extérieurs peuvent avoir une influence non négligeable sur les nappes (pression atmosphérique, position des marées par rapport aux heures des essais (forages près d'une côte maritime), pluviométrie, crues des rivières, etc). Il convient de mettre en place un dispositif permettant l'évacuation des eaux pompées. Elle ne doit pas pouvoir retourner dans l'aquifère et doit être évacuée à une distance telle qu'elle n'interfère pas avec la nappe. Les principales directives générales concernant la programmation d'un essai portent sur :

- Choix du site de station d'essai ;
- Caractéristiques techniques de l'ouvrage de pompage ;
- Dispositif des piézomètres ;
- Débit constant et durée de pompage ;
- Intervalle des mesures de rabattements ;
- Choix de l'époque de l'essai

2.3.1. Choix du site de station d'essai : Le site doit remplir les conditions générales suivantes : homogénéité du réservoir, faible gradient hydraulique, absence de captages en exploitation à proximité, possibilités d'évacuation des eaux de pompage, accès facile, éloignement des routes et voies ferrées à grande circulation (effet sur la surface piézométrique). Dans le test des conditions aux limites, il faut que le régime transitoire soit observé sur une durée assez longue pour tracer la droite représentative du cas général. La distance du puits à la limite sera : $d > \frac{22.4r}{\sqrt{S}}$.

2.3.2. Caractéristiques techniques de l'ouvrage de pompage : l'ouvrage de pompage doit être parfait, c'est-à-dire atteindre le substratum et être crépiné sur toute l'épaisseur de l'aquifère. Les lignes de courant sont, en nappe captive, horizontales et parallèles. Le maximum de débit est capté pour un rabattement donné.

Le diamètre du tubage et de la crépine, doit permettre l'installation de la pompe et de ses accessoires (tube guide de mesure). En général de l'ordre de 0.5 à 1 m. un jeu de 25 mm est recommandé entre le corps de la pompe et le tubage. Il doit éviter la perte de charge quadratique qui limiterait artificiellement le débit exhaure.

2.3.3. Dispositif des piézomètres : Le nombre de piézomètres est imposé par le problème à résoudre et évidemment par les crédits disponibles. Les piézomètres doivent avoir un temps de réponse très faible. Leur choix sera donc défini à partir de la nature du terrain aquifère. La précision des interprétations est fonction de leur nombre. Il peut être limité à un pour les aquifères homogènes illimités, à deux pour l'étude des caractéristiques particulières : conditions aux limites et drainance. Pour l'étude du complexe aquifère/rivière, il est conseillé de placer un piézomètre à proximité de la rive opposée à la station d'essais.

La distance r , du (ou des) piézomètre à l'axe du puits est comprise entre deux limites extrêmes. Elle doit être supérieure à 5m pour éviter l'influence des pertes de charges au voisinage de l'ouvrage et l'hétérogénéité du réservoir provoquée par l'exécution des travaux de fonçage. Elle doit être au maximum de 150m, afin d'obtenir des mesures de rabattement significatives et de rester dans la limite de validité de l'expression de C.E Jacob. Elle sera égale au tiers du rayon d'influence à explorer. Pour le test des conditions aux limites, il est préalable de placer un ou deux piézomètres au plus près de la limite sur un axe perpendiculaire, passant par le puits. La bonne distance, avec un seul piézomètre est de l'ordre de 50 m.

La profondeur des piézomètres, en aquifère homogène est suffisante, à 0.5 à 1 m, sous la surface piézométrique déprimé. Dans le cas contraire un piézomètre complet est nécessaire.

2.3.4. Débit constant et durée de pompage : le débit de pompage, constant, doit satisfaire deux conditions : être le plus élevé possible, tout en restant compatible avec le rabattement maximum admissible jusqu'à la fin de l'essai et pouvoir être maintenu avec une tolérance de 5% pendant toute sa durée. Pour les aquifères à nappe libre (le rabattement final ≤ 0.1 b).

La durée du pompage t_p doit être assez longue pour dépasser l'effet de capacité du puits et permettre l'application de l'expression de C.E Jacob. Elle doit donc dépasser cet effet d'au moins deux cycles logarithmiques. Or les valeurs approximatives de la durée de cet effet, décroissent avec l'augmentation de la transmissivité ($t_c = \frac{25r^2}{T}$ et $t_p \geq 20 t_c$). Avec un rayon de puits classique de 1 m, elle est de 250 heures pour une très faible transmissivité ($3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$), de 25 heures pour une faible transmissivité ($3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$), de 2.3 heures pour une transmissivité moyenne ($3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$) et très courte, 1.30 minutes pour une transmissivité

élevée ($3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$). le pompage d'essai n'est donc pas possible dans deux premiers cas. Son prix de revient serait prohibitif. Pour le test des conditions aux limites, l'influence se fait sentir au puits de pompage après un temps approximatif, $t_p = \frac{0.5d^2S}{T}$, d' étant la distance de l'axe du puits à la limite. La durée de pompage est alors, $t_p = \frac{0.5d^2S}{T}$. Il faut éviter de placer le puits trop près d'une limite afin que l'effet de celle-ci ne soit pas trop faible.

2.3.5. Intervalle des mesures de rabattements : Les données des mesures de rabattements sont essentiellement des mesures effectuées avant, pendant et après le pompage. Elles doivent être sûres, précises et utilisables indépendamment des opérateurs les ayant réalisées. Outre une grande rigueur dans l'opération de la mesure, il est indispensable d'utiliser du matériel en bon état. L'intervalle des mesures de rabattements doit être très court pendant les 30 premières minutes du pompage. Les mesures des niveaux dynamiques et du débit sont faites à intervalles réguliers comme indiqué dans les tableaux suivants pour la descente et pour la remontée (après l'arrêt du pompage).

Tableau.1 : Intervalle entre les mesures de rabattements au cours d'un pompage d'essai.

<i>Durée depuis le début de pompage</i>	<i>Mesures des rabattements (s)</i>	<i>Mesures de Débit (Q)</i>
0 à 5 mn	Toutes les 30 secondes	Toutes les minutes
5 à 10 mn	Toutes les minutes	Toutes les 2 mn
10 à 20 mn	Toutes les 2 mn	Toutes les 5 mn
20 à 40 mn	Toutes les 5 mn	Toutes les 5 mn
40 à 1h30	Toutes les 10 mn	Toutes les 10 mn
1h30 à 3h	Toutes les 15 mn	Toutes les 15 mn
3h à 5h	Toutes les 30 mn	Toutes les 30 mn
5h à 8h	Toutes les heures	Toutes les heures
Au delà de 8h	Toutes les heures	Toutes les heures

Ces mesures restent indicatives, il est clair que suivant la réaction de l'aquifère on peut avoir à diminuer l'intervalle d'échantillonnage des mesures.

2.3.6. Choix de l'époque de l'essai : éviter les périodes de fortes variations barométriques et de précipitations intenses. Dans le cas, il est recommandé d'utiliser un barographe. Pour l'étude des conditions aux limites aquifère/rivière, éviter les périodes de crue du cours d'eau.

3. Essai de puits par paliers de débits de courtes durées

Les essais de puits par paliers de débit, suivis d'arrêt de durée égales et courtes évaluent les caractéristiques du complexe aquifère/ouvrage de captage. Ce sont : le débit critique, le débit spécifique, les pertes de charge et la productivité. Ils permettent d'établir le programme d'équipement technique de l'ouvrage : tubage, crépine et massif filtrant, puissance de la pompe, etc.

3.1. Conditions de base : les conditions de base d'application des expressions d'hydrodynamique souterraine en régime transitoire, auxquelles doit satisfaire le complexe aquifère/ ouvrage de captage sont :

- a. *Validité de la loi de Darcy : écoulement laminaire et milieu isotrope ou homogène,*
- b. *Puits complet : captant toute l'épaisseur de l'aquifère, atteignant le substratum et crépiné sur toute sa hauteur,*
- c. *Puits correctement développé et équipé,*
- d. *Surface piézométrique subhorizontale,*
- e. *Débit de pompage constant,*
- f. *Rayon du puits le plus petit possible.*

3.2. Principe d'essai de puits : L'essai de puits est effectué en réalisant des *paliers de débit*, à débit constant pendant une courte durée déterminée (de 1 à 4 h). Chaque palier de débit est suivi d'un *arrêt de pompage* d'une durée au moins égale, permettant la remontée du niveau d'eau et la mesure du rabattement résiduel.

Les résultats de l'essai par paliers sont résumés pour chaque palier par deux données, le débit constant, en m^3/heure et le rabattement en mètre. Le rabattement est égal à la différence entre le niveau dynamique et le niveau statique. La stabilisation du niveau à l'occasion de pompages effectués à des débits Q_1, Q_2, Q_3, \dots correspond à des rabattements s_1, s_2, s_3, \dots Le report des points représentatifs sur un graphique permet de tracer la *courbe caractéristique* de l'ouvrage. La courbe caractéristique est un élément fondamental.

Exemple d'application :

Tableau.2 : Données d'un essai de puits par paliers de débits de courtes durées

Palier	Q (m^3/h)	s (m)	Qs ($(\text{m}^3/\text{h})/\text{m}$)	Q (m^3/s)	ss ($\text{m}/\text{m}^3/\text{s}$)	ss ($\text{m}/\text{m}^3/\text{h}$)
	0.00	0.00		0.00		
1	42.00	0.81	51.852	0.0117	69.429	0.0193
2	87.00	2.01	43.284	0.0242	83.172	0.0231
3	132.00	3.53	37.394	0.0367	96.273	0.0267
4	178.00	6.47	27.512	0.0494	130.854	0.0363

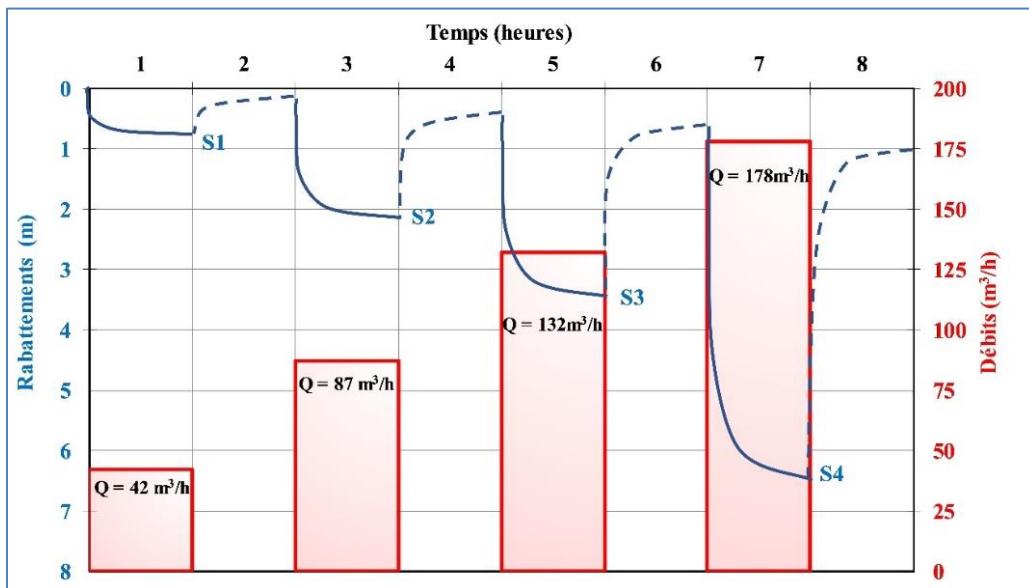


Figure.13 : Essai de puits par paliers de débits de courtes durées

3.3. Signification du rabattement dans les ouvrages. Pertes de charge

Le rabattement, mesuré dans l'ouvrage à un instant, t , est la somme de deux composantes, nommées *pertes de charge*, exprimées en *mètres* de hauteur d'eau, caractérisant le complexe aquifère/ ouvrage de captage. Le rabattement total, s , à l'instant, t , est ainsi donné par l'expression de C.E. Jacob : $s = BQ + CQ^2$

3.3.1. Pertes de charge linéaires : provoquées par l'écoulement laminaire est de régime transitoire dans l'aquifère au voisinage du puits, *notées* ; BQ . Elles résultent de deux effets :

-*Influence de l'aquifère* : les pertes de charge linéaires, imposées par les paramètres hydrodynamiques de l'aquifère, au voisinage de l'ouvrage, croissent avec le temps de pompage. Elles sont caractéristiques de l'aquifère.

-*Influence de la partie captante de l'aquifère* : remaniement du réservoir, crêpine et massif filtrant. L'effet peut être positif apporte une amélioration de l'écoulement, but recherché. Il est négatif en présence de colmatage. Cette perte de charge est une constante, dépendant uniquement de la technique d'équipement de l'ouvrage.

3.3.2. Pertes de charge quadratiques, *notées* CQ^2 : Elles sont fonction uniquement du débit pompé, constantes à débit constant. Elles sont caractéristiques de l'équipement technique de l'ouvrage, du diamètre de tubage et de la crêpine.

Remarque : pour de faibles débits, impliquant une faible vitesse, les pertes de charge dans le tubage et dans la crêpine sont linéaires ou négligeables.

L'équation : $s = BQ + CQ^2$ se simplifie : $s = BQ$.

Lorsque la vitesse effective dans l'aquifère est supérieure à la vitesse critique, l'équation devient : $s = CQ^2$, donc le terme CQ^2 inclut toutes les pertes de charge dans l'aquifère et dans l'ouvrage.

3.4. Interprétation graphique des données de l'essai de puits

3.4.1. Relation débit/temps et rabattement/temps : Sur un papier graphique à coordonnées linéaires sont portés, en ordonnées les débits ou les rabattements et les temps en abscisses. Deux graphiques sont obtenus, ils permettent de contrôler le bon déroulement de l'expérimentation d'essais de puits.

- Graphique *débits/temps* de pompage, figurant les durées et les débits des paliers de débit, les durées et les arrêts de remontées.

- Courbe *rabittement/temps* de pompage et *rabittement résiduels/temps* de remontée.

3.4.2. La courbe caractéristique (Courbe débits/rabattements) : le couple de données de chaque palier de débit, débit constant, en m^3/h et rabattement résiduel en m, est porté sur un papier graphique linéaire. Les points obtenus tracent la courbe ; *débits/rabattement* ou courbe caractéristique, présentant la fonction ; $s = f(Q)$. Sa forme apporte des informations sur le comportement hydrodynamique du complexe aquifère/ouvrage de captage à l'origine de la perte de charge quadratique ; nulle ou négligeable avec une droite, importante avec une courbe convexe. Une courbe concave traduit un essai de puits non valable : mesure incorrecte ou apparition d'un développement au cours de pompage.

D'après la figure suivante on obtient : $Q_{max} = 105 (m^3/h)$, $s_{max} = 2.5m$, $Q_c = 124 (m^3/h)$, $s_c = 3.2 m$

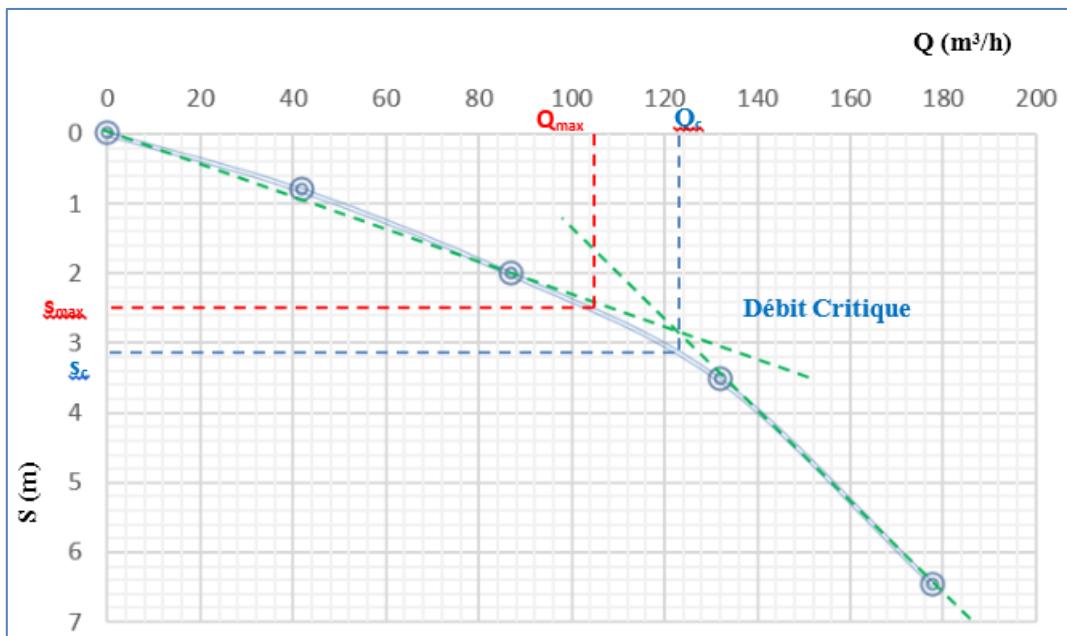


Figure.14 : Courbe caractéristique (débits/rabattements)

La courbe *débits/rabattements* présente deux parties distinguées par *le point critique*, correspondant en abscisse *au débit critique Qc* (fig.14). Sa valeur, significative à la date de l'essai, correspond à un état instantané de l'aquifère, position de la surface piézométrique en particulier.

Débit critique Qc : débit correspondant au moment où l'écoulement laminaire fait place à un écoulement turbulent (vitesse critique). A cet instant, le régime turbulent fait augmenter les pertes de charges quadratiques. Cela se traduit par un accroissement rapide du rabattement. En nappe libre, $s_{\max} = b/3$ (b épaisseur de l'aquifère). En nappe captive, $s_{\max} = 0.75 h$ (hauteur d'eau avant pompage).

La productivité d'un puits, Pr , est le débit maximum qui peut être pompé dans l'ouvrage, pendant une durée définie, sans que le rabattement induit par le pompage ne dépasse le rabattement maximum admissible.

Débit maximum admissible Qadm : cette notion tient compte du Qc , des caractéristiques de l'aquifère, du matériel, et des risques divers de colmatage.

Le débit d'exploitation recommandé : il devra tenir compte :

- Du débit critique déterminé par l'essai par palier,
- Des résultats de l'essai de nappe (effets limites, fluctuations saisonnières de la nappe,
- Des caractéristiques de l'équipement de captage (position des crépines, de la pompe, des sécurités manque d'eau),
- Des risques de colmatage (mécanique, physico-chimique, bactérien, entartrage),
- Des problématiques liées à la qualité de l'eau (biseau salé, ...),
- Du mode d'exploitation souhaité par le maître d'ouvrage.

Dans la pratique le débit de pompage doit toujours être inférieur au débit critique. La courbe caractéristique est un élément fondamental qu'il est indispensable de posséder. Elle peut, en effet, être utilisée par la suite pour détecter les améliorations ou les détériorations de l'ouvrage. Elle peut, classiquement, avoir plusieurs formes : puits idéal 1 (droite), puits réel après acidification 2 (amélioration), puits réel état initial 3, puits réel après vieillissement 4 (colmatage).

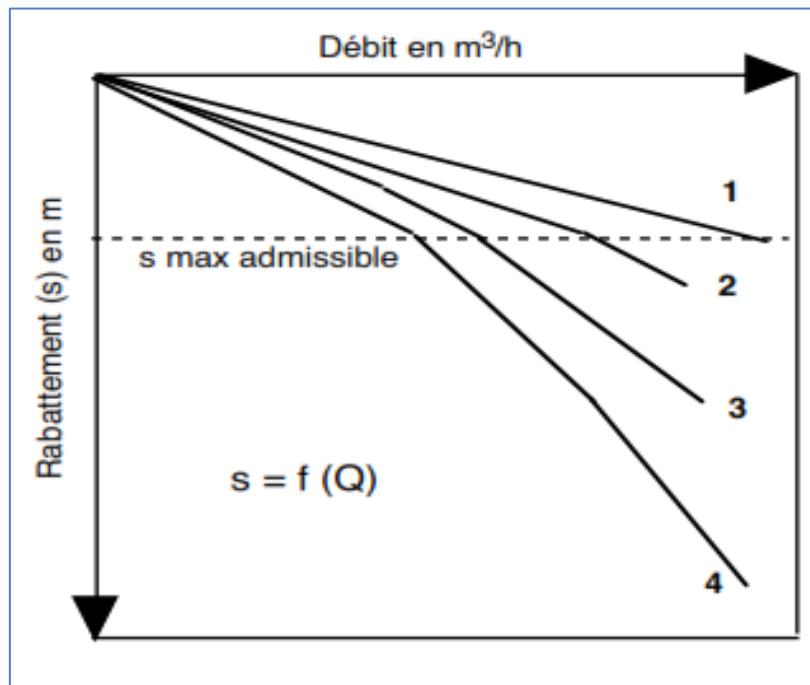


Figure.15 : Courbe caractéristique de puits (Detay M, 1993).

3.4.3. Droite débits spécifiques/rabattements : Le débit spécifique d'un puits, noté q_s , est le débit pompé Q , rapporté au rabattement s , dans le puits, dans les conditions d'essais de puits définies. Le graphique est représenté par une droite inclinée, représentative de la fonction ; $s = f(q_s)$. Cette droite permet de calculer le débit spécifique relatif, ou débit constant pompé déterminant un rabattement unitaire (1mètre) à la fin d'un palier de débit. Sur la droite ; débits spécifiques/rabattements, l'abscisse correspondant à l'ordonnée 1mètre, donne la valeur du débit spécifique relatif ($q_{sr} = 49$ ((m³/m) /m).

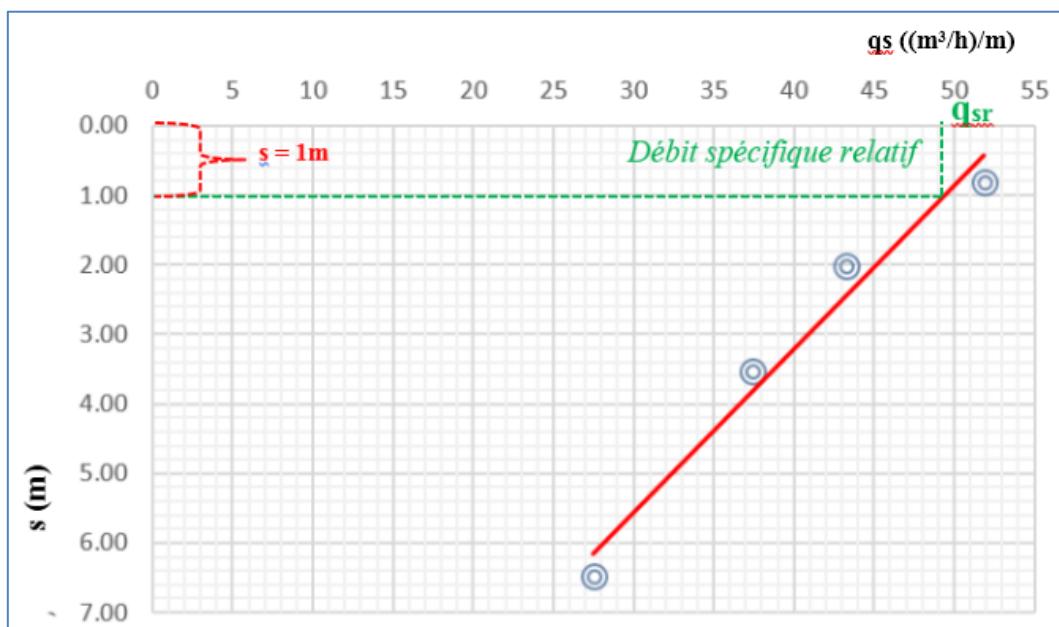


Figure. 16 : Droite débits spécifiques/rabattements

3.4.4. Droite débits/rabattements spécifiques : le rabattement spécifique, s/Q est la hauteur de rabattement mesurée dans le puits, rapportée au débit pompé dans des conditions d'essais de puits définies (paliers de débit).

L'équation de Jacob peut s'écrire : $s/Q = B + CQ$, Il est exprimé en $(m/m^3) \cdot s$.

La courbe s/Q en fonction de Q doit être une droite de pente C et d'ordonnée à l'origine. *B. Walton* a proposé une méthode qui permet de caractériser l'état du puits par la valeur de C :

Tableau.3 : Etat du puits par rapport la pente du droite débits/rabattements spécifiques

Valeur de la pente C	Etat du puits
$C < 675 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	<i>Bon puits, développement correct</i>
$675 < C < 1350 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	<i>Puits médiocre</i>
$C > 1350 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	<i>Puits colmaté ou détérioré</i>
$C > 5400 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	<i>Puits irrécupérable</i>

D'une façon générale, quatre cas peuvent se présenter :

- droite (1) passant par l'origine indique que le régime turbulent est fortement prédominant dans l'aquifère et dans le puits ($s = CQ^2$) ;
- droite (2) ne passant pas par l'origine ($s = BQ + CQ^2$)
- droite (3) à pente nulle, verticale, parallèle à l'axe des ordonnées, traduisant un écoulement laminaire, avec perte de charge dans la crête et le tubage nulle ou négligeable ($s = BQ$) ;
- courbe (4) concave vers le haut ($s = BQ + CQ^n$).

- La droite débits/rabattements spécifiques, permet de déterminer les coefficients B et C de l'équation : $s/Q = B + CQ$.
- le coefficient B est obtenu par l'intersection de la droite représentative avec l'axe des rabattements spécifiques.
- le coefficient C est égal à la pente de la droite représentative.

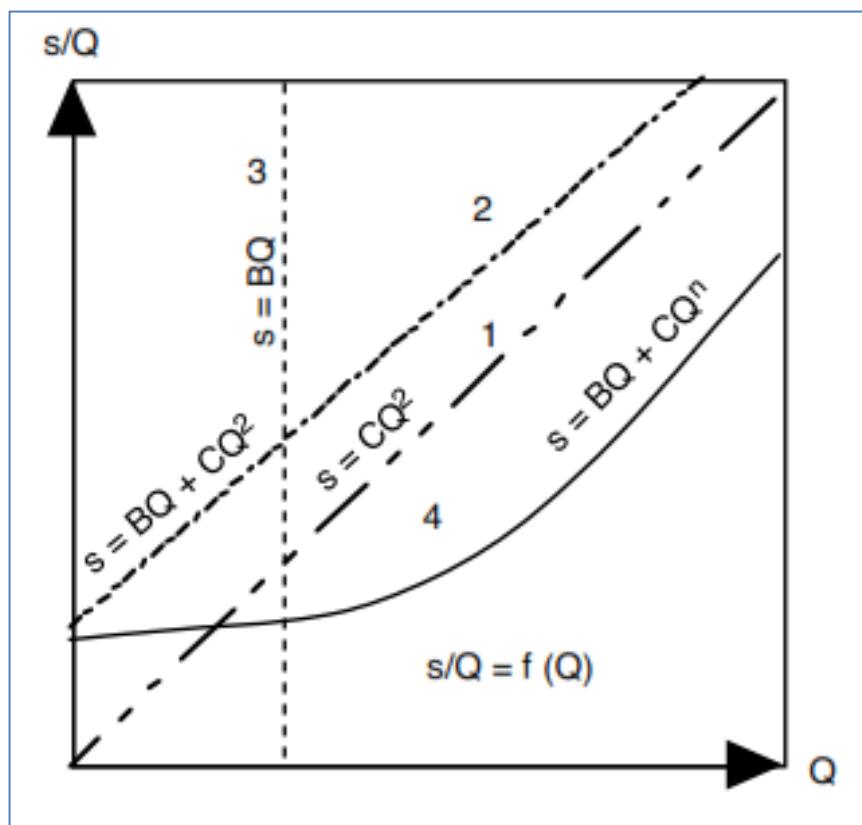


Figure. 17 : Droites débits/rabattements spécifiques (Forkasiewicz, 1978).

D'après la figure suivante : les pertes de charges ; $s/Q = B + CQ \Rightarrow s/Q = 48 + 1500Q$

Donc le Puits est colmaté ou détérioré ($c=1500$).

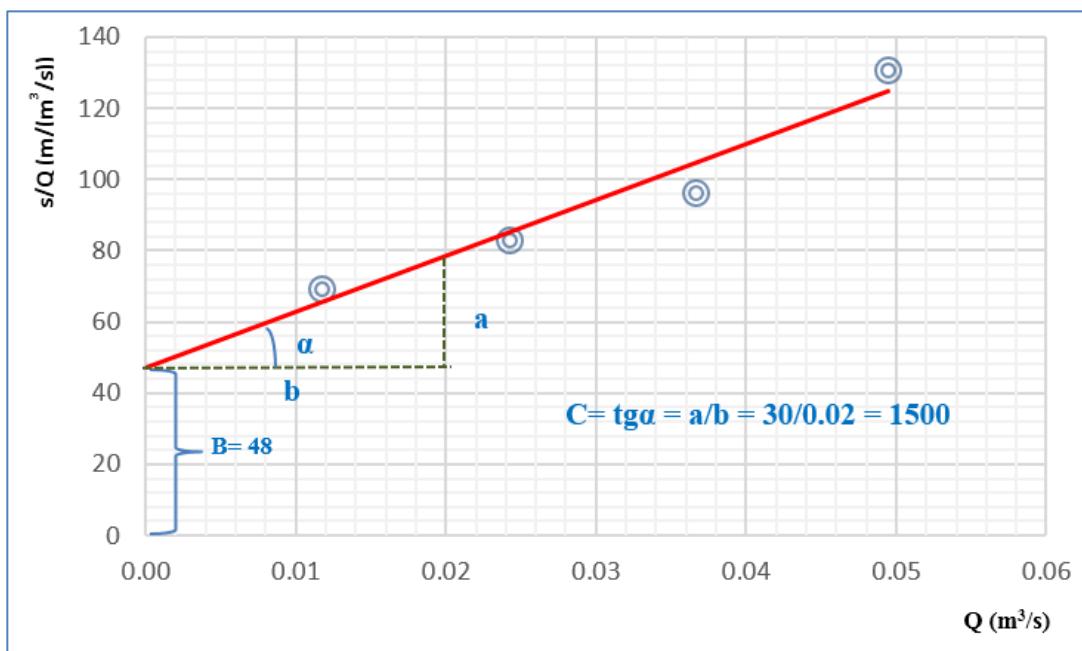


Figure. 18 : Droite débits/rabattements spécifiques

3. Pompage d'essai de longue durée

Les pompages d'essai en régime transitoire sont de longue durée par rapport aux essais en régime permanent. Ils sont exécutés en un seul palier de débit (débit constant) pendant au moins 48 heures, avec un optimum à 72 heures. La remontée doit être mesurée pendant au moins 6 heures et normalement pendant une durée égale à celle de l'essai. Le débit de l'essai est choisi d'après la courbe caractéristique déterminée par les essais en régime permanent.

Le suivi du rabattement au niveau du forage pompé permet d'estimer la transmissivité. Afin de calculer le coefficient d'emmagasinement, il est nécessaire de suivre l'évolution du rabattement dans un ouvrage distant non exploité (piézomètre par exemple). Le rabattement sera maximal au point de prélèvement, puis se propagera dans l'espace à partir de ce point. L'importance de la baisse des niveaux est liée aux caractéristiques hydrodynamiques de la nappe (à qualité d'ouvrage et débit de pompage identiques).

Le pompage d'essai de longue durée poursuit trois buts principaux :

1. Mesure sur le terrain des paramètres hydrodynamiques : transmissivité T et coefficient d'emmagasinement S .
 2. Etude quantitative des caractéristiques particulières de l'aquifère : conditions aux limites, structure.
 3. Observation directe, en « vraie grandeur », de l'effet de l'exploitation sur l'aquifère.
- Prévision de l'évolution du rabattement en fonction des débits pompés.
 - Évaluation de la ressource en eau souterraine exploitable.

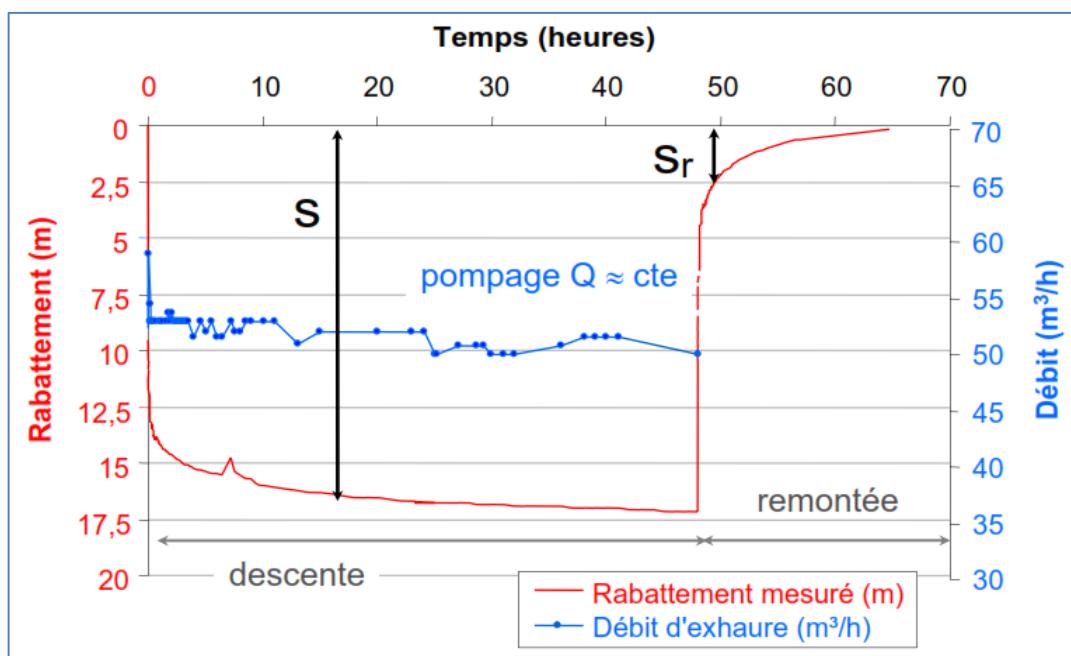


Figure.19 : Pompage d'essai de longue durée.

Plusieurs méthodes permettent actuellement d'interpréter les données de rabattement obtenues par les essais de pompage suivant le type d'aquifère dans lequel l'essai est conduit. Dans les chapitres qui suivent nous présentons les solutions les plus fiables des problèmes de pompage soit en régime permanent, soit en régime transitoire et leurs champs d'application.

Les méthodes d'interprétation des pompages d'essai ont considérablement évolué au cours des dernières décennies du fait des progrès en matière de mesure et de traitement des données. Les plus célèbres, les plus simples et les plus utilisées en hydrodynamique souterraines sont celles des méthodes de Dupuit, 1863 et Thiem 1906 pour le régime permanent et les méthodes de Theis, 1935 et Jacob, 1946 pour le régime transitoire. La solution dite de Jacob (ou de Cooper-Jacob, 1946) qui détermine graphiquement les paramètres T et S , est obtenue par le tracé et l'interprétation de la droite représentative rabattements/logarithmes des temps de pompage ou rabattements résiduels/logarithmes des temps de remontée. Cette méthode de Jacob dérive de la solution de Theis (1935), qui se présente sous deux formes : soit formule exponentielle intégrale, soit approximation logarithmique de celle-ci, dont l'interprétation se faisait également de manière visuelle par superposition des mesures à un abaque en coordonnées log-log.

Des solutions analytiques et des abaques de plus en plus complexes apparaissent par la suite. Ils traitent les effets dits « de puits » sensibles au début du pompage, de limites rectilignes simples ou multiples, d'influence de drainance à travers une couche semi-perméable (Walton 1956, Hantush, 1956 et 1961) ou de retard spécifique à l'écoulement des nappes libres (égouttement) (Boulton, 1963 et Neuman, 1972 et 1973)

Chapitre III : Pompages d'essai en régime permanent

L'écoulement permanent est un régime d'équilibre obtenu après une longue période de pompage lorsque la réalimentation de la nappe équivaut au débit d'extraction de l'eau. A un débit de pompage constant correspond une stabilisation du rabattement et du cône de dépression.

Les pompages en écoulement permanent sont les plus simples à interpréter, offrent des résultats précis mais demande une longue période de pompage souvent incompatible avec les exigences économiques (fonctionnement et immobilisation du chantier). De plus, pour permettre une interprétation correcte, il faut un rabattement significatif avec un débit continu acceptable ce que ne permet pas tous les aquifères.

1. Méthode de Dupuit (1863) : *Dupuit* est le premier hydraulicien à avoir exprimé une formule liant le débit de pompage avec le rayon d'action en fonction de la perméabilité pour les problèmes de puits. Il est basé sur l'hypothèse que l'écoulement est horizontal et se dirige radialement vers le puits. De plus, les conditions suivantes sont nécessaires à l'élaboration du modèle :

- a- Couche aquifère est homogène, isotrope et de même épaisseur dans toute la zone influencée par le pompage,
- b- Nappe d'extension latérale infinie,
- c- Le puits est parfait (complet) donc écoulement bidimensionnel, avec un rayon (r_p) négligeable,
- d- Les épontes de la nappe sont imperméables dans le cas d'une nappe captive et le toit perméables pour la nappe libre,
- e- L'écoulement vers le puits est en régime permanent,
- f- Le débit pompé est constant,
- g- Absence d'effets capillaire sensibles,
- h- Régime laminaire,
- i- La nappe est initialement au repos.

1.1. Cas d'une nappe libre : Pour simplifier, *Dupuit* remplace l'arc élémentaire dl par sa projection horizontale dx , ce qui est une approximation valable si on ne considère que les parties de la nappe dont la surface n'a qu'une faible inclinaison (dans les zones à forte inclinaison, comme au voisinage de la tranchée de captage, de grosses erreurs sont ainsi introduites). On a alors : $Qdx = -K h dh$

$$Q = A.V \quad , \text{avec ; } A : \text{section d'écoulement, } V : \text{vitesse des filets liquides vers le puits}$$

$A = 2\pi xy$; Les filets sont convergents dans un cylindre

$$V = Ki = K \frac{dy}{dx}$$

$$Q = 2\pi.Kxy \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int Q \frac{dx}{x} = \int 2\pi.Kydy$$

$$\Rightarrow Q \ln x = \frac{2\pi K}{2} y^2 + C \Rightarrow C = Q \ln x - \pi.K y^2$$

Pour un cylindre infiniment rapproché de la paroi du puits ; $x = r_p$ et $y = h$ et l'équation devient : $C = Q \ln r_p - \pi.Kh^2$

$$Q \ln x = \pi Ky^2 + Q \ln r_p - \pi.Kh^2 \Rightarrow Q(\ln x - \ln r_p) = \pi.K(y^2 - h^2) \Rightarrow Q = \pi.K \frac{y^2 - h^2}{\ln(\frac{x}{r_p})}$$

De la même façon, quand le cylindre est infiniment rapproché de la paroi de la tranchée d'alimentation : $x = R$ et $y = H$

$$Q = \pi.K \frac{H^2 - h^2}{\ln(\frac{R}{r_p})} = \frac{\pi.K}{2.3} \cdot \frac{H^2 - h^2}{\log(\frac{R}{r_p})} \Rightarrow Q = 1.366.K \frac{H^2 - h^2}{\log(\frac{R}{r_p})}$$

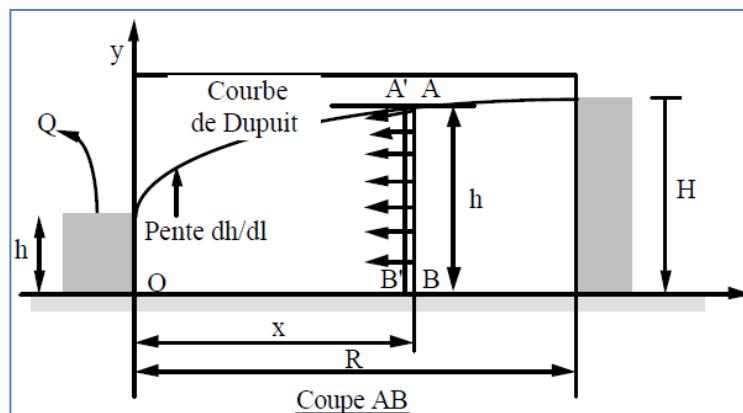


Figure.20 : Ecoulement entre 2 tranchées (nappe libre)

$$H^2 - h^2 = (H + h)(H - h) = (H + h)s = (H + (H - s)s = (2H - s)s$$

$$C = \frac{1.366}{\log(\frac{R}{r_p})}$$

$$Q = 1.366.K \frac{(2H - s)s}{\log(\frac{R}{r_p})}$$

Cette équation est de la forme $Q = C(2H - s)s$ représente l'équation d'une courbe.

1.2. Cas d'une nappe captive : Si nous reprenons le même écoulement dans le cas d'une nappe captive d'épaisseur constante e , en gardant les mêmes notations, nous pouvons écrire :

$$Qdx = -K e dh \quad \text{et} \quad Q = A.V \quad \Rightarrow \quad V = K.i = K \frac{dy}{dx},$$

Avec : A : section d'écoulement, V : vitesse des filets liquides vers le puits

$A = 2\pi.xe$: Les filets sont convergents dans un cylindre

$$Q = 2\pi.Kex \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \int Q \frac{dx}{x} = \int 2\pi.Kedy$$

$$Q \ln x = 2\pi.Key + constante \Rightarrow c = constante = Q \ln x - 2\pi.Key$$

Mais pour un cylindre infiniment rapproché de la paroi du puits : $x = r_p$ et $y = h$, r_p : rayon du puits

$$c = Q \ln r_p - 2\pi.Keh$$

$$Q \ln x = 2\pi.Key - 2\pi.Keh + Q \ln r_p \Rightarrow Q \ln x - Q \ln r_p = 2\pi.Ke.(y - h) \Rightarrow Q = 2\pi.Ke \cdot \frac{y - h}{\ln(\frac{x}{r_p})}$$

De la même manière pour un cylindre infiniment rapproché de la paroi d'alimentation :

$$x = R \text{ et } y = H$$

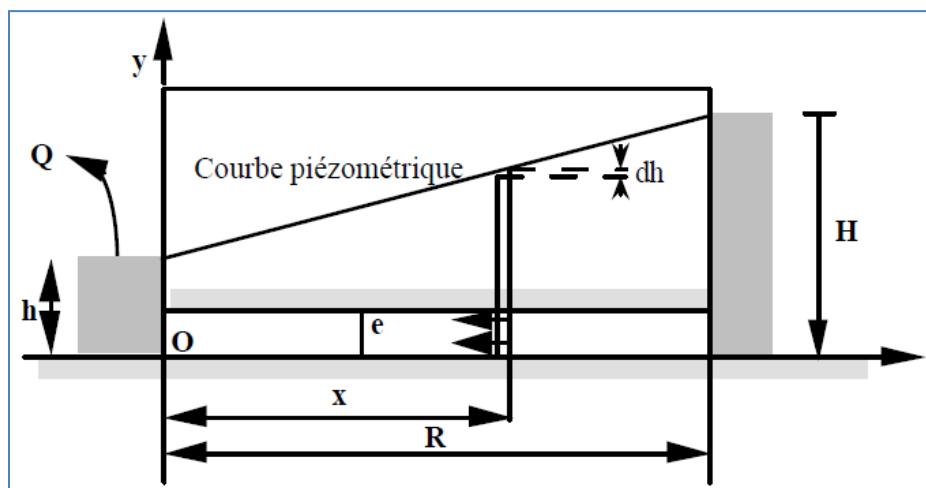


Figure.21 : Ecoulement entre 2 tranchées (nappe captive)

$$Q = 2\pi.Ke \cdot \frac{H - h}{R} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{R}{r_p})}, \text{ Comme : } \ln = 2.3 \log \Rightarrow Q = 2\pi.Ke \cdot \frac{H - h}{2.3 \log(\frac{R}{r_p})}$$

$$\Rightarrow Q = 2.73.Ke \cdot \frac{H - h}{\log(\frac{R}{r_p})}$$

Q : débit constant pompé (m^3/s), e : puissance de l'aquifère (m), $H-h=s$: rabattement (m)

R : rayon d'action qui représente la distance du puits à partir de laquelle le fonctionnement de ce dernier n'altère plus l'état initial de la nappe, K : perméabilité horizontale dans le plan de l'écoulement

Mode opératoire : Quand le gradient hydraulique du cône de dépression est constant et que l'écoulement de la nappe captive est en régime permanent, on peut identifier le rabattement stabilisé s , connaissant le débit Q , la puissance e , le rayon du puits r_p et le rayon d'action R , on peut en déduire la transmissivité T :

$$T = K \cdot e \text{ à partir de l'équation suivante : } T = \frac{Q \log\left(\frac{R}{r_p}\right)}{2.73s}$$

Cette méthode apparemment très simple, pose un problème dans la détermination du rayon d'action R , généralement il est fixé d'avance, pour cette raison *Thiem* (1906) a eu l'idée de prendre deux (2) piézomètres pour calculer la transmissivité.

2. Méthode de Thiem (1906) : *Thiem*, en 1906 a été l'un des premiers à utiliser plusieurs piézomètres d'observation afin de caractériser l'écoulement dans une nappe captive en régime permanent. Les conditions aux limites d'application de sa méthode sont les même que celles de *Dupuit*. Il a pu démontrer que le débit peut s'exprimer par la formule suivante sur celle de *Dupuit* :

$$Q = 2.73 \cdot K \cdot e \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \text{ où : } Q = 2.73 \cdot K \cdot e \cdot \frac{(s_1 - s_2)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \Rightarrow Q = 2.73 \cdot T \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Q : débit de pompage (m^3/s), $T = K \cdot e$: transmissivité de l'aquifère (m^2/s)

h_1 et h_2 : hauteurs de l'eau dans les piézomètres (m), r_1 et r_2 : distance aux piézomètres (m)

s_1 et s_2 : rabattements stabilisés dans les piézomètres (m)

Pour déterminer la transmissivité *Thiem* utilise deux modes opératoires :

Mode opératoire 1 : Quand le gradient hydraulique du cône de dépression est constant et que l'écoulement de la nappe est en régime permanent, on peut noter les rabattements stabilisés s_1 et s_2 connaissant les valeurs de débit Q , les distances aux piézomètres r_1 et r_2 on peut aisément déterminer la transmissivité de la nappe à l'aide de l'équation suivante :

$$Q = 2.73 \cdot T \cdot \frac{(s_1 - s_2)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \Rightarrow T = \frac{Q \cdot \log(r_2/r_1)}{2.73 \cdot (s_1 - s_2)}$$

Exemple d'application : Des lectures du rabattement à partir du niveau statique dans quatre piézomètres situés respectivement à 10, 25 et 50 et 140 m du puits sont, dans l'ordre 6.25, 4.41, 3.1 et 1.2 m. L'épaisseur de la nappe est de 15 m et le débit est de 30 l/s.

Si on considère :

$$\text{Les piézomètres situés à 25 m et 50 m : } T = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot \log(50/25)}{2.73 \cdot (4.41-3.1)} = 2.52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Pour les piézomètres situés à 25 m et 140 m : } T = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot \log(140/25)}{2.73 \cdot (4.42-1.2)} = 2.56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Pour les piézomètres situés à 50 m et 140 m : } T = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot \log(140/50)}{2.73 \cdot (3.1-1.2)} = 2.58 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

La transmissivité moyenne est de l'ordre de $2.55 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$

Mode opératoire 2 : On construit sur un diagramme semi-logarithmique la courbe $s = f(\log r)$.

Les distances r sont les distances de l'axe du puits de pompage jusqu'aux piézomètres. Il suffit d'avoir au moins deux (02) piézomètres alignés avec le forage de pompage et leurs rabattements stabilisés respectifs pour tracer cette courbe.

- Pour calculer la pente de la droite Δs , on trace la droite rabattement-distance qui s'ajuste le mieux à l'ensemble des points. On peut alors calculer la transmissivité étant donné que le débit Q est connu et la pente est calculée par cycle logarithmique.

La pente (Δs) est égale à ; $\frac{s_2 - s_1}{\log r_2 - \log r_1} = \frac{\Delta s}{\log(\frac{r_2}{r_1})}$, Comme ; $\log(\frac{r_2}{r_1}) = 1$ pour un cycle logarithmique, la pente est alors égale à Δs . $\Rightarrow T = \frac{Q}{2.73 \cdot \Delta s} \Rightarrow T = \frac{0.366 Q}{\Delta s}$

D'après le graphique $\Delta s = 4.4 \text{ m} \Rightarrow T = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2.73 \cdot 4.4} = 2.50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$, ce dernier résultat est

très proche si non égal à celui de la méthode de Thiem.

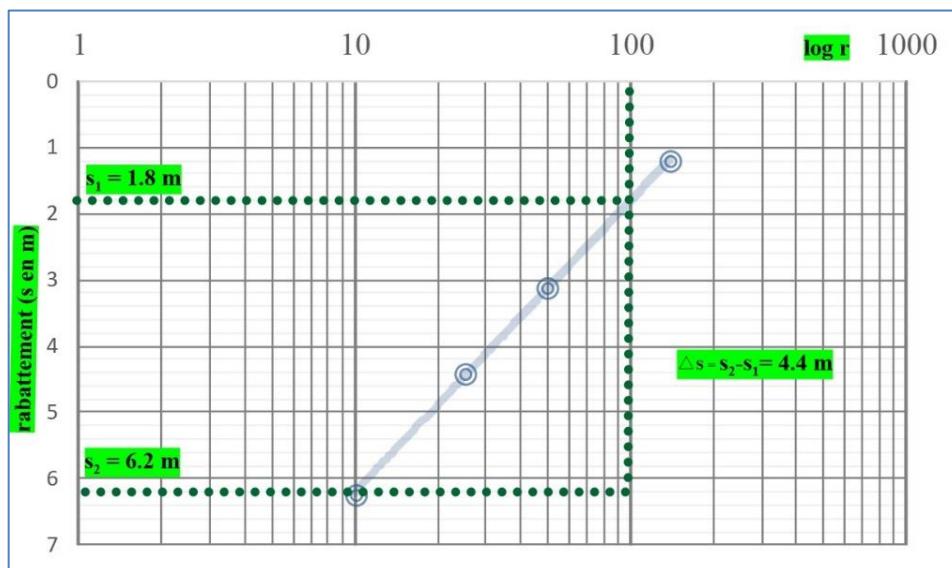


Figure.22 : Méthode semi-logarithmique de Thiem ($s = f(\log r)$)

Chapitre IV : Pompages d'essai en régime transitoire

Le régime transitoire ou de non équilibre, se produit entre le début du pompage et le moment où l'on atteint le régime permanent, tenant compte du fait observé que les dimensions du cône de dépression croissent en fonction du temps de pompage. C'est la base des expressions de C.V. Theis et de C.E. Jacob.

1. Méthode de Theis (1935) : C.V. Theis a développé en 1935 l'équation différentielle du régime variable (régime transitoire) en fonction des conditions aux limites des nappes infinies captives non réalimentées et d'épaisseur constante.

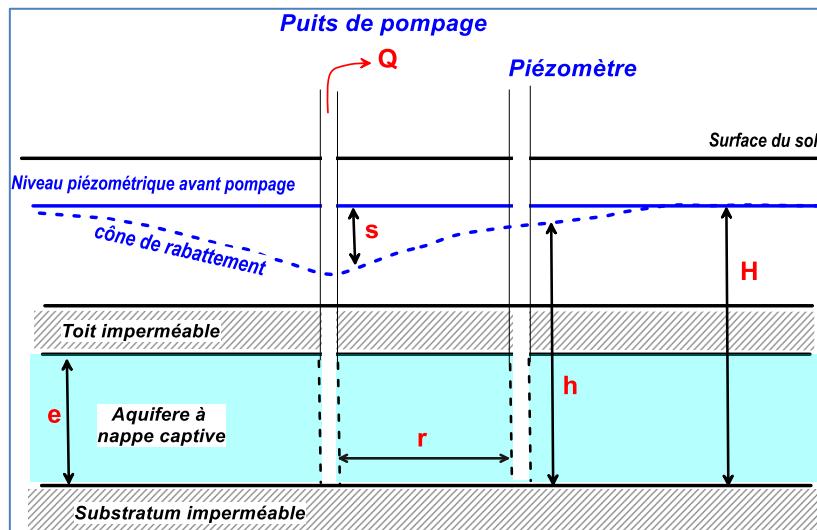


Figure. 23 : Puits parfait en nappe captive

L'équation de continuité de l'écoulement, compte tenu de la compressibilité de l'eau et des

$$\text{terrains est de la forme : } \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) T = S \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

Par analogie à l'équation de la chaleur : propagation de la chaleur (température) en régime

transitoire. Où S est le coefficient d'emmagasinement ; $S = m.e.\gamma(\beta + \frac{\alpha}{m})$

$S \frac{dh}{dt}$: Variation de la réserve de quantité d'eau qui existe dans le volume considéré.

T est la transmissivité ; $T = K \cdot e$

On peut transmettre l'équation (1) à l'eau en régime permanent :

Les conditions générales de base d'application de ces expressions sont celles de l'essai de puits. En outre le type d'aquifère, base des calculs, doit répondre aux trois caractéristiques suivantes : aquifère à nappe captive, illimité, à substratum et toit imperméables.

a- Couche aquifère est homogène, isotrope et de même épaisseur dans toute la zone influencée par le pompage,

b- Nappe d'extension latérale infinie,

c- Le puits est parfait (complet) donc écoulement bidimensionnel,

$$d- \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) T = S \frac{dh}{dt} \quad (2)$$

e- Rayon du puits (r_p) négligeable,

f- Les épontes de la nappe sont imperméables,

g- La libération de l'eau par le milieu poreux consécutivement à une baisse de pression est instantanée,

h- Le débit pompé est constant,

i- La nappe est initialement au repos.

En coordonnées polaires et en symétrie axiale, l'axe **oy** coïncide avec du puits et en remplaçant **x** par **r** on a:

$$\Delta h = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \frac{\partial h}{\partial r})}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S \partial h}{T \partial t} = \Delta h \quad (3)$$

$$\text{Comme } \partial h = \partial s \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{S}{T} \frac{ds}{dt} \quad (4)$$

Par intégration la solution de l'équation :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^{\frac{r_2 s}{4Tt}} \frac{e^{\frac{r_2 s}{4Tt}}}{t} dt \quad \text{Cette fonction peut être calculée à l'aide de la fonction exponentielle intégrale Ei.}$$

$$\text{En posant : } u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^1 \frac{e^{-u}}{t} dt \quad (5) \quad : \quad t = \frac{r^2 S}{4Tu} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{t} = -\frac{du}{u}$$

$$W(u) = -Ei(-u) = \int \frac{e^{-u}}{u} du \Rightarrow \int \frac{e^{-u}}{u} du = \int \frac{du}{u} + \int \frac{(e^{-u} - 1)}{u} du \quad , \text{avec} \quad \int \frac{du}{u} = \ln u$$

$$\int \frac{(e^{-u} - 1)}{u} du = -u + \frac{u^2}{2.2!} - \frac{u^3}{3.3!} + \dots + \frac{(-u)^n}{n.n!} + \delta$$

avec : $\delta = 0.577216$: nombre d'Euler (constante)

$W(u) = -0.577216 - \ln u + u - \frac{u^2}{2.2!} + \dots + \frac{(-u)^n}{n.n!}$, donc en remplaçant $w(u)$ par cette valeur dans

l'équation (5) on a :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \left(-0.577216 - \ln \left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right) + \frac{r^2 S}{4Tt} - \frac{1}{2.2!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right)^2 + \frac{1}{3.3!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right)^3 - \dots - \frac{1}{n.n!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right)^n \right)$$

Les valeurs de $W(u)$ en fonction de u sont données par une table ou par un graphique à l'échelle log-log

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (6), \quad u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (7), \quad \text{d'où } \log s = \log(W(u)) + \log \frac{Q}{4\pi T} \quad (8)$$

$$\log \frac{r^2}{t} = \log u + \log \frac{4T}{S} \quad (9) \quad \text{Ou : } \log \frac{1}{t} = \log u + \log \frac{4T}{r^2 S} \quad (10)$$

$\log \frac{Q}{4\pi T}, \log \frac{4T}{S}, \log \frac{4T}{r^2 S}$: Étant des constantes

Mode opératoire : Pour déterminer T et S , Theis utilise la méthode graphique de superposition suivante :

- On construit la courbe $W(u)$ en fonction de u en coordonnées bi-logarithmiques, on obtient ce qu'on appelle la courbe standard de Theis.

Tableau.4 : Valeurs de $W(u)$ pour différentes valeurs de u (d'après Wenzl, 1942).

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x 1$	0.219	0.049	0.013	0.0038	0.0011	0.00036	0.00012	0.000038	0.00
$x 10^{-1}$	1.82	1.22	0.91	0.7	0.56	0.45	0.37	0.31	0.26
$x 10^{-2}$	4.04	3.35	2.96	2.68	2.47	2.3	2.15	2.03	1.92
$x 10^{-3}$	6.33	5.64	5.23	4.95	4.73	4.54	4.39	4.26	4.14
$x 10^{-4}$	8.63	7.94	7.53	7.25	7.02	6.84	6.69	6.55	6.44
$x 10^{-5}$	10.94	10.24	9.84	9.55	9.33	9.14	8.99	8.86	8.74
$x 10^{-6}$	13.24	12.55	12.14	11.85	11.63	11.45	11.29	11.16	11.04
$x 10^{-7}$	15.54	14.85	14.44	14.15	13.93	13.75	13.60	13.46	13.34
$x 10^{-8}$	17.84	17.15	16.74	16.46	16.23	16.05	15.9	15.76	15.65
$x 10^{-9}$	20.15	19.45	19.05	18.76	18.54	18.35	18.2	18.07	17.95
$x 10^{-10}$	22.45	21.76	21.35	21.06	20.84	20.66	20.5	20.37	20.25
$x 10^{-11}$	24.75	24.06	23.65	23.36	23.14	22.96	22.81	22.67	22.55
$x 10^{-12}$	27.05	26.36	25.96	25.67	25.44	25.26	25.11	24.97	24.86
$x 10^{-13}$	29.36	28.66	28.26	27.97	27.75	27.56	27.41	27.28	27.16
$x 10^{-14}$	31.66	30.97	30.56	30.27	30.05	29.87	29.71	29.58	29.46
$x 10^{-15}$	33.96	33.27	32.86	32.58	32.35	32.17	32.02	31.88	31.76

Exemple d'application : Un essai de pompage est réalisé dans un forage à débit constant $Q = 47,5 \text{ m}^3/\text{h}$ pendant 18 jours. Les données du temps et du rabattement à un piézomètre d'observation situé à 20 m du forage sont reportées dans le tableau suivant :

Tableau.5 : Données d'un essai de pompage de longue durée

Temps (secondes)	Rabattement (m)	Temps (secondes)	Rabattement (m)	Temps (secondes)	Rabattement (m)
0	0	25200	3,73	345600	8,075
60	0,0150	32400	4,125	432000	8,305
120	0,0450	43200	4,29	518400	8,715
300	0,215	54000	4,535	691200	9,145
600	0,52	64800	4,725	777600	8,655
1200	1,065	86400	5,085	864000	9,455
1800	1,445	108000	5,405	950400	9,715
2400	1,72	129600	5,655	1036800	10,015
3000	1,93	151200	5,935	1123200	10,125
3600	2,095	172800	6,175	1209600	10,255
5400	2,445	194400	6,415	1296000	10,355
7200	2,685	216000	6,645	1382400	10,525
10800	3,015	259200	7,035	1468800	10,785
14400	3,26	302400	7,415	1555200	10,935
18000	3,445	604800	7,525		

- On construit par ailleurs la courbe du rabattement s en fonction de (r^2/t) ou de $(1/t)$ dans le cas où il n'y a qu'un seul puits d'observation) sur un papier bi-logarithmique de même dimension que celui utilisé pour la courbe standard.
- Si le débit est constant, les équations ci-dessus montrent que $W(u)$ est une fonction de u de la même façon que s est une fonction de (r^2/t) ou de $(1/t)$. Il sera donc possible de superposer la courbe des données ; $\log s = f(\log r^2/t)$ ou $\log s = f(\log 1/t)$ avec la courbe standard en maintenant les axes de coordonnées des deux courbes parallèles, de telle façon que les données coïncident au mieux avec la courbe standard.

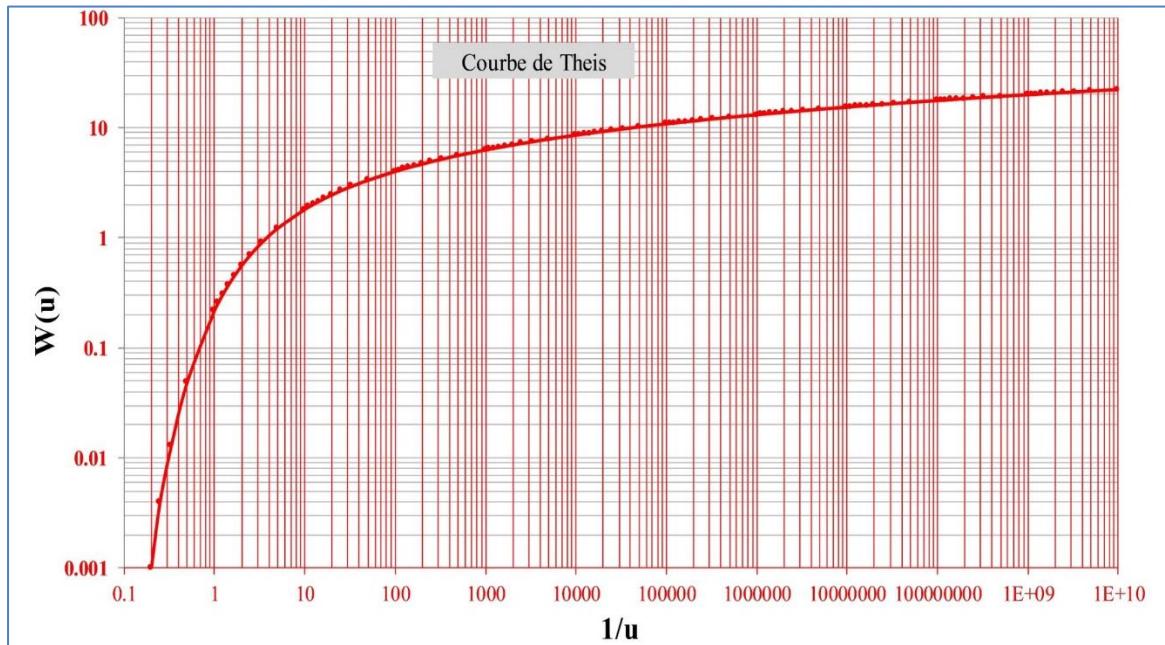


Figure.24 : Courbe caractéristique de C.V Theis.

- Un point commun appelé « Match Point », choisi arbitrairement sur la partie commune des deux courbes, détermine les valeurs corrélatives de : s , $W(u)$, u , et (r^2/t) ou $(1/t)$.
- En reportant ces valeurs dans les équations (6) et (7), on déduit les valeurs de T et S connaissant le débit Q (et la distance).

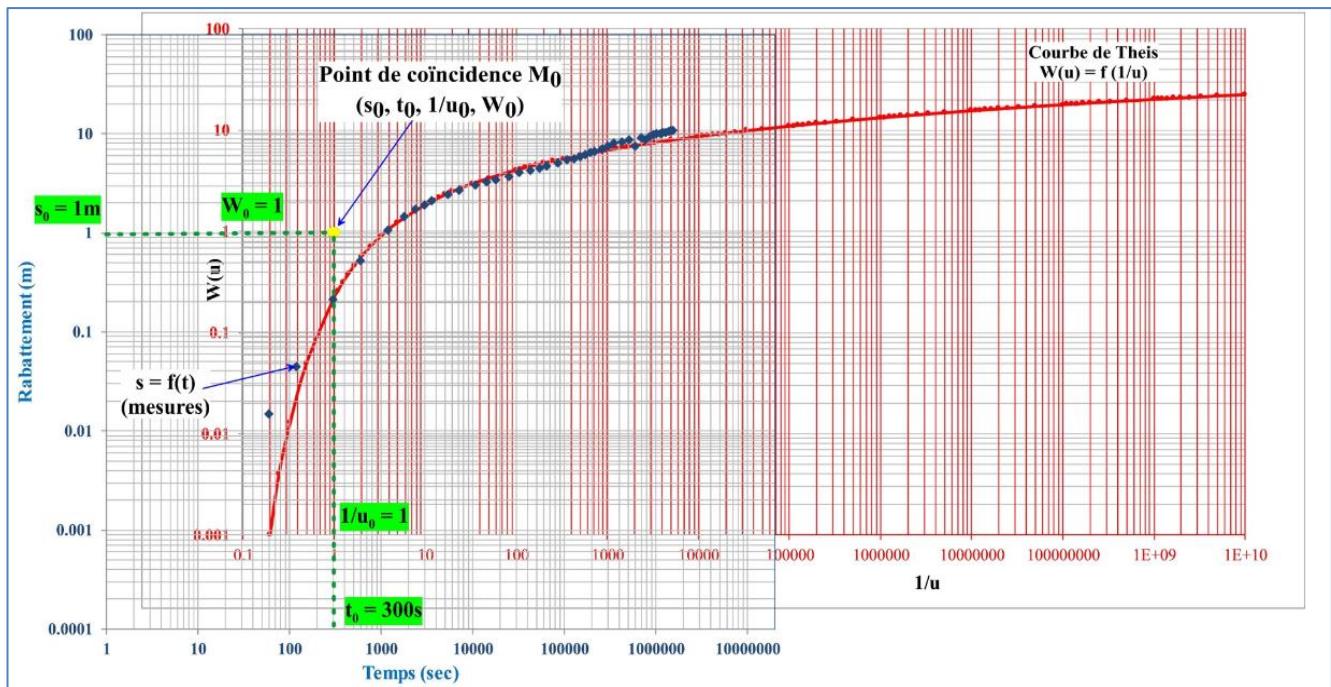


Figure.25 : Détermination des paramètres hydrodynamiques par la méthode de THEIS

$$s_0 = \frac{Q}{4\pi T} W_0 \quad (6) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Q}{4\pi W_0} \quad \Rightarrow \quad T = 1.05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$u_0 = \frac{r^2 S}{4T t_0} \quad (7) \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4T t_0}{r^2} \quad \Rightarrow \quad S = 3.15 \cdot 10^{-3}$$

❖ **Remarque :**

De l'équation $u = \frac{r^2 S}{4Tt}$ on peut tirer : $\frac{1}{u} = \frac{4Tt}{r^2 S}$ donc $\log \frac{1}{u} = \log t + \log \frac{4T}{r^2 S}$

En faisant le même raisonnement que précédemment, on voit que l'on peut superposer les deux diagrammes : $\log W(u)$ en fonction de $\log(1/u)$ et $\log s$ en fonction de $\log t$.

Cette manière de l'opérer nécessite la construction de la courbe $\log s = f(\log t)$ plus facile et plus représentative que les courbes : $\log s = f(\log 1/t)$ ou $\log s = f(\log r^2/t)$.

Comme : $\log 1/u = -\log u$, la courbe $W(u) = f(u)$ par rapport à la droite $u = 1$ parallèle à l'axe de $W(u)$.

2. Méthode d'approximation semi-logarithmique de Cooper et Jacob, 1946 : cette méthode est basée sur la formule du rabattement de Theis.

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \left(-0.577216 - \ln\left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right) + \frac{r^2 S}{4Tt} - \frac{1}{2.2!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)^2 + \frac{1}{3.3!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)^3 \dots \dots \dots \frac{1}{n.n!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)^n \right)$$

$$\text{Avec : } u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

Les termes du développement en série de la fonction exponentielle intégrale

$$\left(\frac{r^2 S}{4Tt} - \frac{1}{2.2!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)^2 + \frac{1}{3.3!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)^3 \dots \dots \dots \frac{1}{n.n!} \left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right)^n\right)$$

deviennent négligeables comparés au premier terme constant, lorsque le temps de pompage croît (pompage de longue durée) et que la valeur de r décroît (piézomètre très proche du puits de pompage). D'où l'expression d'approximation logarithmique de Jacob s'écrit :

$$s = \frac{Q}{4\pi T} (-0.577216 - \ln(u)), \text{ Sachant que : } 0.577216 = \ln 1.78$$

$$\Rightarrow s = \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{1}{u} - \ln 1.78 \right) \Rightarrow s = \frac{Q}{4\pi T} \cdot \ln \left(\frac{4Tt}{r^2 S} \cdot \frac{1}{1.78} \right) \Rightarrow s = \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{2.25Tt}{r^2 S} \right)$$

$$\text{Soit, après solution numérique et logarithmes décimaux } \Rightarrow s = \frac{2.3Q}{4\pi T} \cdot \log \left(\frac{2.25Tt}{r^2 S} \right)$$

$$\Rightarrow s = \frac{0.183Q}{T} \cdot \log \left(\frac{2.25Tt}{r^2 S} \right) \quad (\text{Jacob})$$

Avec : s : rabattement (m), Q : débit de pompage (m^3/s), T : transmissivité (m^2/s),

S : coefficient d'emmagasinement, r : distance à l'axe du forage (m), t : temps (s)

Conditions aux limites d'application :

- L'équation de Jacob est valable pour toutes les conditions de Theis,
- la condition ($u < 10^{-2}$) est satisfaite la plupart du temps après une heure ou moins de pompage dans un aquifère confiné lorsque le puits d'observation est à une distance relativement petite du puits de pompage.
- Lorsque $u < 0,05$ et $u < 0,1$, l'erreur dans les résultats est de l'ordre de 2% à 5% respectivement. Après analyse visuelle de graphiques entre ($u < 10^{-2}$) et ($u < 10^{-1}$), il est possible de constater qu'il est difficile, voire même impossible d'identifier avec précision à quel endroit les points commencent à dévier de la droite. Il est donc important de respecter la condition ($u < 10^{-2}$) dans l'utilisation de la méthode de Jacob.

Mode opératoire : On construit sur un diagramme semi-logarithmique la courbe $s = f(\log t)$ (ou si l'on a plusieurs points d'observation on peut utiliser $s = f(\log t/r^2)$).

- A débit constant, cette courbe est une droite d'équation :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \cdot \log t + \frac{0.183Q}{T} \log \frac{2.25T}{r^2 S} \Rightarrow s = ax + \text{constante} \left(\frac{0.183Q}{T} \log \frac{2.25T}{r^2 S} \right)$$

$$\text{Ou } s = \frac{0.183Q}{T} \cdot \log \frac{t}{r^2} + \frac{0.183Q}{T} \log \frac{2.25T}{S} \Rightarrow s = ax + \text{constante} \left(\frac{0.183Q}{T} \log \frac{2.25T}{S} \right)$$

- La pente de cette droite : $a = \frac{0.183Q}{T}$ permet de calculer la transmissivité $\Rightarrow T = \frac{0.183Q}{a}$

$$a = \frac{\Delta s}{\Delta \log t} = \frac{s_2 - s_1}{\log t_2 - \log t_1} \text{ avec: } \log \frac{t_2}{t_1} = 1, \text{ Pour un cycle logarithmique } \Rightarrow T = \frac{0.183Q}{a}$$

Si la droite représentative $s = f(\log t)$ coupe l'axe des temps au temps t_0 , on sait que pour

$$t = t_0 \Rightarrow s = 0, \text{ Or quand: } s = 0 \Leftrightarrow \frac{0.183Q}{a} \neq 0, \forall t, \text{ donc}$$

$$\log \frac{2.25Tt_0}{r^2 S} = 0 \Rightarrow \log \frac{2.25Tt_0}{r^2 S} = \log 1 \Rightarrow \frac{2.25Tt_0}{r^2 S} = 1 \Rightarrow S = \frac{2.25Tt_0}{r^2}$$

La détermination graphique de t_0 permet, connaissant T , de faire un calcul rapide du coefficient d'emmagasinement S .

Pour notre exemple : Pour un cycle logarithmique $\Rightarrow T = \frac{0.183Q}{a}$,

Avec : $Q = 47.5/3600 \text{ m}^3/\text{s}$, $a = s_2 - s_1 = 2 \text{ m}$ et $r = 20 \text{ m}$ et $t_0 = 450 \text{ s}$ (fig.26)

$$\Rightarrow T = 1.207 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}, \text{ et } S = \frac{2.25Tt_0}{r^2} \Rightarrow S = 3.056 \cdot 10^{-3}$$

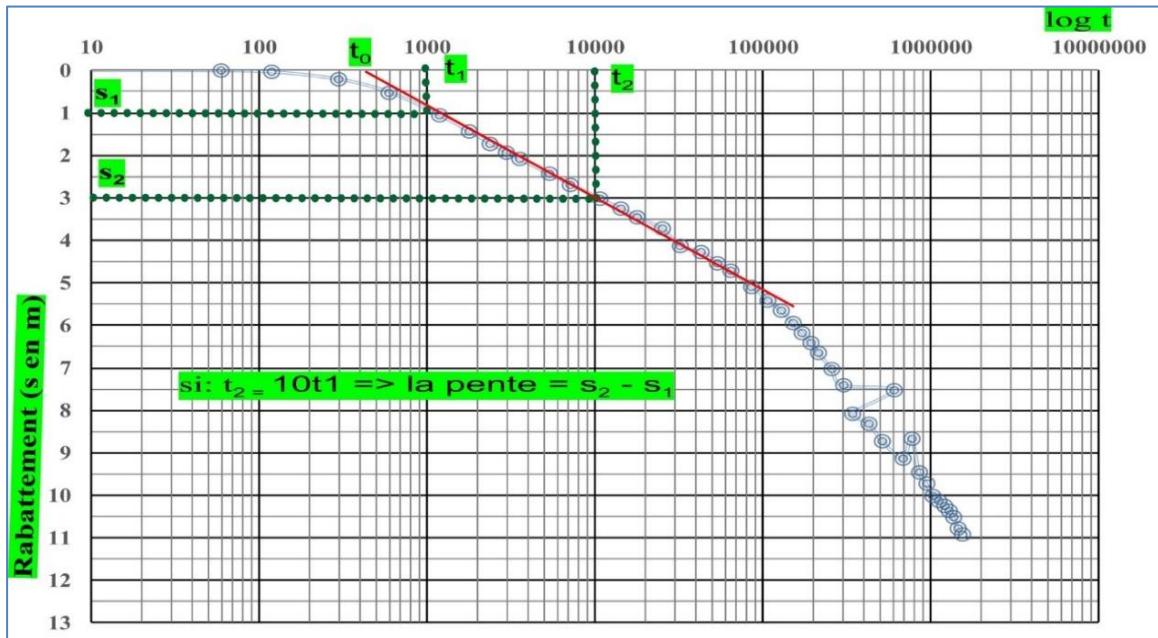


Figure. 26 : Méthode d'approximation semi-logarithmique de Cooper et Jacob ($s = f(\log t)$)

Remarque : Au lieu de construire la courbe $s = f(\log t)$ on peut construire l'une des trois (03) autres courbes suivantes :

1. $\frac{s}{Q} = f(\log t) \Rightarrow T = \frac{0.183}{a}$ et $S = \frac{2.25Tt_0}{r^2}$
2. $s = f(\log \frac{t}{r^2}) \Rightarrow T = \frac{0.183Q}{a}$ et $S = 2.25Tt_0$
3. $\frac{s}{Q} = f(\log \frac{t}{r^2}) \Rightarrow T = \frac{0.183}{a}$ et $S = 2.25Tt_0$

3. Méthode de profil de dépression d'après Jacob

- Le rayon fictif : Le rayon fictif, R_f , est la distance à laquelle le rabattement, calculé par l'expression de Jacob est nul. Il est fonction de la transmissivité et du coefficient d'emmagasinement. Fait qui confirme l'étude sur les facteurs des dimensions du cône de dépression. Etant donné que l'écoulement dans une nappe supposée parfaitement captive et infinie, est toujours transitoire, la zone d'influence est continuellement en expansion, bien que la progression puisse être très lente après une période de pompage relativement longue. Pour caractériser cette influence on considère parfois la distance théorique R à laquelle le rabattement calculé par l'équation de Jacob est nul d'où :

$$s = \frac{0.183Q}{T} \log\left(\frac{2.25Tt}{r^2S}\right) = 0, \text{ Comme } \frac{0.183Q}{T} \neq 0 \text{ quel que soit } t \Rightarrow \frac{2.25Tt}{r^2S} = 1$$

$$\text{D'où } R = 1.5 \sqrt{\frac{Tt}{S}}$$

On remarque que dans cette formule Q n'apparaît pas, *le rayon d'influence est donc indépendant du débit pompé*. Le rayon d'influence est fonction du rapport T/S et du temps ; il croît approximativement comme la racine carrée du temps.

R est parfois appelé rayon d'action fictif, car pour les valeurs de $u > 10^2$ où pour les faibles rabattements, l'équation de *Jacob* est grossièrement fausse. Il est souhaitable de calculer R par fonction de *Theis*.

- **Equation du profil du cône de rabattement d'après JACOB :** A un instant t la différence entre les rabattements dans deux piézomètres alignés avec le puits de pompage aux distances r_1 et r_2 s'écrit : $s_1 - s_2 = \frac{0.183Q}{T} \left(\log\left(\frac{2.25Tt}{r_1^2 S}\right) - \log\left(\frac{2.25Tt}{r_2^2 S}\right) \right) = 0$

$$\Rightarrow s_1 - s_2 = \frac{0.183Q}{T} \log\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) = \frac{0.183Q}{T} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow s_1 - s_2 = \frac{0.366Q}{T} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \Rightarrow \Delta s = \frac{0.366Q}{T} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Cette équation est indépendante du temps, elle permet donc de calculer T à condition d'avoir au moins deux piézomètres alignés avec le puits de pompage. L'exploration de la droite jusqu'à la valeur $s = 0$ donne la valeur du *rayon d'action fictif* pour le temps de pompage considéré.

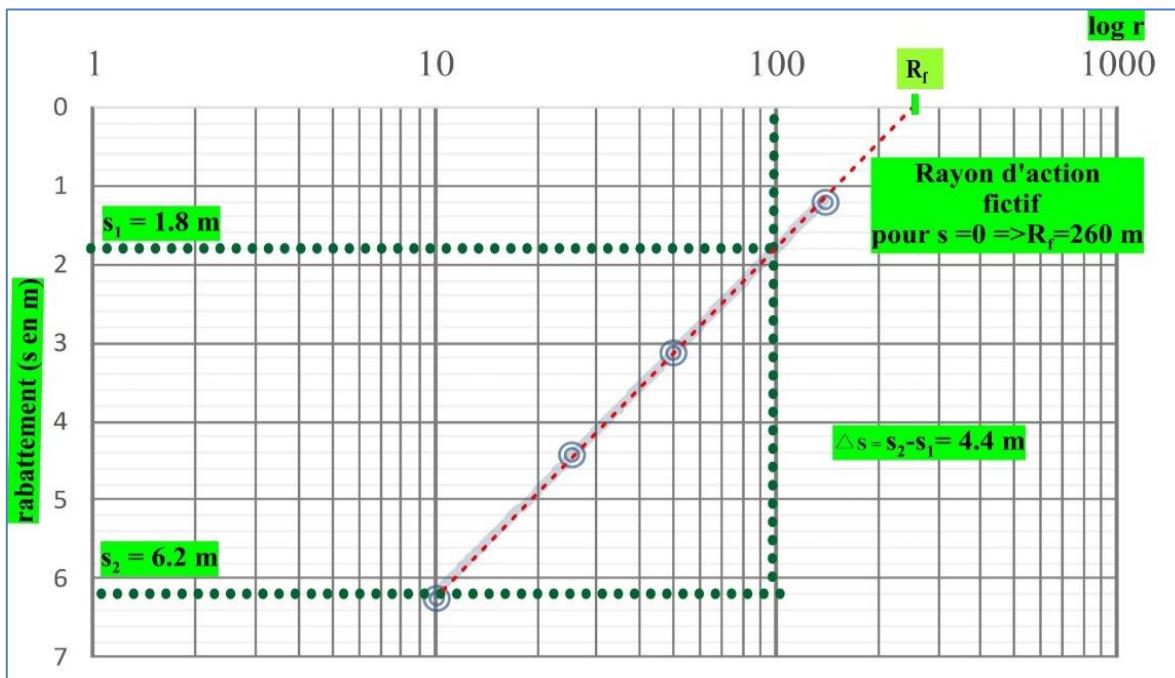


Figure.27 : Le rayon fictif d'après la méthode de profil de dépression d'après Jacob