

تمهيد:

في كثير من الأحيان لا يمكن إجراء دراسة حول خاصية معينة في المجتمع ككل سواء لأسباب اقتصادية أو عملية، أو لأسباب تتعلق بطبيعة المجتمع في حد ذاته كأن يكون هذا المجتمع غير محدود، حيث تتم الاستعانة بأسلوب المعاينة لجمع البيانات، حيث يتم اختيار جزء من مفردات المجتمع يعرف بالعينة، ثم تدرس الخاصية المرغوبة ضمن هذه العينة للوصول إلى النتائج وتعميمها على المجتمع بأكمله، وهنا تبرز أهمية دراسة نظرية المعاينة التي تهتم بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه.

وعليه، نتطرق في هذا المحور لأهم ما تتناوله هذه النظرية والمتمثل في توزيعات المعاينة، وسيتم ذلك من خلال العناصر التالية:

- I. مفاهيم أساسية
- II. حساب معالم المجتمع وإحصاءات العينة
- III. توزيعات المعاينة
 - 1.III. توزيع المعاينة للمتوسط
 - 2.III. توزيع المعاينة لفرق المتوسطات
 - 3.III. توزيع المعاينة للنسبة
 - 4.III. توزيع المعاينة لفرق أو مجموع نسبيتين
 - 5.III. توزيع المعاينة للتباين
 - 6.III. توزيع المعاينة لكسر التباينات.

1. مفاهيم أساسية

سيتم في هذا العنصر التطرق إلى أهم المصطلحات والمفاهيم الأساسية التي نصادفها عند دراسة نظرية المعاينة.

1.1. المجتمع:

هو عبارة عن جميع القيم أو المفردات التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي والتي نرغب في الحصول على استنتاجات حولها. وتعتبر عملية التعريف الدقيق لمجتمع الدراسة على قدر كبير من الأهمية لأنها تسمح بتحديد نطاق جمع البيانات، وبالتالي التأثير في صحة ومصادقية الاستنتاجات التي ستقضي إليها الدراسة. ويمكن التمييز بين نوعين للمجتمع الإحصائي هما:

- **المجتمع المحدود:** وهو الذي يمكن حصر عدد مفرداته، مثلاً: عدد الطلبة في تخصص علوم التسيير، عدد الوحدات المنتجة في ورشة معينة...الخ.
- **المجتمع غير المحدود:** وهو الذي من الصعب حصر عدد مفرداته، مثلاً الثروة السمكية في البحار، عدد النجوم في الفضاء...الخ.

2.1. العينة:

هي مجموعة جزئية من المجتمع. وهناك نوعين رئيسيين من العينات هما: **العينات غير الاحتمالية**، و**العينات الاحتمالية**، وتنقسم بدورها إلى : عينات عشوائية بسيطة، عينات عشوائية طبقية، عينات منتظمة.

3.1. معالم المجتمع:

هي عبارة عن مجموعة من المقاييس الإحصائية التي يتم حسابها بالاعتماد على بيانات المجتمع ومن أمثلتها : متوسط المجتمع μ_x ، تباين المجتمع $v(x)$ ، نسبة خاصية معينة في المجتمع P ...الخ.

4.1. الاحصاءات:

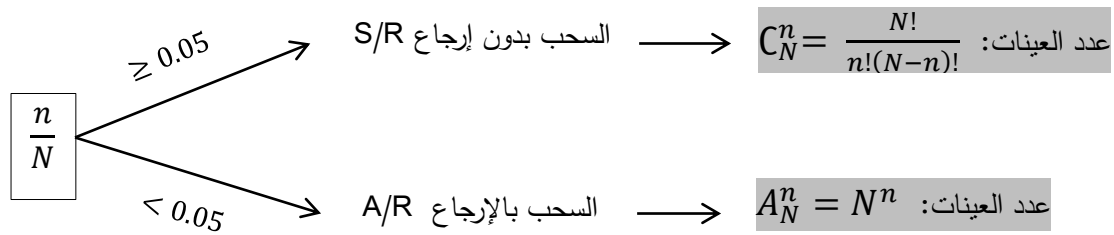
هي عبارة عن مجموعة من المقاييس الإحصائية التي يتم حسابها انطلاقاً من بيانات العينة، ومن أمثلتها: متوسط العينة $(\bar{x})$ ، تباين العينة (S^2) ، نسبة خاصية معينة في العينة (p_0) .

5.1. المعاينة :

هي عبارة عن أسلوب إحصائي يتم من خلاله دراسة خصائص معينة في المجتمع انطلاقاً من دراسة نفس الخصائص في عينة مسحوبة من هذا المجتمع. ويمكن التمييز بين أسلوبين للمعاينة:

المحاضرة رقم (03): مدخل لنظرية المعاينة

- **المعاينة بالإرجاع:** يعني ذلك إعادة العنصر المسحوب إلى المجتمع قبل السحب الموالي. وينتج عن ذلك أمرين: الأول هو إمكانية ظهور العنصر أكثر من مرة في العينات المسحوبة، والثاني أن المجتمع سيكون غير محدود (لا نهائي).
 - **المعاينة بدون إرجاع:** يعني ذلك عدم إعادة العنصر المسحوب إلى المجتمع قبل السحب الموالي، وهذا يعني أن العنصر سيظهر لمرة واحدة فقط، كما أن المعاينة بدون إرجاع تؤدي إلى تناقص حجم المجتمع تدريجياً مع كل سحب.
- من الناحية العملية يمكن اختيار نوع السحب (المعاينة) من خلال حساب ما يعرف بكسر المعاينة $\left(\frac{n}{N}\right)$ ومقارنته بقيمة معيارية هي (5%) بحيث:



6.I. توزيع المعاينة

يشير توزيع المعاينة إلى التوزيع الاحتمالي لجميع القيم الممكنة لإحصاءة ما في كل العينات العشوائية ذات نفس الحجم الممكن سحبها.

7.I. ملخص بالرموز المستعملة في هذا المحور: يوضح الجدول التالي أهم الرموز الاحصائية ومسمياتها التي سيتم استخدامها في هذا المحور:

الجدول رقم (01): الرموز الاحصائية المستخدمة في الفصل الثاني

الرمز	التسمية
N	حجم المجتمع
N	حجم العينة
μ_x	متوسط المجتمع
σ_x^2 , $v(x)$	تباين المجتمع
σ_x	الانحراف المعياري للمجتمع
P	النسبة في المجتمع
$\bar{x}$	متوسط العينة
S^2	تباين العينة
S	الانحراف المعياري للعينة
p_0	النسبة في العينة
$\mu_{\bar{x}}$, $E(\bar{x})$, $\bar{\bar{x}}$	متوسط توزيع المعاينة، متوسط المتوسطات
$\sigma_{\bar{x}}^2$, $v(\bar{x})$	تباين توزيع المعاينة
$\sigma_{\bar{x}}$	انحراف توزيع المعاينة
$\mathcal{N}$	التوزيع الطبيعي
T	توزيع ستودنت (student)
χ^2	توزيع كاي مربع (2 khi)
F	توزيع فيشر Fisher
A/R	سحب (معاينة) بالإرجاع
S/R	سحب (معاينة) بدون إرجاع

II. حساب معالم المجتمع وإحصاءات العينة

نظرا لأهمية هذين المفهومين (معالم المجتمع و إحصاءات العينة) في دراسة نظرية المعاينة، سيتم التطرق لهما بشكل مفصل في هذا العنصر.

II. 1. حساب معالم المجتمع

أشرنا سابقا إلى أن المعالم هي عبارة عن مقاييس إحصائية يتم حسابها انطلاقا من بيانات المجتمع، وتكمن أهميتها في أنها تسمح بتقديم توصيف للمجتمع المدروس.

II. 1.1. متوسط المجتمع

المتوسط هو مقياس من مقاييس النزعة المركزية التي تقيس درجة تجمع وتمركز قيم السلسلة حول قيمة معينة تعرف بالمتوسط.

فمثلا إذا كان لدينا مجتمع حجمه N مكون من العناصر التالية: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$. إن المتوسط الحسابي لهذا المجتمع، والذي سنرمز له بـ: μ_x ، يحسب بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\mu_x = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

II. 2.1. تباين المجتمع

التباين هو مقياس من مقاييس التشتت التي تقيس درجة تشتت القيم عن متوسطها. وإذا اعتبرنا نفس المجتمع أعلاه، فالتباين يُعطى بالعلاقة التالية:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu_x)^2}{N}$$

II. 3.1. النسبة في المجتمع

ترتبط النسبة دائما باحتمال تحقق حدث معين أو خاصية معينة في المجتمع، وسنرمز لها بالرمز p . ويمكن حساب النسبة في المجتمع باستخدام العلاقة التالية:

$$p = \frac{\hat{X}}{N}$$

حيث:

$\hat{X}$: تمثل عدد عناصر المجتمع التي تحقق الخاصية المعنية بالدراسة؛

N : يمثل حجم المجتمع (عدد عناصر المجتمع).

II. 2. حساب إحصاءات العينة

نعلم أن الاحصاءات هي مقاييس إحصائية تُحسب انطلاقاً من بيانات العينة، وكما هو الحال بالنسبة للمجتمع فمن أمثلة هذه المقاييس: المتوسط، التباين والنسبة.

II. 1.2. متوسط العينة

نرمز له بـ: $\bar{x}$ ، ويتم حساب متوسط العينة باستخدام العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

حيث:

x_i : يمثل عناصر العينة؛

n : يمثل حجم العينة.

II. 2.2. تباين العينة

نرمز له بـ: s^2 ، ويتم حساب تباين العينة باستخدام العلاقة:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

ملاحظة: هناك صيغة أخرى لحساب تباين العينة تستجيب لخاصية عدم التحيز من خواص المقدرات الجيدة (أنظر لاحقاً الفصل الخاص بنظرية التقدير). هذه الصيغة هي صيغة التباين المعدل للعينة، ويُعطى بالعلاقة:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right]$$

II. 3.2. النسبة في العينة

نرمز لها بـ: p_0 ، ويتم حساب نسبة خاصية معينة في العينة باستخدام العلاقة:

$$p_0 = \frac{\hat{x}}{n}$$

حيث:

$\hat{x}$: يمثل عدد عناصر العينة التي تحقق الخاصية المدروسة.

مثال (1):

يتألف مجتمع من العناصر التالية: $X_i = \{2, 3, 6, 8, 11\}$ ، المطلوب:

1. أحسب متوسط وتباين هذا المجتمع. ثم أحسب نسبة الأعداد الزوجية.
2. نسحب من هذا المجتمع العينات ذات الحجم $n = 2$
- ما هو عدد العينات الممكن سحبها؟
- أحسب متوسط وتباين العينات الممكن سحبها، ثم أحسب نسبة الأعداد الزوجية في كل عينة.
- ماذا تلاحظ فيما يخص قيم هذه الاحصاءات (المتوسط، التباين والنسبة)؟

الحل:

من المعطيات لدينا: $X_i = \{2, 3, 6, 8, 11\}$ إذن: حجم المجتمع $N = 5$ ، $n = 2$

1. حساب المتوسط والتباين والنسبة في المجتمع:

• المتوسط الحسابي:

$$\mu_x = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

$$\mu_x = \frac{2+3+6+8+11}{5}$$

$$\mu_x = 6$$

ومنه: متوسط هذا المجتمع هو $\mu_x = 6$

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu_x)^2}{N}$$

• التباين:

$$V(x) = \frac{1}{5} [(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2]$$

$$V(x) = 10.8$$

ومنه: تباين هذا المجتمع هو $V(x) = 10.8$

ويمكن استنتاج قيمة الانحراف المعياري كما يلي:

$$\sigma_x = \sqrt{v(x)}$$

$$\sigma_x = \sqrt{10.8} = 3.29$$

• النسبة:

الخاصية المدروسة هنا هي: الأعداد الزوجية

$$p = \frac{\hat{X}}{N}$$

$$\hat{X}_i = \{2, 6, 8\} \Rightarrow \hat{X} = 3$$

بالتعويض العددي:

$$p = \frac{3}{5} = 0.6$$

أي: نسبة الأعداد الزوجية في هذا المجتمع هي 60%.

2. نسحب من هذا المجتمع العينات ذات الحجم $n = 2$

- تحديد العينات الممكن سحبها :

بما أن : $\frac{n}{N} = \frac{2}{5} > 0.05 \Rightarrow S/R$ فإن السحب بدون إرجاع.

ويكون عدد العينات المحتملة كما يلي:

$$C_N^n = \frac{N!}{n! (N - n)!}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! (5 - 2)!} = 10 \text{ عينات}$$

ولتحديد العينات المحتملة نستعين بالمصفوفة التالية:

	2	3	6	8	11
2	(2.2)	(2.3)	(2.6)	(2.8)	(2.11)
3	(3.2)	(3.3)	(3.6)	(3.8)	(3.11)
6	(6.2)	(6.3)	(6.6)	(6.8)	(6.11)
8	(8.2)	(8.3)	(8.6)	(8.8)	(8.11)
11	(11.2)	(11.3)	(11.6)	(11.8)	(11.11)

إن هذه المصفوفة تمثل كل العينات المكونة من عنصرين (أي ذات الحجم $n=2$) التي يمكن سحبها من المجتمع السابق ذو الحجم $N=5$ بالإرجاع. وفي حالة السحب بدون إرجاع يتم أخذ نصف المصفوفة فقط بدون قطر (القطر هو العينات التي تتكون من نفس العنصر (المضللة في الشكل) لأنها تدخل ضمن حالة السحب بالإرجاع حيث يمكن أن يتكرر ظهور الرقم ضمن نفس العينة). وعليه فالعينات

المحتملة هي: (2.3)، (2.6)، (2.8)، (2.11)، (3.6)، (3.8)، (3.11)، (6.8)، (6.11)، (8.11) وعددها 10 عينات.

ملاحظة: تم أخذ النصف العلوي من المصفوفة (العينات فوق القطر)، ويمكن أخذ النصف السفلي منها (العينات تحت القطر) وستعطي نفس النتائج.

- حساب المتوسط والتباين ونسبة الأعداد الزوجية في العينات المسحوبة:

لتسهيل عملية الحساب نستعين بالجدول التالي:

الجدول رقم (2): جدول مساعد لحل المثال رقم (2.1)

العينه	$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i}{n}$	$s^2 = \frac{1}{n} (x_i - \bar{x})^2$	$p_0 = \frac{\dot{x}}{n}$	$(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2$
(2.3)	$\bar{x}_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$	$s_1^2 = \frac{1}{2} [(2 - 2.5)^2 + (3 - 2.5)^2] = 0.25$	$p_{01} = \frac{1}{2} = 0.5$	$(2.5 - 6)^2 = 12.25$
(2.6)	4	4	1	4
(2.8)	5	9	1	1
(2.11)	6.5	20.25	0.5	0.25
(3.6)	4.5	2.25	0.5	2.25
(3.8)	5.5	6.25	0.5	0.25
(3.11)	7	16	0	1
(6.8)	7	1	1	1
(6.11)	8.5	6.25	0.5	6.25
(8.11)	9.5	2.25	0.5	12.25
المجموع	60	67.5	6	40.5

ملاحظة: العمود الأخير لا يدخل ضمن حسابات أسئلة هذا المثال، بل هو ضمن متطلبات مثال آخر لاحقاً.

- ماذا تلاحظ فيما يخص قيم هذه الاحصاءات (المتوسط، التباين والنسبة)؟

من خلال حساب هذه الاحصاءات نلاحظ أن قيمها تختلف من عينة إلى أخرى، وهذا يعني أنها

تشكل متغيرات عشوائية.

إن السؤال الذي يتبادر هنا هو: بما أن هذه الاحصاءات تشكل متغيرات عشوائية، فالأكيد أن كل

متغير منها يتبع توزيع احتمالي معين. فما هي التوزيعات التي تتبعها مختلف الاحصاءات (المتوسط،

التباين والنسبة) في العينة؟.