

المحاضرة رقم (05): توزيع المعاينة لفرق الأوساط

يكون من المهم في بعض الأحيان معرفة التوزيع الاحتمالي لمقدار الاختلاف أو الفرق بين متوسطي عينتين مسحوبتين من مجتمعين مستقلين، في هذه الحالة نلجأ إلى دراسة ما يُعرف بتوزيع المعاينة لفرق الأوساط.

الحالة الأولى: توزيع المعاينة لفرق الأوساط في حالة معلومية تبايني المجتمعين

ليكن $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ متوسطي عينتين عشوائيتين n_1 و n_2 مسحوبتين بالارجاع من مجتمعين طبيعيين مستقلين $\mathcal{N}_1(\mu_{x_1}, \sigma_{x_1}^2)$ و $\mathcal{N}_2(\mu_{x_2}, \sigma_{x_2}^2)$ على الترتيب بحيث: $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ معلومين. إن توزيع المعاينة للمتغير $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ هو التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2})$ وانحراف معياري $(\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2})$ بحيث:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} . \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{n_2}} . \end{cases}$$

ومنه نكتب:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2}, \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{n_2}}\right)$$

ويكون المتغير المعياري في هذه الحالة هو:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_{x_1} - \mu_{x_2})}{\sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ملاحظة: في حالة السحب بدون إرجاع يتم تصحيح $\frac{\sigma_{x_1}^2}{n_1}$ و $\frac{\sigma_{x_2}^2}{n_2}$ بمعامل التصحيح $\mathcal{K}_1$ و $\mathcal{K}_2$ على الترتيب

$$\text{بحيث: } \mathcal{K}_1 = \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \text{ و } \mathcal{K}_2 = \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}$$

مثال (01):

إذا كانت الأجور اليومية في إحدى الشركات تخضع للتوزيع الطبيعي: $(\mu_{x_1} = 5, \sigma_{x_1}^2 = 0.5)$ ، والأجور اليومية في شركة أخرى تخضع هي الأخرى للتوزيع الطبيعي $(\mu_{x_2} = 4, \sigma_{x_2}^2 = 0.25)$ سحبنا من عمال الشركتين عينتين $n_1 = 20$ و $n_2 = 10$ على الترتيب. المطلوب:

- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسط أجور العمال في العينتين.
- أحسب احتمال أن يقل فرق متوسط أجور العمال بين العينتين عن 0.75 وحدة نقدية.

الحل: لدينا المعطيات

الشركة 2	الشركة 1
توزيع المجتمع طبيعي	توزيع المجتمع طبيعي
$\mu_{x_2} = 4$	$\mu_{x_1} = 5$
$\sigma_{x_2}^2 = 0.25$	$\sigma_{x_1}^2 = 0.5$
$n_2 = 10$	$n_1 = 20$

نرمز بـ:

- $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$: متوسطي العينتين n_1 و n_2 على الترتيب.
 - $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$: هو متغير عشوائي يمثل الفرق بين متوسطي الأجور في العينتين
1. إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي الأجور في العينتين:

لدينا من المعطيات:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}, \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}) \iff \begin{cases} \text{المجتمعين طبيعيين} \\ \sigma_{x_1}^2 \text{ و } \sigma_{x_2}^2 \text{ معلومين} \\ n_1 \text{ و } n_2 < 30 \end{cases}$$

بحيث:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{x_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{n_2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 5 - 4 = 1 \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{0.5}{20} + \frac{0.25}{10}} = 0.22 \end{cases} \quad \text{بالتعويض العددي نجد:}$$

ومنه: توزيع المعاينة لفرق متوسط الأجور في العينتين هو التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي 1 وحدة نقدية وانحراف معياري يساوي 0.22 وحدة نقدية. ونكتب:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 1, \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0.22)$$

2. حساب احتمال أن يقل فرق أوساط الأجور في العينتين عن 0.75 وحدة نقدية:

المطلوب هو حساب الاحتمال: $p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < 0.75]$

بما أن $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 1, \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0.22)$ فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي:

المحاضرة رقم (05): توزيع المعاينة لفرق الأوساط

$$\begin{aligned}
p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < 0.75] &= p\left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} < \frac{0.75 - 1}{0.22}\right] \\
&= p[Z < -1.14] \\
&= \pi(-1.14) \\
&= 1 - \pi(1.14) \\
&= 1 - 0.8729
\end{aligned}$$

$$p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < 0.75] = 0.1271$$

الحالة الثانية: توزيع المعاينة لفرق الأوساط في حالة مجهولية تبايني المجتمعين

رأينا سابقا عند دراسة توزيع المعاينة لمتوسط عينة مسحوبة من مجتمع ما أنه إذا كان تباين المجتمع مجهول يتم تعويضه بتباين العينة. لكن في حالة وجود عينتين مسحوبتين من مجتمعين مختلفين بتباينين مجهولين فإن عملية تعويض تبايني المجتمعين $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ بتبايني العينتين S_1^2 و S_2^2 على الترتيب لا تكون مقبولة دائما من الناحية الرياضية، وذلك لسبب بسيط هو أنه قد يكون تباينا المجتمعين الأصليين متساويين وهنا لا يمكن تعويض مقدارين متساويين $(\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2)$ بمقدارين غير متساويين $(S_1^2$ و $S_2^2)$ ، ويختفي هذا الاشكال إذا كان تبايني المجتمعين الأصليين غير متساويين.

وعليه يمكن التفصيل في توزيعات المعاينة لفرق الأوساط في حالة مجهولية تبايني المجتمعين حسب

الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ مجهولين وبافتراض أنهما غير متساويين

إذا كان $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ متوسطي عينتين عشوائيتين n_1 و n_2 مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين $\mathcal{N}_1(\mu_{x_1}, \sigma_{x_1}^2)$ و $\mathcal{N}_2(\mu_{x_2}, \sigma_{x_2}^2)$ على الترتيب بحيث: $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ مجهولين وغير متساويين. وليكن S_1^2 و S_2^2 هما تباينا العينتين n_1 و n_2 المسحوبتين من المجتمعين السابقين على الترتيب. إن توزيع المعاينة للمتغير المعياري للفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ من أجل العينات الصغيرة ($n < 30$) هو توزيع ستودنت. ويُعطى متوسط وانحراف توزيع المعاينة للفرق بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned}
\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} &= \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} . \\
\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} &= \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} .
\end{aligned}$$

ويكون المتغير المعياري في هذه الحالة هو:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_{x_1} - \mu_{x_2})}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim T_{\alpha, v}$$

علما أن درجة الحرية v في هذه الحالة تعطى بالعلاقة التالية:

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

أما إذا كانت المعاينة قد تمت في ظل نفس الشروط السابقة (أي من مجتمعين طبيعيين بتباينين مجهولين وبافتراض أنهما غير متساويين) لكن بعينتين كبيرتين ($n_1 > 30$ و $n_2 > 30$) فإن توزيع المعاينة للمتغير المعياري للفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ في هذه الحالة يؤول إلى التوزيع الطبيعي، مع الحفاظ على نفس العلاقات الرياضية لمتوسط وانحراف توزيع المعاينة أي أن:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} . \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} . \end{cases}$$

والمتغير المعياري يصبح:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_{x_1} - \mu_{x_2})}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0.1)$$

مثال (02) :

إليك المعطيات التالية المتعلقة بعملية معاينة تمت من مجتمعين طبيعيين:

معالم المجتمعين			
خصائص	الحجم	$\mathcal{N}_2(\mu_{x_2} = 59, \sigma_{x_2}^2)$	$\mathcal{N}_1(\mu_{x_1} = 64, \sigma_{x_1}^2)$
العينة	التباين	$n_2 = 16$	$n_1 = 9$
		$s_2^2 = 25$	$s_1^2 = 36$

إذا افترضنا أن $\sigma_{x_2}^2$ و $\sigma_{x_1}^2$ مجهولين وغير متساويين.

المطلوب:

1. أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين.
 2. أحسب احتمال أن يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية بـ 10 على الأقل.
- الحل:

1. إيجاد توزيع المعاينة لفرق الأوساط:

نرمز بـ:

- $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$: هما متوسطي العينتين n_1 و n_2 على الترتيب.
 - $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$: هو متغير عشوائي يمثل الفرق بين متوسطي العينتين.
- لدينا من المعطيات:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim T_{\alpha, v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{المجتمعين طبيعيين} \\ \sigma_{x_1}^2 \text{ و } \sigma_{x_2}^2 \text{ مجهولين وغير متساويين} \\ n_1 \text{ و } n_2 < 30 \end{cases}$$

توزيع المعاينة هنا هو توزيع ستودنت لأن العينات صغيرة الحجم، بحيث:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \end{cases}$$

بالتعويض العددي نجد:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 64 - 59 = 5 \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{36}{9} + \frac{25}{16}} = 2.36 \end{cases}$$

2. حساب احتمال أن يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية بـ 6 على الأقل:

$\bar{x}_1$ يزيد عن $\bar{x}_2$ بـ 10 على الأقل معناه أن الفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يكون أكبر من 10. إذن فلاحتمال المطلوب حسابه هو: $p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 10]$.

من السؤال الأول وجدنا أن الفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتبع توزيع ستودنت بمتوسط $\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 5$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 2.36$ ومنه:

$$p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 10] = 1 - p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \leq 10]$$

المحاضرة رقم (05): توزيع المعاينة لفرق الأوساط

$$\begin{aligned}
&= 1 - p \left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \leq \frac{10 - 5}{2.36} \right] \\
&= 1 - p(t_{14} \leq 2.12) \\
&= 1 - 0.975 \\
p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 10] &= 0.025
\end{aligned}$$

بالنسبة لدرجة الحرية فقد تم حسابها كالتالي:

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2 - 1)}} = \frac{\left(\frac{36}{9} + \frac{25}{16} \right)^2}{\frac{36^2}{9^2(9 - 1)} + \frac{25^2}{16^2(16 - 1)}} \approx 14$$

الحالة الثانية: $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ مجهولين وبافتراض أنهما متساويين

رأينا كيف أنه إذا كان تباين المجتمعين $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ مجهولين وغير متساويين يتم تعويضهما مباشرة

بتبايني العينتين s_1^2 و s_2^2 . لكن إذا افترضنا أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين أي $\sigma_{x_2}^2 = \sigma_{x_1}^2$ فإنه من غير المنطقي من الناحية الرياضية أن يتم تعويض $\sigma_{x_1}^2$ الذي يساوي $\sigma_{x_2}^2$ بتباين العينة s_1^2 الذي لا يساوي s_2^2 . وفي هذه الحالة يتم تعويض $\sigma_{x_1}^2$ و $\sigma_{x_2}^2$ بما يعرف بالتباين المشترك للعينتين.

وعليه: إذا كان $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ متوسطي عينتين عشوائيتين n_1 و n_2 مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين $\mathcal{N}_1(\mu_{x_1}, \sigma_{x_1}^2)$ و $\mathcal{N}_2(\mu_{x_2}, \sigma_{x_2}^2)$ على الترتيب بحيث: $\sigma_{x_2}^2$ و $\sigma_{x_1}^2$ مجهولين ومتساويين. وكان s_1^2 و s_2^2 هما تباينا العينتين n_1 و n_2 على الترتيب. إن توزيع المعاينة للمتغير المعياري للفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ من أجل العينات الصغيرة ($n < 30$) هو توزيع ستودنت. ويُعطى متوسط وانحراف توزيع المعاينة للفرق بالعلاقات التالية:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} . \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} . \end{cases}$$

علما أن: S_p^2 يمثل التباين المشترك للعينتين، ويعطى بالعلاقة التالية:

المحاضرة رقم (05): توزيع المعاينة لفرق الأوساط

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

وعليه يكون:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

ويكون المتغير المعياري في هذه الحالة هو:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_{x_1} - \mu_{x_2})}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim T_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}$$

$$v = n_1 + n_2 - 2$$

بحيث درجة الحرية هي:

مثال (03):

إليك المعطيات التالية المتعلقة بعملية معاينة من مجتمعين طبيعيين، تبايناتها مجهولة ومتوسطاتها $\mu_{x_1} = 380$ و $\mu_{x_2} = 360$ على الترتيب:

العينة الأولى	العينة الثانية	حجم العينة
20	12	
8.74	6.58	تباين العينة

بافتراض أن تبايني المجتمعين متساويين. المطلوب:

- أوجد توزيع المعاينة لفرق أوساط العينتين.
- أحسب احتمال أن يزيد هذا الفرق عن 22.

الحل:

1. إيجاد توزيع المعاينة لفرق الأوساط:

نرمز بـ: $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$: هما متوسطي العينتين n_1 و n_2 على الترتيب.- $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$: هو متغير عشوائي يمثل الفرق بين متوسطي العينتين.

لدينا من المعطيات:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim T_{\alpha, n_1 + n_2 - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{المجتمعين طبيعيين} \\ \sigma_{x_1}^2 \text{ و } \sigma_{x_2}^2 \text{ مجهولين ومتساويين} \\ n_1 \text{ و } n_2 < 30 \end{cases} \text{ إذن}$$

بحيث:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2} \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad / \quad S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \end{cases}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(20 - 1)(8.74) + (12 - 1)(6.58)}{20 + 12 - 2}} = 2.82$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 380 - 360 = 20 \\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 2.82 \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{12}} = 1.02 \end{cases}$$

2. حساب احتمال أن يزيد هذا الفرق عن 22:

المطلوب هنا هو حساب الاحتمال: $p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 22]$

بما أن توزيع المعاينة هو توزيع ستودنت، سنستخدم جدول ستودنت لاستخراج الاحتمال:

$$p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 22] = 1 - p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \leq 22]$$

$$= 1 - p\left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \leq \frac{22 - 20}{1.02}\right]$$

$$= 1 - p(t_{30} \leq 1.96)$$

$$= 1 - 0.975$$

$$p[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 22] = 0.025$$

تذكر: درجة الحرية في حالة عينتين

$$v = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$$

لاستخراج الاحتمال نبحث على السطر الموافق لدرجة الحرية 30 عن القيمة 1.96 أو أقرب قيمة لها، نجد القيمة الأقرب 2.04، نقوم بالإسقاط عموديا على محور الاحتمالات نجد 0.975