Chapitre 1 : Statistiques descriptive

1)- Définitions et vocabulaires:

Définition :

1. **La statistique est une méthode scientifique qui consiste à réunir des données chiffrées sur des ensembles nombreux, puis à analyser, à commenter et à critiquer ces données.**
2. **La statistique est une méthode qui vise à la description quantitative des ensembles nombreux. (définition donnée par Gerard-Carlot). C'est une méthode et non une théorie.**

Le but de la statistique descriptive est de structurer et de représenter l'information contenue dans les données

Définition : La biostatistique

La biostatistique c'est la statistique appliquée à la biologie.

Exemple :

Etude descriptive des poids des étudiants inscrits en deuxième année de biologie à l'université de Jijel.

Comme toute science, la statistique fait appel à un vocabulaire spécialisé :

- **POPULATION** La collection d'objets ou de personnes étudiées (élèves, habitants, voitures…).
- **INDIVIDU** élément de la population étudiée. (un élève, un habitant, une voiture,…).
- **ECHANTILLON** partie de la population étudiée. Nombre d'individus dans un échantillonnoté n est appelé taille de l'échantillon
- **LA TAILLE** représente le nombre d'individus d'un échantillon ou d'une population. Elle est symbolisée par « **n** » dans le cas d'un échantillon et par « **N** » dans le cas d'une population.
- **VARIABLE (CARACTERE)** propriété commune aux individus de la population, que l'on veut étudier.
- **LES MODALITE** les différentes manières d'être que peut présenter un caractère.

Exemple :

Nous résumons les différents concepts dans cet exemple :

Population : l'ensemble des tous les employés d'une usine.

Individu : chaque employé de l'usine.

Caractère : le salaire, l'état matrimonial, le nombre d'enfants,… etc.

Les modalités du caractère : marié, célibataire, divorcé et veuf sont les modalités de l'état matrimonial, par exemple.

2) Type de caractères

Caractère quantitatif : Modalités mesurables (tout ce qu'on peut mesurer par un instrument)

Discret	**Continu**
• Les modalités prennent des valeurs isolées (ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs) **Exemple:** Nombre d'enfants dans une famille 0,1,2,……etc	• Les modalités prennent des valeurs très rapprochées (peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de l'ensemble des nombres réels **Exemple:** Taux du glucose dans le sang 0.88, 0.89, 1.01, 1.03, 1.27…etc

Caractère qualitatif : modalités non mesurables (on ne peut associer ni valeur numérique ni un ordre naturel (type devoiture, couleur des cheveux, …).

Ordinale	**Nominale**
Les modalités sont des qualités peuvent être ordonnées **Exemples**: Taille de vêtements (S, M,L, XL…)	Pas d'ordre **Exemples**: • le sexe • La couleur des yeux (Bleu, vert, Marron…)

3) Représentation des données :

Après la réalisation d'une étude statistique, les données recueilles peuvent être résumées et représentées sous forme de

- Tableaux statistiques
- Graphes
- Paramètres statistiques

Notations

- **Effectif ou fréquence absolue** : (noté n_i) nombre d'apparitions de la valeur associé à un caractère dans un échantillon.
- **Fréquence relative** : (noté f_i)

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

- **Série statistique** : l'ensemble des valeurs du caractère avec en regard, les fréquences absolues ou relative correspondante.
- **Les effectifs (la fréquence) cumuls (es) croissant (es) :** la fréquence (effectif) cumulé croissante d'une valeur X_i est égalée à la somme des effectifs ou fréquences des valeurs inférieur ou égale X_i. On note $n_i^{\uparrow}$ ($f_i^{\uparrow}$).
- **Les effectifs (la fréquence) cumuls (es) décroissant (es)** : la fréquence (effectif) cumulé décroissante d'une valeur Xi est égalée à la somme des effectifs ou fréquences des valeurs supérieures ou égale Xi

Remarque: On a toujours

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

$$0 \leq f_i \leq 1, \qquad \sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

1. Representation sous forme des tableaux statistiques

1) Série statistique dans le cas d'une variable quantitative discrète

Exemple 1 :

Nombre d'enfant	0	1	2	3	4	5	total
Nombre de famille effectif : ni	16	18	14	11	3	2	64
Fréquence relative : fi	0,250	0,281	0,218	0,172	0,047	0,031	1

- **Population étudiée** : les familles
- **L'échantillon sur lequel porte l'étude** : familles d'un immeuble ; n=64.

- **Le caractère étudié** est le nombre d'enfants par famille. C'est un caractère quantitatif discret.

2) Série statistique dans le cas d'une variable quantitative continue

Exemple : poids de 161 nouveau-nés.

Les classes	Centre de classe x_i	Effectif n_i	Fréquence relative f_i	$n_i^{\uparrow}$
2.2-2.5	2.35	5	0.031	5
2.5-2.8	2.65	11	0.068	16
2.8-3.1	2.95	24	0.148	40
3.1-3.4	3.25	40	0.248	80
3.4-3.7	3.55	42	0.259	122
3.7-4.0	3.85	20	0.124	142
4.0-4.3	4.15	13	0.08	155
4.3-4.6	4.45	6	0.037	161

3) Série statistique dans le cas d'une variable qualitative

Exemple : L'analyse du sang de 100 individus à donner les résultats suivants

Groupe SANGUIN	Effectif n_i	Fréquence relative f_i
O	40	0.40
A	43	0.43
B	12	0.12
AB	5	0.05

Remarque : On peut découper une série de valeurs en classe c.-à-d. passer de caractère discret au caractère continue en appliquant l'une des formules suivantes :

1. **Si $n < 50$**

$$Nombre\ de\ classes = k \cong \sqrt{n}$$

2. **Formule de Sturge**

$$k = 1 + 3.332\ log_{10}(n)$$

3. **Formule de Yule**

$$k = 2.5\sqrt[4]{n}$$

Amplitude des classes :

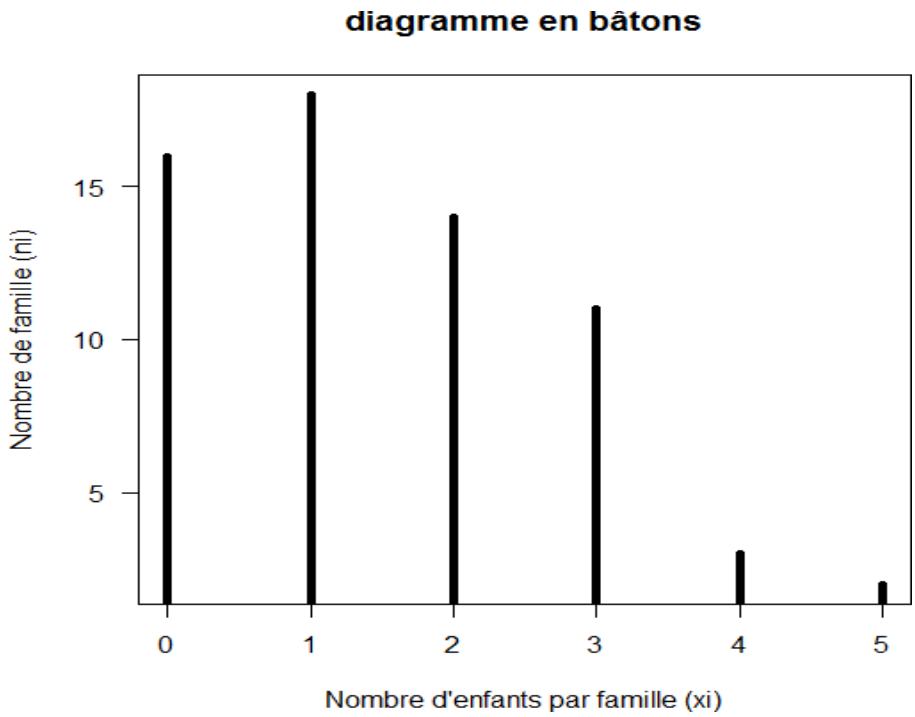
Il faut mieux d'utiliser des classes de même amplitude a donnée par

$$a = \frac{X_{max} - X_{min}}{k}$$

2. Représentation graphique d'une série statistique

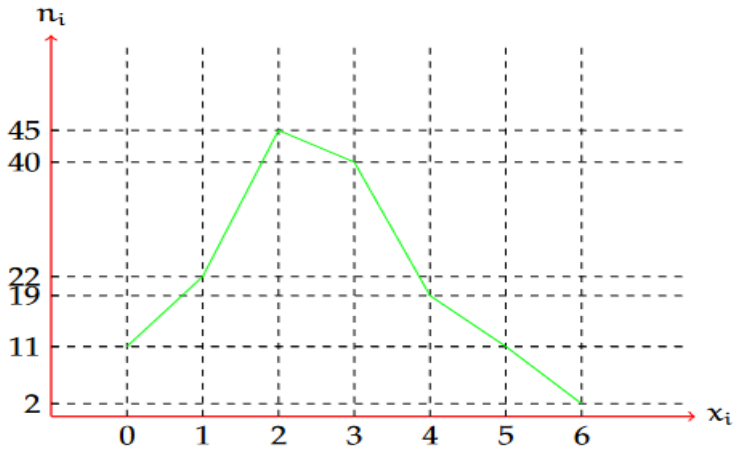
1) Caractère discret (discontinu)

- **Diagramme en Bâtons**: C'est un ensemble de bâtons ayant pour abscisses les valeurs $X_1, X_2, \dots, X_n$ du caractère et en chacun des points d'abscisses x_i une ordonnée proportionnelle à l'effectif n_i de X_i



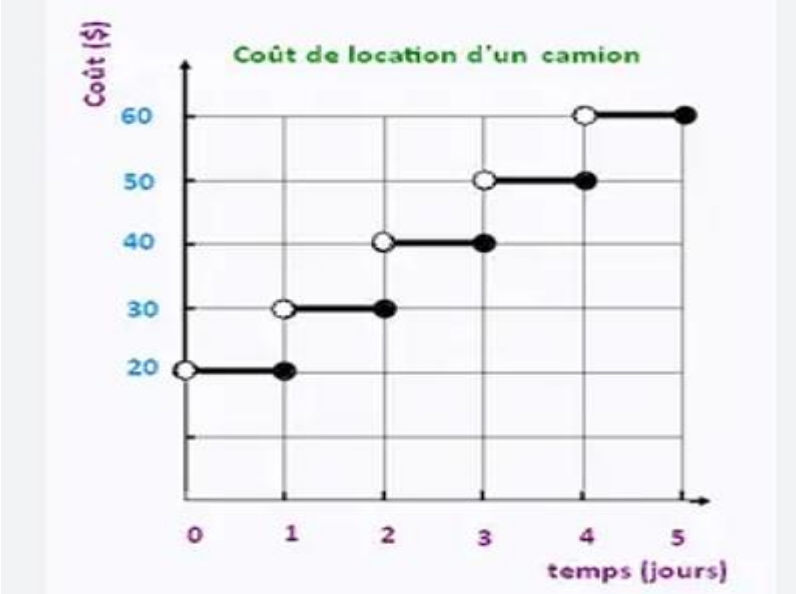
- **Polygone des Fréquences**

On l'obtient en joignant par des segments de droite les extrémités des bâtons



- **Diagramme cumulatif (diagramme en escaliers)**

En abscisse figurent, encore une fois, les observations de la variable considérée, tandis qu'en ordonnée figurent maintenant les effectifs cumulés, les fréquences cumulées ou les pourcentages cumulés. Dans le diagramme cumulatif les bâtons ont des longueurs proportionnelles aux effectifs cumulés (ou aux fréquences cumulées)



Exemple 2

Tracer le diagramme en escaliers de tableau suivant

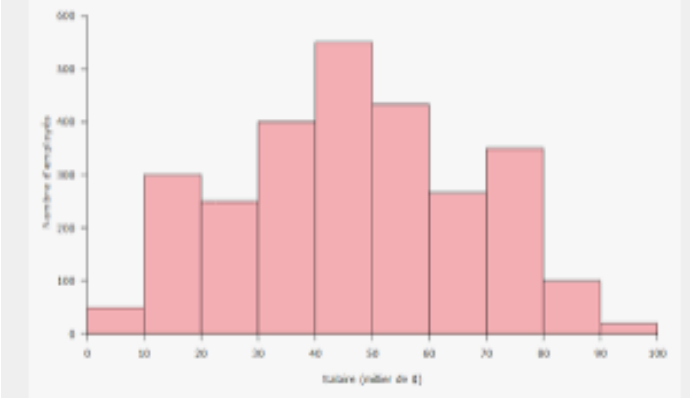
Valeurs	Effectif	Fréquence
0	10	0.2
1	5	0.1
3	10	0.2
4	15	0.3
5	10	0.2

2) Caractère continue

- **Histogramme :** c'est un ensemble de rectangles ayant pour largeur l'amplitude de la classe et pour hauteur l'effectif de la classe

Exemple:

Tracer l'histogramme de l'exemple « poids des nouveaux nés



- **Polygone des effectifs ou polygone des fréquences**

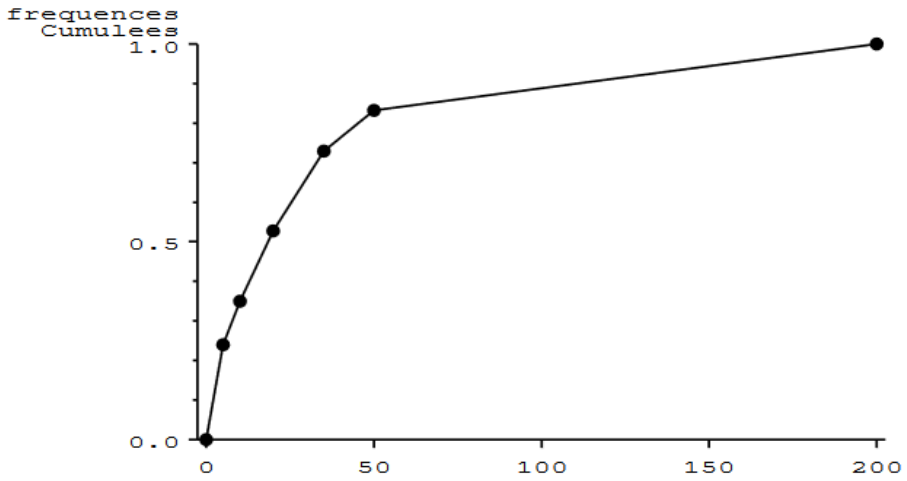
Est la ligne brisée joignant les milieux des bases supérieures des différentes rectangles adjacents.

Exemple:

Tracer le polygone des effectifs pour le même exemple

La courbe cumulative croissante et décroissante (poids des nouveaux nés)

Pour la variable quantitative continue étudiée, chaque classe considérée doit d'abord être représentée par un point unique dont l'abscisse est la borne supérieure/inférieure de la classe et l'ordonnée est l'effectif (ou la fréquence, ou le pourcentage) cumulé de cette classe. La courbe cumulative est alors la courbe joignant les points en question



3) Dans le cas d'une variable qualitatives

Les représentations graphiques que l'on rencontre avec les variables qualitatives sont assez nombreuses. Les deux plus courantes, qui sont aussi les plus appropriées, sont :

- Le diagramme en colonnes (en rectangles).
- Le diagramme en secteurs (diagramme en camembert)

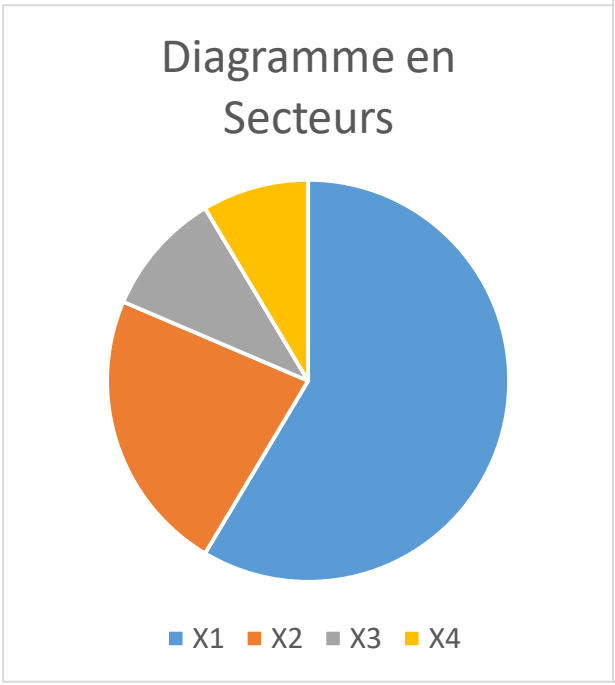


Diagramme en Secteurs
X1
X2
X3
X4

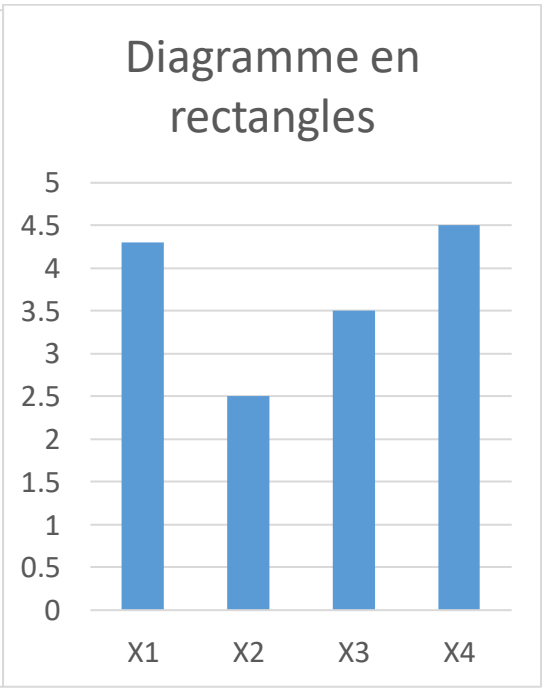


Diagramme en rectangles
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
X1
X2
X3
X4

3. Les Paramètres (Description Numérique)

La réduction des données permet de condenser les données sous forme des paramètres typiques qui sont les suivants :

- Paramètre de position
- Paramètre de dispersion
- Paramètre de dissymétrie et d'aplatissement

1) Paramètre de position

Ce sont des valeurs moyennes qui servent à caractériser l'ordre de grandeur des observations. Ce sont principalement :

- la moyenne - Le mode La médiane- La médiane

1.1. Moyenne arithmétique :

Soit l'ensemble de mesure d'une même variable X : $X_1, X_2, \dots, X_n$, la moyenne arithmétique notée $\bar{X}$ est définie par :

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Exemple 1: La moyenne arithmétique des valeurs 8,5,3,6,2

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{8+5+3+6+2}{5} = 4.8$$

- Lorsque les valeurs $X_1, X_2, \dots, X_n$ se répètent respectivement 1, 2, …,n fois, on obtient la ***moyenne arithmétique pondérée*** en comptant chaque valeur X_i autant de fois qu'elle se présente: ceci revient à pondérer la valeur X_i par l'effectif n_i qui lui correspond. On aura

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i}{n}$$

Exemple 2 : Si les valeurs 8,5,3,6, et 2 se reproduisent respectivement 1,4,2,2,1 fois, la moyenne arithmétique est

$$\bar{X} = \frac{8\times 1 + 5\times 4 + 3\times 2 + 6\times 2 + 2\times 1}{10} = 4.8$$

- Si les valeurs X_i sont groupé dans des classes dont les centres x_i, la moyenne arithmétique est donnée par :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n}.$$

Exemple 3 :

Classe	x_i	n_i
[1, 2[	1.5	3
[2, 3[	2.5	1
[3, 4[	3.5	2

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} n_i x_i = \frac{1}{6}(3\times 1.5 + 1\times 2.5 + 2\times 3.5) = \frac{14}{6} = 2.33.$$

1.2. La médiane (the Mediane)

❖ Cas d'une variable statistique discrète

La médiane est le quantile d'ordre 1/2. Elle partage donc la série des observations en deux ensembles d'effectifs égaux.

Si la série possède un nombre impair de valeurs, la médiane sera $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{ième}$ valeur

Si la série compte un nombre pair de valeurs, la médiane sera la demi somme de la $\left(\frac{n}{2}\right)^{ième}$ et la $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{ième}$ valeurs.

Exemple 1 : On a la série de 15 valeurs suivantes :

12, 10, 11, 4, 5, 4, 2, 1, 6, 8, 7, 8, 9, 9, 4.

On ordonne d'abord les valeurs

1, 2 ,4

On a $n = 15$ impair donc $me = (\frac{15+1}{2})^{ième} = 7$.

Exemple 2 : 4,5,8,8,9,11,12,14,17,19. la médiane $me = \frac{9+11}{2} = 10$.

❖ Cas d'une variable statistique continue (médiane par interpolation)

$$me = l_1 + \frac{\left(\frac{n}{2} - n_{l_1}^{\uparrow}\right)}{n_0} a$$

Avec :

- l_1 : la borne inférieure de la classe médiane (classe médiane : la classe correspondante à $n_i^{\uparrow}$ égale ou supérieure à $\frac{n}{2}$)
- a: l'amplitude de la classe médiane
- n_0: L'effectif de la classe médiane
- $n_{l_1}^{\uparrow}$: l'effectif cumulé jusqu'à l_1 (avant n/2).

Remarque : La médiane Graphiquement (le cas continue)
La médiane est le point d'intersection de deux graphiques cumulés croissant et décroissant

1. 3. Le mode

❖ Cas d'une variable statistique discrète

Le mode d'une série est la valeur la plus fréquente de la série
Exemple 1 : le mode de la série {4 , 2, 4, 3, 2, 2} est 2.

❖ Cas d'une variable statistique continue

Dans ce cas le mode se calcule par la forme

$$Mo = L_i + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) a.$$

- L_i : la borne inférieure de la classe modale (la classe qui a le plus grand effectif).
- Δ_1= l'effectif de la classe modale -l'effectif de la classe précédente $(n_i - n_{i-1})$.

- Δ_2= l'effectif de la classe modale -l'effectif de la classe suivante $(n_{i+1} - n_i)$.
- a : l'amplitude de la classe modale.

Exemple :

Classe	n_i
[1 ;60-1,65[	3
[1.65-1.70[	**8**
[1.70-1.75[	2

La classe modale

$L_i = 1.65,\ \Delta_1 = 8 - 3 = 5,\quad \Delta_2 = 8 - 2 = 6, a = 1.70 - 1.65 = 0.05$, donc

$$Mo = 1.65 + \left(\frac{5}{5+6}\right) \times 0.05 = 1.67.$$

Remarque : Une variable peut avoir plusieurs modes.
Exemple : le mode de la série {4 , 2, 4, 3, 2, 2} est 2

2) Paramètre de dispersion

3.1. Etendu

On appelle étendu, notée « e », la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur observée $(e = X_{max} - X_{min})$.
Exemple :

$$X = \{6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10\}$$

$e = 10 - 6 = 4.$

3.2. Variance et écart type

❖ **Cas d'une variable discrète**

- **Variance**

La variance σ^2 (ou var) d'une série est la moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs de la série à leur moyenne

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i (X_i - \bar{X})^2}{n}.$$

Proposition : (formule de Koenig) La variance est donnée aussi par

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i X_i^2\right) - \bar{X}^2.$$

- **Ecart type**

L'écart type σ est la racine carrée de la variance.

❖ **Cas d'une variable continue**

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X})^2}{n}.$$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ est appelé l'écart type de la série.

3.3. Les quartiles

On utilise couramment les quartiles Q_1, Q_2 et Q_3.
Q_1 est le quartile d'ordre $\frac{1}{4}$, représente 25% de l'échantillon.
Q_2 est le quartile d'ordre $\frac{1}{2}$, représente 50% de l'échantillon.
Q_3 est le quartile d'ordre $\frac{3}{4}$, représente 75% de l'échantillon.

Détermination des quantiles :

Le premier quartile Q_1

❖ **Cas d'une variable discrète**

Q_1 est la valeur X_i dont le rang (la position) est le plus petit entier qui suit $\frac{n}{4}$.

Exemple : Dans l'exemple des observations suivantes

$$2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10,$$

on a $n = 11$ et $\frac{n}{4} = \frac{11}{4} = 2.25$. Le plus petit entier qui suit $\frac{n}{4} = 2.25$ est 3, alors Q_1 est la troisième valeur ($Q_1 = 4$).

❖ **Cas d'une variable continue**

Dans ce cas le premier quartile est donner par la formule suivante

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n}{4} - n_{l_1}^{\uparrow}\right)}{n_0} a$$

Avec :

- l_1 : la borne inférieure de la classe de Q_1 (la classe correspondante à $n_i^{\uparrow}$ égale ou supérieure à $\frac{n}{4}$)
- a: l'amplitude de la classe de Q_1.
- n_0: L'effectif de la classe de Q_1.
- $n_{l_1}^{\uparrow}$: l'effectif cumulé jusqu'à l_1 (avant n/4).

Le troisième quartile Q_3

❖ **Cas d'une variable discrète**

Q_3 est la valeur X_i dont le rang (la position) est le plus petit entier qui suit $\frac{3n}{4}$.

❖ **Cas d'une variable continue**

Dans ce cas le premier quartile est donné par la formule suivante

$$Q_3 = l_1 + \frac{\left(\frac{3n}{4} - n_{l_1}^{\uparrow}\right)}{n_0} a$$

Avec :

- l_1 : la borne inférieure de la classe de Q_3 (la classe correspondante à $n_i^{\uparrow}$ égale ou supérieure à $\frac{3n}{4}$)
- a: l'amplitude de la classe de Q_3.
- n_0: L'effectif de la classe de Q_3.
- $n_{l_1}^{\uparrow}$: l'effectif cumulé jusqu'à l_1 (avant 3n/4).

3.4. Ecart interquartile

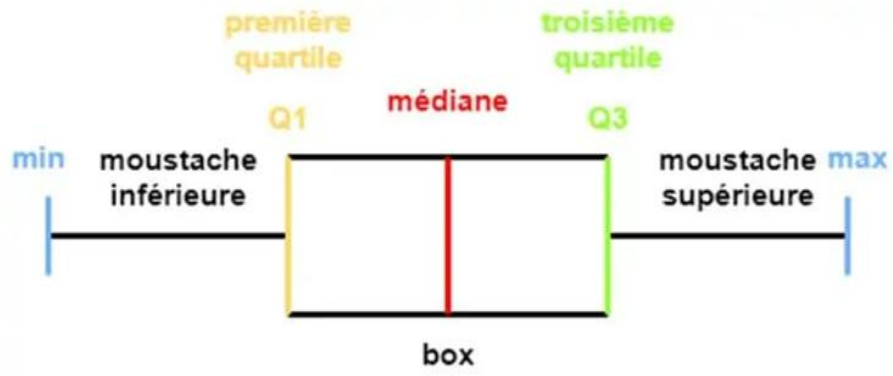
Contient 50% de la population laissant à droite 25% et à gauche 25%. C'est intervalle est donnée par

- Ecart interquartile : $EQ = Q_3 - Q_1$
- Ecart semi-interquartile : $Qs = EQ/2$

3.5. Diagramme de TUKEY (ou boîte à moustaches)

Est graphique permettant de résumer un caractère quantitatif par ses valeurs extrêmes et ses quartiles. L'idée est la suivante :

Sur un axe horizontal, on place les valeurs extrêmes et les quartiles, et on place un rectangle dont la longueur est l'interquartiles $IQ = Q_3 - Q_1$ et dont la largeur est proportionnelle à la racine carrée de la taille de la population. Enfin, on partage ce rectangle par un segment vertical au niveau de la médiane (Q_2) et on ne garde que partie « utile » de l'axe



Paramètres de dispersion relatives

Un paramètre de dispersion relative est une mesure de l'écart relatif des valeurs d'une distribution à une valeur centrale. C'est donc un rapport :

$$Paramètre\ \ D.R = \frac{Paramètre\ D.A}{valeur\ centrale}$$

Exemple:

- Le coefficient de variation : $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$
- Le coefficient interquartile relatif: $CIR = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$

Le CV permet d'apprécier la représentativité de la moyenne par rapport à l'ensemble des observations. Il mesure le degré d'homogénéité de la série. Il faut qu'il soit le plus faible possible (en pratique < 15%).

Remarque:

- Si $CV < 0.25$, On dit que les valeurs de la variable sont concentrées
- Si $CV \geq 0.25$, On dit que les valeurs de la variable sont dispersées

3) Paramètre de forme

Il existe des indices mesurant la symétrie (ou l'asymétrie) et l'aplatissement d'une distribution

3.1. Les moments

On appelle moment d'ordre $k \epsilon N^*$ par rapport à la valeur x_0 La quantité :

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - X_0)^k.$$

3.2. Coefficient d'asymétrie

Si une distribution est symétrique on a :

$$\bar{X} = Mo = Me \quad et\ (Q_3 - Q_2) = (Q_2 - Q_1).$$

Ce coefficient est défini par :

$$SK = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

3.3. Coefficient d'aplatissement

Le coefficient est défini par

$$\gamma = \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3\right) = \left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)$$

Le coefficient est nul pour une loi normale. Lorsqu'il est négatif, on parle de distribution étalée (on dit parfois platicurtique). Lorsqu'il est positif, on parle de distribution pointue (on dit parfois leptocurtique).